УДК 519.8

# ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РИСКАМ И СОЖАЛЕНИЯМ СИТУАЦИЯХ В ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

*Н.Г. Солдатова*[1]

**Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц. Качество функционирования игроков оценивается четырехкомпонентным векторным критерием, где учитываются исход (выигрыш), риск и сожаления игроков. Рассмотрены понятия оптимальных ситуаций бескоалиционной игры «с точки зрения» таких векторных оценок. Приведен пример. На основе принципа гарантированного результата и функции сожаления, введенной Сэвиджем, формализовано решение рассматриваемой игры. Установлено существование данного решения.**

*Ключевые слова: стратегия, равновесие по Нэшу, максимин, сожаление по Сэвиджу, риск по Вальду.*

**Введение.** Рассмотрим математическую модель конфликта, которая представляет собой бескоалиционную игру двух лиц с дополнительным учетом рисков и сожалений [1, 2]:

$$\left\langle \{X_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{f_i(x_1,x_2), \varphi_i(x_1,x_2), R_V^i(x_i), R_S^i(x_i)\}_{i\in\{1,2\}} \right\rangle. \tag{1}$$

В (1) предполагаем, что каждый $i$-ый игрок выбирает «свою» стратегию $x_i \in X_i \subseteq comp\mathbf{R}^{n_i}$; в результате возникает ситуация $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$; скалярные функции $f_i(x_1,x_2)$ ($i\in\{1,2\}$) выигрыша игроков предполагаются непрерывными на произведении компактов $X_1\times X_2$.

*Ситуационное сожаление по Сэвиджу для i-го игрока* определим как

$$\varphi_i(x) = \max_{x_i\in X_i} f_i(x_1,x_2) - f_i(x_1,x_2) \quad (i\in\{1,2\}).$$

*Стратегический риск по Вальду i-го игрока* положим

$$R_V^i(x_i) = \max_{x_i\in X_i}\min_{x_k\in X_k} f_i(x_1,x_2) - \min_{x_k\in X_k} f_i(x_1,x_2) \quad (i,k\in\{1,2\}, i\neq k).$$

*Стратегическое сожаление по Сэвиджу*

$$R_S^i(x_i) = \max_{x_k\in X_k} \varphi_i(x_1,x_2) - \min_{x_i\in X_i}\max_{x_k\in X_k} \varphi_i(x_1,x_2) \quad (i,k\in\{1,2\}, i\neq k).$$

Отметим, что риск по Вальду $R_V^i(x_i)$ и сожаление по Сэвиджу $R_S^i(x_i)$ для каждого из игроков ($i\in\{1,2\}$) определены как стратегические, то есть являются скалярными функциями только от выбранной стратегии $x_i\in X_i$. Вследствие непрерывности функций $f_i(x_1,x_2)$ и компактности множеств $X_i$ все указанные максимумы и минимумы существуют, причем функции $\varphi_i(x_1, x_2)$, $R_V^i(x_i)$, $R_S^i(x_i)$ ($i\in\{1,2\}$) будут непрерывными.

В игре (1) игрок $i$ оценивает ситуацию $(x_1, x_2)$ векторным критерием

$$\left(f_i(x_1,x_2), \varphi_i(x_1,x_2), R_V^i(x_i), R_S^i(x_i)\right), \tag{2}$$

причем значение первой компоненты $f_i(x_1, x_2)$ он стремится (за счет выбора $x_i \in X_i$) максимизировать, а значения остальных компонент желает получить возможно меньшими.

**1. Оптимальные стратегии с учетом рисков и сожалений.** Исследуем: каковы значения компонент векторных оценок (2) при условии оптимальности стратегий игроков?

Общепринятым понятием оптимальности в бескоалиционной игре является концепция равновесия (по Нэшу). Именно, пусть бескоалиционная игра двух лиц в нормальной форме описывается упорядоченным набором:

$$\left\langle \{X_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{f_i(x_1,x_2)\}_{i\in\{1,2\}} \right\rangle, \tag{3}$$

где каждый $i$-й игрок оценивает ситуацию $(x_1,x_2)$ данной игры значением «своей» скалярной функции выигрыша $f_i(x_1,x_2)$.

