УДК 515.126

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ В НУЛЬМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.В. Медведев[1]

Пусть X – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Доказана теорема о продолжении гомеоморфизма $g{:}A \to B$ между счётными непересекающимися компактными подмножествами A и B пространства X до гомеоморфизма $f: X \to X$. Если, дополнительно, пространство X не псевдокомпактно, то гомеоморфизм g можно продолжить до гомеоморфизма $f: X \to X \setminus A$.

Ключевые слова: однородное пространство, гомеоморфизм, первая аксиома счётности, псевдокомпактное пространство.

В статье изучается возможность продолжения гомеоморфизмов в нульмерных однородных пространствах с первой аксиомой счётности. Интерес к этому вопросу появился после знакомства с одним результатом ван Дауэна [1]. Ван Дауэн показал, что любое нульмерное однородное не дискретное метрическое пространство гомеоморфно своему собственному подмножеству.

Обозначения. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y гомеоморфны. $w(X)$ – вес пространства X. Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω, также $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$. Мы будем предполагать, что любая рассматриваемая последовательность точек состоит из различных точек. Если в пространстве X последовательность $\{a_n : n \in \omega\}$ точек сходится к точке $a \in X$, то положим $S(a) = \{a\} \cup \bigcup \{a_n : n \in \omega\}$.

Пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек a и b из X найдется гомеоморфизм $f: X \to X$, для которого $f(a) = b$. Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно является T_1-пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Отметим, что каждое нульмерное пространство является тихоновским пространством. Тихоновское пространство называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная вещественная функция, определенная на этом пространстве, ограничена. Пространство называется *сжимаемым*, если оно гомеоморфно некоторому своему собственному подмножеству.

Остальные используемые определения и обозначения можно найти в [2].

Лемма 1. *Пусть X – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве X даны две сходящиеся последовательности точек $\{a_n : n \in \omega\}$ и $\{b_n : n \in \omega\}$, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и $S(a) \cap S(b) = \varnothing$.*

Тогда для любой открыто-замкнутой окрестности U точки a существуют открыто-замкнутая окрестность V точки a и гомеоморфизм $f: X \to X$, такие, что: $V \subset U$, $f(a) = b$, $f(V) \cap V = \varnothing$, $f \circ f = id_X$, $f(x) = x$ для любой точки $x \notin V$ и $\forall i (a_i \in V \Leftrightarrow b_i \in f(V))$.

Доказательство. Так как пространство X однородное, то существует гомеоморфизм $g: X \to X$, переводящий точку a в точку b. Найдем такую открыто-замкнутую окрестность W точки a, что $W \subset U$ и $g(W) \cap W = \varnothing$.

Рассмотрим два множества: $J_a = \{i \in \omega : a_i \in W, b_i \notin g(W)\}$ и $J_b = \{i \in \omega : a_i \notin W, b_i \in g(W)\}$. Множества J_a и J_b – конечные, так как мы имеем дело со сходящимися последовательностями.

Для каждого $i \in J_a$ выберем открыто-замкнутую окрестность Q_i точки a_i таким образом, чтобы $Q_i \subset W$ и $Q_i \cap S(a) = \{a_i\}$. При этом можно считать, что множества $\{Q_i : i \in J_a\}$ попарно не пересекаются, так как последовательность $\{a_n : n \in \omega\}$ состоит из попарно различных точек.

[1] Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Возможны два случая в зависимости от того, принадлежит точка $g(a_i)$ множеству $S(b)$ или нет. Поэтому $J_a = J_{a1} \cup J_{a2}$, где $J_{a1} = \{i \in J_a : g(a_i) \notin S(b)\}$ и $J_{a2} = \{i \in J_a : g(a_i) \in S(b)\}$.

Первый случай: $i \in J_{a1}$. Тогда легко найти такую открыто-замкнутую окрестность D_i точки a_i, что $D_i \subset Q_i$ и $g(D_i) \cap S(b) = \varnothing$. В этом случае положим $g_i = g$.