[1] Солдатова Наталья Геннадьевна – старший преподаватель, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт E-mail solnata@pochta.ru

*Утверждение 1.* Если в бескоалиционной игре двух лиц (3) ситуация $(x_1^e, x_2^e)$ является равновесной (по Нэшу), то есть

$$\begin{cases} f_1(x_1^e, x_2^e) \geq f_1(x_1, x_2^e) & \forall x_1 \in X_1, \\ f_2(x_1^e, x_2^e) \geq f_2(x_1^e, x_2) & \forall x_2 \in X_2, \end{cases}$$

то ситуационные сожаления по Сэвиджу в ситуации равновесия $(x_1^e, x_2^e)$ равны нулю. Верно и обратное, если $\varphi_i(x_1^*, x_2^*) = 0$ ($i \in \{1,2\}$), то ситуация $(x_1^*, x_2^*)$ будет равновесной по Нэшу.

Данное утверждение сразу следует из определений равновесия по Нэшу и ситуационных сожалений по Сэвиджу.

*Утверждение 2.* Пусть в бескоалиционной игре двух лиц (3) стратегия первого игрока $x_1^*$ является максиминной, то есть $\max\limits_{x_1 \in X_1} \min\limits_{x_2 \in X_2} f_1(x_1, x_2) = \min\limits_{x_2 \in X_2} f_1(x_1^*, x_2)$.

Тогда стратегический риск первого игрока $R_V^1(x_1^*) = 0$.

Аналогично, если стратегия второго игрока $x_2^*$ является максиминной, именно

$$\max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2^*),$$

то стратегический риск второго игрока $R_V^2(x_2^*) = 0$.

Также из равенства нулю стратегического риска игрока следует, что его соответствующая стратегия будет максиминной.

*Утверждение 3.* Предположим, что в антагонистической игре $\left\langle \{X_i\}_{i \in \{1,2\}}, f(x_1, x_2) \right\rangle$ функция выигрыша первого игрока $f_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$, функция выигрыша второго игрока $f_2(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$ и ситуация $(x_1^e, x_2^e)$ является равновесной (седловой точкой). Тогда

1) ситуационные сожаления по Сэвиджу в ситуации равновесия равны нулю, то есть $\varphi_i(x_1^e, x_2^e) = 0$ ($i \in \{1,2\}$);

2) стратегические риски по Вальду для равновесных стратегий равны нулю, то есть $R_V^i(x_i^e) = 0$ ($i \in \{1,2\}$);

3) если $(x_{11}^e, x_{21}^e)$ и $(x_{12}^e, x_{22}^e)$ – две равновесные ситуации (седловые точки), то они эквивалентны для обоих игроков «с точки зрения» значений функций выигрыша, то есть $f(x_{11}^e, x_{21}^e) = f(x_{12}^e, x_{22}^e)$.

Таким образом, для любых равновесных ситуаций (седловых точек) $(x_1^e, x_2^e)$ антагонистической игры первые три компоненты векторных оценок $\left(f_i(x_1^e, x_2^e), \varphi_i(x_1^e, x_2^e), R_V^i(x_i^e), R_S^i(x_i^e)\right)$ ($i \in \{1,2\}$) ситуаций $(x_1^e, x_2^e)$ игры для обоих игроков совпадают (с учетом равенства $f_2(x_1^e, x_2^e) = -f_1(x_1^e, x_2^e)$).

Проиллюстрируем «важность» четвертой компоненты векторной оценки ситуаций равновесия антагонистической игры на примере матричной игры.

Рассмотрим конечную (матричную) игру

$$\left\langle X_1 = \left\{x_1^1, \dots, x_1^m\right\}, X_2 = \left\{x_2^1, \dots, x_2^n\right\}, A = \left(a_{ij}\right)\right\rangle \tag{4}$$

с действительной $m \times n$ - матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где стратегия $x_1^i \in X_1$ первого игрока означает выбор $i$-ой строки матрицы $A$, стратегия $x_2^j \in X_2$ второго игрока есть выбор $j$-ого столбца этой же матрицы, значения функций выигрыша игроков в ситуации $(x_1^i, x_2^j)$ определяются элементом $a_{ij}$ матрицы $A = (a_{ij})$, именно,

$$f_1(x_1^i, x_2^j) = f(x_1^i, x_2^j) = a_{ij}, \qquad f_2(x_1^i, x_2^j) = -f(x_1^i, x_2^j) = -a_{ij}. \qquad (5)$$

Формализуем **матричную игру с учетом рисков и сожалений**

$$\Gamma_A = \left\langle \{X_k\}_{k\in\{1,2\}}, A = (a_{ij}), \left\{\Phi_k = \left(\varphi_{ij}^k\right)\right\}_{k\in\{1,2\}}, \left\{R_V^1(x_1^i) R_V^2(x_2^j), R_S^1(x_1^i), R_S^2(x_2^j)\right\}\right\rangle,$$

где $X_1 = \{x_1^1, ..., x_1^m\}$ – множество стратегий первого игрока, $X_2 = \{x_2^1, ..., x_2^n\}$ – совокупность стратегий второго игрока, значения функций выигрыша игроков в ситуации $(x_1^i, x_2^j)$ определены выше.

Определим матрицы ситуационных сожалений игроков и их риски при выборе соответствующих стратегий. Матрица $\Phi_1 = (\varphi_{ij}^1)$ ситуационных сожалений по Сэвиджу для первого игрока вычисляется следующим образом:

$$\varphi_{ij}^1 = \varphi_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{x_1^i \in X_1} f_1(x_1^i, x_2^j) - f_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{i\in\{1,...,m\}} a_{ij} - a_{ij},$$

для второго игрока компоненты матрицы $\Phi_2 = (\varphi_{ij}^2)$ ситуационных сожалений по Сэвиджу есть

$$\varphi_{ij}^2 = \varphi_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{x_2^j \in X_2} f_2(x_1^i, x_2^j) - f_2(x_1^i, x_2^j) = a_{ij} - \min_{j\in\{1,...,n\}} a_{ij}.$$

Стратегический риск по Вальду для первого игрока при выборе стратегии $x_1^i$ равен

$$R_V^1(x_1^i) = \max_{x_1^i \in X_1} \min_{x_2^j \in X_2} f_1(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_2^j \in X_2} f_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{i\in\{1,...,m\}} \min_{j\in\{1,...,n\}} a_{ij} - \min_{j\in\{1,...,n\}} a_{ij},$$

для второго игрока при реализации стратегии $x_2^j$ стратегический риск по Вальду

$$R_V^2(x_2^j) = \max_{x_2^j \in X_2} \min_{x_1^i \in X_1} f_2(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_1^i \in X_1} f_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{i\in\{1,...,m\}} a_{ij} - \min_{j\in\{1,...,n\}} \max_{i\in\{1,...,m\}} a_{ij}.$$

Стратегическое сожаление по Сэвиджу для первого игрока при выборе стратегии $x_1^i$ равно

$$R_S^1(x_1^i) = \max_{x_2^j \in X_2} \varphi_1(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_1^i \in X_1} \max_{x_2^j \in X_2} \varphi_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{j\in\{1,...,n\}} \varphi_{ij}^1 - \min_{i\in\{1,...,m\}} \max_{j\in\{1,...,n\}} \varphi_{ij}^1,$$

для второго игрока при реализации стратегии $x_2^j$ стратегическое сожаление по Сэвиджу

$$R_S^2(x_2^j) = \max_{x_1^i \in X_1} \varphi_2(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_2^j \in X_2} \max_{x_1^i \in X_1} \varphi_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{i\in\{1,...,m\}} \varphi_{ij}^2 - \min_{j\in\{1,...,n\}} \max_{i\in\{1,...,m\}} \varphi_{ij}^2.$$

Приведем определение седловой точки матричной игры (4). Пусть задана матричная игра (4), где значения функции выигрыша первого игрока в ситуации $(x_1^i, x_2^j)$ определены в (5).

Ситуация $\left(x_1^{i^*}, x_2^{j^*}\right) \in X_1 \times X_2$ является равновесной (седловой точкой игры), если

$$f(x_1^k, x_2^{j^*}) \le f(x_1^{i^*}, x_2^{j^*}) \le f(x_1^{i^*}, x_2^t)$$

для всех стратегий $x_1^k \in X_1$ первого игрока и любой стратегии $x_2^t \in X_2$ второго игрока.

В матричной форме последнее условие имеет вид $a_{kj^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*t}$ для всех $k \in \{1, ..., m\}$, $t \in \{1, ..., n\}$.

*Пример.* Рассмотрим антагонистическую (матричную) игру, в которой у каждого игрока по четыре чистых стратегии. Игра задана матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

В данной игре четыре равновесия $(x_1^2, x_2^2), (x_1^2, x_2^4), (x_1^3, x_2^2), (x_1^3, x_2^4)$, причем в каждой равновесной ситуации выигрыш первого игрока (проигрыш второго) равен двум единицам.