Второй случай: $i \in J_{a2}$, т.е. $g(a_i) = b_j$ для некоторого индекса j. Так как X – не дискретное пространство, а множество $g(Q_i) \cap S(b)$ – конечное, то найдется точка $c_i \in Q_i$, для которой $g(c_i) \notin S(b)$. Зафиксируем гомеоморфизм $\psi_i : X \to X$, переводящий точку a_i в точку c_i. Выберем открыто-замкнутую окрестность $D_i \subset Q_i$ точки a_i таким образом, чтобы $D_i \cup \psi_i(D_i) \subset Q_i$, $D_i \cap \psi_i(D_i) = \varnothing$ и $g(\psi_i(D_i)) \cap S(b) = \varnothing$. Определим отображение $g_i : X \to X$ по правилу:

$$g_i(x) = \begin{cases} g \circ \psi_i(x), \text{ если } x \in D_i, \\ g \circ \psi_i^{-1}(x), \text{ если } x \in \psi_i(D_i), \\ g(x), \text{ если } x \in X \setminus (D_i \cup \psi_i(D_i)). \end{cases}$$

Несложно проверить, что отображение g_i является гомеоморфизмом и $g_i(D_i) \cap S(b) = \varnothing$.

Определим отображение $g^* : X \to X$ по правилу:

$$g^*(x) = \begin{cases} g_i(x), \text{ если } x \in D_i \text{ для некоторого } i \in J_a, \\ g(x), \text{ если } x \in X \setminus \bigcup\{D_i : i \in J_a\}. \end{cases}$$

Несложно проверить, что g^* – гомеоморфизм. По построению, $W^* = W \setminus \bigcup\{D_i : i \in J_a\}$ – открыто-замкнутая окрестность точки a. При этом $g^*(a) = b$ и $S(b) \cap g(W) = S(b) \cap g^*(W^*)$.

Отметим, что если $J_a = \varnothing$, то полагаем $W^* = W$ и $g^* = g$.

Аналогично, для каждого $i \in J_b$ выберем открыто-замкнутую окрестность E_i точки b_i таким образом, чтобы $E_i \subset g^*(W^*)$, $E_i \cap S(b) = \{b_i\}$, $S(a) \cap h_i^{-1}(E_i) = \varnothing$, а сами множества $\{E_i : i \in J_b\}$ попарно не пересекались бы. При этом гомеоморфизм $h_i : X \to X$ определяется через g^* тем же способом, как был построен гомеоморфизм g_i на основе отображения g.

Множество $V = W^* \setminus \bigcup\{h_i^{-1}(E_i) : i \in J_b\}$ – искомая открыто-замкнутая окрестность точки a.

Сначала рассмотрим отображение $h : X \to X$, определенное по формуле:

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x), \text{ если } x \in h_i^{-1}(E_i) \text{ для некоторого } i \in J_b, \\ g^*(x), \text{ если } x \in X \setminus \bigcup\{h_i^{-1}(E_i) : i \in J_b\}. \end{cases}$$

Затем определим отображение $f : X \to X$ по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} h(x), \text{ если } x \in V, \\ h^{-1}(x), \text{ если } x \in h(V), \\ x, \text{ если } x \in X \setminus (V \cup h(V)). \end{cases}$$

Рутинная проверка показывает, что отображение f – искомое. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть X – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве X даны две сходящиеся последовательности точек $\{a_n : n \in \omega\}$ и $\{b_n : n \in \omega\}$, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и $S(a) \cap S(b) = \varnothing$.*

Тогда существует такой гомеоморфизм $f : X \to X$, что $f \circ f = id_X$, $f(a) = b$ и $f(a_n) = b_n$ для любого $n \in \omega$.

Доказательство. Возьмем убывающую базу $\{U_n^* : n \in \omega\}$ в точке a, образованную открыто-замкнутыми множествами. По лемме 1 существуют открыто-замкнутая окрестность U_0 точки a и гомеоморфизм $g_0 : X \to X$, такие, что: $U_0 \subset U_0^*$, $g_0(a) = b$, $g_0(U_0) \cap U_0 = \varnothing$, $g_0 \circ g_0 = id_X$, $g_0(x) = x$ для любой точки $x \notin U_0$ и $\forall i (a_i \in U_0 \Leftrightarrow b_i \in g_0(U_0))$. Продолжая этот процесс по индукции, для любого $n \geq 1$ построим открыто-замкнутую окрестность U_n точки a и гомеоморфизм $g_n : X \to X$, такие, что: $U_n \subset U_n^* \cap U_{n-1}$, $g_n(a) = b$, $g_n(U_n) \cap U_n = \varnothing$, $g_n \circ g_n = id_X$, $g_n(x) = x$ для любой точки $x \notin U_n$ и $\forall i(a_i \in U_n \Leftrightarrow b_i \in g_n(U_n))$. Ясно, последовательность множеств $\{U_n : n \in \omega\}$ образует убывающую базу в точке a, а последовательность $\{g_n(U_n) : n \in \omega\}$ образует базу в точке b. Для любого $n \in \omega$ определим множество индексов $J_n = \{i \in \omega : a_i \notin U_n\}$.

Для каждого $j \in \omega$ зафиксируем гомеоморфизм $\chi_j : X \to X$, для которого $\chi_j(a_j) = b_j$. Возьмем открыто-замкнутую окрестность O_j точки a_j. Тогда $\chi_j(O_j)$ – открыто-замкнутая окрестность точки b_j. Без ограничения общности можно считать, что множества $\{O_j : j \in \omega\}$ и $\{\chi_j(O_j) : j \in \omega\}$ попарно не пересекаются, $\lim_{j\to\infty} O_j = \{a\}$, $\lim_{j\to\infty} \chi_j(O_j) = \{b\}$, $O_j \subset U_k \setminus U_{k+1}$ и $\chi_j(O_j) \subset g_k(U_k) \setminus g_{k+1}(U_{k+1})$, если точка $a_j \subset U_k \setminus U_{k+1}$ для некоторого $k \in \omega$.

Для любого $n \in \omega$ множество J_n конечно, поэтому два множества $V_n = U_n \cup \bigcup\{O_j : j \in J_n\}$ и $W_n = g_n(U_n) \cup \bigcup\{\chi_j(O_j) : j \in J_n\}$ открыто-замкнуты в X, причем $S(a) \subset V_n$, $S(b) \subset W_n$, $V_{n+1} \subset V_n$, $W_{n+1} \subset W_n$ и $V_n \cap W_n = \varnothing$. Более того, $f_n(V_n) = W_n$ для гомеоморфизма $f_n : X \to X$, определенного индуктивно следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x), \text{ если } x \in U_n, \\ g_n^{-1}(x), \text{ если } x \in g_n(U_n), \\ \chi_j(x), \text{ если } x \in O_j \text{ для некоторого } j \in J_n, \\ \chi_j^{-1}(x), \text{ если } x \in \chi_j(O_j) \text{ для некоторого } j \in J_n, \\ x, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $f_n \circ f_n = id_X$.

Определим отображение $f : X \to X$ по правилу $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. В частности, $f(a) = b$ и $f(b) = a$. Покажем, что это определение корректно. Действительно, так как $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = \{a\}$ и $\bigcap\{g_n(U_n) : n \in \omega\} = \{b\}$, то для точки $x \in X \setminus \{a,b\}$ найдется n, для которого $x \notin U_n \cup g_n(U_n)$. Тогда $f_{n+1}(x) = f_n(x)$; поэтому предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ всегда существует. Несложно проверить, что f – искомый гомеоморфизм. Теорема 1 доказана.

Точка a называется *точкой накопления* множества A в пространстве X, если $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$, где чертой сверху обозначается замыкание в X. Множество A^d всех точек накопления множества A называется *производным множеством* множества A. Для $n \in \omega$ определим по индукции *производное множество* $A^{(n)}$ *порядка* n множества A по правилу: $A^{(0)} = A$ и $A^{(n+1)} = (A^{(n)})^d$. Говорят, что множество A имеет *ранг* n, если $A^{(n-1)} \neq \varnothing$, а $A^{(n)} = \varnothing$. Если $A^{(n)} = \varnothing$ для некоторого $n \in \omega$, то говорят, что множество A имеет *конечный ранг*.

Следующая теорема усиливает результат теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть X – нульмерное однородное пространство с первой аксиомой счётности. Пусть в пространстве X даны два счётных непересекающихся гомеоморфных компактных множества A и B конечного ранга. Тогда любой гомеоморфизм $g : A \to B$ продолжается до гомеоморфизма $f : X \to X$, удовлетворяющего условию $f \circ f = id_X$.*

Доказательство. Если X – дискретное пространство, то A и B – конечные множества первого ранга. В этом случае несложно построить нужный гомеоморфизм f.

Рассмотрим случай, когда пространство X не дискретное. Тогда A и B – нигде не плотные множества. Доказательство проведем индукцией по рангу n множеств A и B.

База индукции: $n = 1$. Так как $A^{(1)} = B^{(1)} = \varnothing$, то A и B – дискретные конечные множества. Значит, $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, где $b_i = g(a_i)$ для $1 \leq i \leq k$. По определению, для каждого i существует такой гомеоморфизм $f_i : X \to X$, что $f_i(a_i) = b_i$. Найдем попарно непересекающиеся открыто-замкнутые окрестности U_i и V_i точек a_i и b_i соответственно. При этом можно считать, что $f_i(U_i)=V_i$. Требуемый гомеоморфизм $f: X \to X$ определим по правилу:

$$f(x)=\begin{cases} f_i(x), \text{ если } x\in U_i \text{ для некоторого } i, \\ f_i^{-1}(x), \text{ если } x\in V_i \text{ для некоторого } i, \\ x, \text{ если } x\in X\setminus\bigcup\{U_i\cup V_i : 1\le i\le k\}. \end{cases}$$

Допустим, что утверждение верно для любых множеств ранга не больше, чем n. Возьмем множества A и B ранга $n+1$. Тогда ранг множеств $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ равен n. Ясно, что $g(A^{(1)})=B^{(1)}$. По индуктивному предположению существует продолжение гомеоморфизма g до гомеоморфизма $h: X\to X$, для которого $h\circ h=id_X$, $h(B^{(1)})=A^{(1)}$ и $h(A^{(1)})=B^{(1)}$. Занумеруем точки множества $A\setminus A^{(1)}$ в последовательность $\{a_m : m\in\omega\}$. Тогда $B\setminus B^{(1)}=\{g(a_m): m\in\omega\}$. Применяя рассуждения как в доказательстве леммы 1, можно считать, что $g(a_m)\ne h(a_k)$ для любых индексов m и k. Тогда $h(A\setminus A^{(1)})\bigcap B=\varnothing$ и $h(B\setminus B^{(1)})\bigcap A=\varnothing$. Для любого $m\in\omega$ зафиксируем гомеоморфизм $\chi_m : X\to X$, переводящий точку a_m в точку $g(a_m)$. Множество $A\bigcup h(A)\bigcup B\bigcup h(B)$ нигде не плотно в X, поэтому существуют такие открыто-замкнутые окрестности U_m и $V_m=\chi_m(U_m)$ точек a_m и $g(a_m)$ соответственно, что множества U_m, V_m, $h(U_m)=h^{-1}(U_m)$ и $h(V_m)=h^{-1}(V_m)$ попарно не пересекаются, а также не пересекаются с множеством $A^{(1)}\bigcup B^{(1)}$. Более того, так как $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ – компактные множества, то можно считать, что последовательность $\{U_{m_j} : j\in\omega\}$ сходится к точке $a^*\in A^{(1)}$ $\Leftrightarrow$ последовательность $\{V_{m_j} : j\in\omega\}$ сходится к точке $g(a^*)=h(a^*)\in B^{(1)}$ $\Leftrightarrow$ последовательность множеств $\{h(V_{m_j}) : j\in\omega\}$ сходится к точке $a^*=h\circ h(a^*)\in A^{(1)}$. Определим искомое отображение f следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} \chi_m(x), \text{ если } x\in U_m \text{ для некоторого } m, \\ \chi_m^{-1}(x), \text{ если } x\in V_m \text{ для некоторого } m, \\ h\circ\chi_m^{-1}\circ h(x), \text{ если } x\in h^{-1}(V_m) \text{ для некоторого } m, \\ h^{-1}\circ\chi_m\circ h^{-1}(x), \text{ если } x\in h(U_m) \text{ для некоторого } m, \\ h(x), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Индуктивный переход закончен. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим вопрос о продолжении гомеоморфизма $g: A\to B$ между двумя замкнутыми множествами A и B в пространстве X до гомеоморфизма $f: X\to X\setminus A$.

Лемма 2. *Пусть в топологическом пространстве X даны такие две последовательности $\{U_n : n\in\omega\}$ и $\{V_n : n\in\omega\}$ открыто-замкнутых множеств, что:*

1) $U_0\supset U_1\supset\ldots\supset U_n\supset\ldots$,
2) $U_0\bigcap V=\varnothing$, *где* $V=\bigcup\{V_n : n\in\omega\}$,
3) *семейство множеств* $\{V_n : n\in\omega\}$ *дискретно в пространстве X,*
4) *для любого* $n\in\omega$ *существует гомеоморфизм* $g_n : U_n\to V_n$.

Тогда для множества $A=\bigcap\{U_n : n\in\omega\}$ *существует такой гомеоморфизм* $f: X\to X\setminus A$, *что* $f(A)=g_0(A)\subset V_0$.

Доказательство. Определим отображение $f: X\to X\setminus A$ по правилу:

$$f(x)=\begin{cases} g_0(x), \text{ если } x\in U_0, \\ g_{n+1}\circ g_n^{-1}(x), \text{ если } x\in g_n(U_{n+1}) \text{ для } n\in\omega, \\ g_n^{-1}(x), \text{ если } x\in V_n\setminus g_n(U_{n+1}) \text{ для } n\in\omega, \\ x, \text{ если } x\notin U_0\bigcup V. \end{cases}$$

Учитывая, что $U_0\setminus A=\oplus\{U_n\setminus U_{n+1}:n\in\omega\}$ и $f(V_n)=(U_n\setminus U_{n+1})\bigcup V_{n+1}$ для любого $n\in\omega$, несложно проверить, что f взаимно однозначно отображает пространство X на $X\setminus A$. Так как множества $g_n(U_{n+1})$ и $V_n\setminus g_n(U_{n+1})$ открыто-замкнуты в V_n (следовательно, и в X), множество $U_0\bigcup V$ открыто-замкнуто в X, а каждое отображение g_n является гомеоморфизмом, то и отображение f будет гомеоморфизмом. По построению, $f(A)=g_0(A)\subset V_0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть в нульмерном однородном не псевдокомпактном пространстве X с первой аксиомой счётности даны две разные точки a и b. Тогда существует такой гомеоморфизм $f:X\to X\setminus\{a\}$, что $f(a)=b$.*

Доказательство. Так как пространство X нульмерное и не псевдокомпактное, то в X существует счётная дискретная система $\{W_n:n\in\omega\}$, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Ясно, что $W=\bigcup\{W_n:n\in\omega\}$ является открыто-замкнутым множеством в X. Без ограничения общности можно считать, что $a\notin W$ и $b\in W_0$. В точке a зафиксируем убывающую базу $\{U_n^*:n\in\omega\}$, состоящую из открыто-замкнутых множеств и удовлетворяющую условию $W\bigcap U_0^*=\varnothing$.

Так как пространство X однородное, то существует гомеоморфизм $g_0:X\to X$, переводящий точку a в точку b. Найдем такую открыто-замкнутую окрестность U_0 точки a, что $U_0\subset U_0^*$ и $V_0=g_0(U_0)\subset W_0$. Далее, по индукции, для каждого $n\geq 1$ найдем гомеоморфизм $g_n:X\to X$ и открыто-замкнутую окрестность U_n точки a согласно следующим условиям: $U_n\subset U_{n-1}\bigcap U_n^*$ и множество $V_n=g_n(U_n)$ открыто-замкнуто в W_n. Очевидно, что $\bigcap\{U_n:n\in\omega\}=\{a\}$. Для завершения доказательства теоремы 3 остаётся применить лемму 2.

Следствие 1. *Пусть дано нульмерное однородное не псевдокомпактное пространство X с первой аксиомой счётности. Тогда X – сжимаемое пространство.*

Лемма 3. *Пусть в нульмерном однородном пространстве X дана открыто-замкнутая окрестность U^* компактного счётного множества A и дана дискретная система $\{W_i:i\in\omega\}$, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда существуют такие открыто-замкнутые гомеоморфные множества $U\subset U^*$ и $V\subset\bigcup\{W_i:i\in\omega\}$, что $A\subset U$.*

Доказательство. По условию, множество $A=\bigcup\{a_i:i\in\omega\}$. Для каждого индекса i выберем точку $b_i\in W_i$ и гомеоморфизм $g_i:X\to X$, переводящий точку a_i в точку b_i. Найдем открыто-замкнутую окрестность U_i точки a_i, удовлетворяющую условиям: $U_i\subset U^*$ и $g_i(U_i)\subset W_i$. Из покрытия $\{U_i:i\in\omega\}$ компакта A можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_i:i\leq k\}$. Заменяя множество U_i на множество $U_i\setminus\bigcup\{U_j:j<i\}$, можно считать, что семейство $\{U_i:i\leq k\}$ состоит из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств. Тогда множества $U=\bigcup\{U_i:i\leq k\}$ и $V=\bigcup\{g_i(U_i):i\leq k\}$ – искомые. Лемма 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть X – нульмерное однородное не псевдокомпактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве X даны два счётных непересекающихся гомеоморфных компактных множества A и B конечного ранга. Тогда существует такой гомеоморфизм $f:X\to X\setminus A$, что $f(A)=B$.*

Доказательство. Так как пространство X не псевдокомпактное, то в X существует счётное дискретное семейство, состоящее из открыто-замкнутых множеств, не пересекающихся с $A\bigcup B$. Занумеруем это семейство как $\{W_{ni}:n\geq 1, i\in\omega\}$. Положим $W=\bigcup\{W_{ni}:n\geq 1, i\in\omega\}$.

По теореме 2 возьмём гомеоморфизм $g: X \to X$, для которого $g(A) = B$. Так как A и B – непересекающиеся компакты, то существует открыто-замкнутая окрестность U_0 множества A, для которой выполняются условия: $B \subset g(U_0)$, $U_0 \cap W = \varnothing$, $g(U_0) \cap W = \varnothing$ и $U_0 \cap g(U_0) = \varnothing$.

С помощью леммы 3 для любого $n \geq 1$ построим по индукции открыто-замкнутые множества U_n, V_n и гомеоморфизм $g_n: U_n \to V_n$, так, чтобы $A \subset U_n$, $U_{n+1} \subset U_n$ и $V_n \subset \bigcup\{W_{ni} : i \in \omega\}$. При этом можно считать, что $A = \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$, так как пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности. Теперь теорема 4 вытекает из леммы 2.

Замечание. Если бы теорему 2 удалось доказать для произвольных счётных компактных множеств, то теорема 4 выполнялась бы для счётных компактных множеств произвольного ранга.

Теорема 5. *Пусть X – нульмерное однородное не псевдокомпактное и не дискретное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Тогда для любого счётного компактного множества Z конечного ранга существует такое расширение X^* пространства X, что нарост $X^* \setminus X$ гомеоморфен множеству Z, а само расширение X^* гомеоморфно X.*

Доказательство. Применяя индукцию по рангу множества Z, несложно проверить, что пространство X содержит два замкнутых непересекающихся множеств A и B, каждое из которых гомеоморфно Z. По теореме 4 существует такой гомеоморфизм $f: X \to X \setminus A$, что $f(A) = B$. Тогда множество $X \setminus A$ гомеоморфно X и всюду плотно в X. Полагая $X^* = f^{-1}(X \setminus A)$, получаем нужное расширение пространства X.

Литература

1. van Douwen, E.K. A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic / E.K. van Douwen // Adv. in Math. – 1984. – Vol. 52. – Issue 1. – P. 1–33.
2. Engelking, R. General topology / R. Engelking. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 540 p.

ABOUT EXTENSION OF HOMEOMORPHISMS OVER ZERO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES

***S.V. Medvedev*[1]**

Let X be a zero-dimensional homogeneous space satisfying the first axiom of countability. We prove the theorem about an extension of a homeomorphism g: $A \to B$ to a homeomorphism f: $X \to X$, where A and B are countable disjoint compact subsets of the space X. If, additionally, X is a non-pseudocompact space, then the homeomorphism g is extendable to a homeomorphism f: $X \to X \setminus A$.

Keywords: homogeneous space, homeomorphism, first axiom of countability, pseudocompact space.

References

1. van Douwen E.K. A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic. *Adv. in Math.* 1984. Vol. 52. Issue 1. pp. 1–33.
2. Engelking R. *General topology*. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. 540 p.

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

[1] Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University
E-mail medv@math susu ac ru