Вычислим стратегические сожаления игроков для равновесных стратегий:

$$R_S^1(x_1^2),\ R_S^1(x_1^3),\ R_S^2(x_2^2),\ R_S^2(x_2^4).$$

Компоненты матрицы $\Phi_S^1 = \left(\varphi_{ij}^1\right)$ сожалений (ситуационных) первого игрока вычисляется по формуле:

$$\varphi_{ij}^1 = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Получаем

$$\Phi_S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\Phi_S^2 = \left(\varphi_{ij}^2\right)$ сожалений второго игрока определяются равенствами:

$$\varphi_{ij}^2 = \max_j(-a_{ij}) - (-a_{ij}) = a_{ij} - \min_j a_{ij},$$

здесь учитываем тот факт, что $f_2(x_1^i, x_2^j) = -a_{ij}$. Поэтому

$$\Phi_S^2 = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно принципу минимаксного сожаления получаем:

$$\min_i \max_j \varphi_{ij}^1 = 4,\ \min_j \max_i \varphi_{ij}^2 = 3.$$

Используя равенства

$$R_S^1(x_1^i) = \max_j \varphi_{ij}^1 - \min_i \max_j \varphi_{ij}^1 \ \text{ и } \ R_S^2(x_2^j) = \max_i \varphi_{ij}^2 - \min_j \max_i \varphi_{ij}^2,$$

находим стратегические сожаления:

$$R_S^1(x_1^2) = 0,\ R_S^1(x_1^3) = 1,\ R_S^2(x_2^2) = 0,\ R_S^2(x_2^4) = 2.$$

Следовательно, существует единственное равновесие $(x_1^2, x_2^2)$ в данной игре, для которого все риски и сожаления каждого игрока нулевые.

## 2. S-оптимальные по рискам и сожалениям равновесные стратегии

Исходной игре (1) поставим в соответствие две двухкритериальные задачи:

$$\Gamma_1 = \left\langle X_1^e, \{-R_V^1(x_1), -R_S^1(x_1)\}\right\rangle,$$

где $X_1^e$ – множество равновесных стратегий первого игрока,

$$\Gamma_2 = \left\langle X_2^e, \{-R_V^2(x_2), -R_S^2(x_2)\}\right\rangle,$$

где $X_2^e$ – множество равновесных стратегий второго игрока.

*Определение 1.* Равновесные стратегии $x_1^e \in X_1^e$ первого и $x_2^e \in X_2^e$ второго игроков в игре (1) назовем s-оптимальными по рискам и сожалениям, если они являются максимальными по Слейтеру для задач $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ соответственно.

*Теорема 1.* Пусть в игре (1) выполнено:

1) множества $X_1$ и $X_2$ выпуклы и компактны;

2) функция $f_1(x_1, x_2)$ непрерывна на $X_1 \times X_2$ и вогнута по $x_1$ при любых фиксированных значениях $x_2 \in X_2$;

3) функция $f_2(x_1,x_2)$ непрерывна на $X_1 \times X_2$ и вогнута по $x_2$ для каждого $x_1 \in X_1$.

Тогда в (1) существуют s-оптимальные равновесные стратегии для каждого игрока.

Данное утверждение следует из достаточных условий существования равновесных ситуаций в бескоалиционной игре двух лиц, компактности множества равновесий по Нэшу и свойств максимальных по Слейтеру решений для многокритериальных задач.

*Теорема 2.* Пусть $x_1^e \in X_1^e$, $x_2^e \in X_2^e$ есть s-оптимальные по рискам и сожалениям равновесные стратегии игроков.

Тогда $x_1^e$ является максиминным по Слейтеру решением [3] четырехкритериальной задачи

$$\Gamma_1^* = \left\langle X_1^e, X_2, \{f_1(x_1,x_2), -\varphi_1(x_1,x_2), -R_V^1(x_1), -R_S^1(x_1)\right\rangle.$$

Соответственно $x_2^e$ будет также максиминным по Слейтеру решением для задачи

$$\Gamma_2^* = \left\langle X_1, X_2^e, \{f_2(x_1,x_2), -\varphi_2(x_1,x_2), -R_V^2(x_2), -R_S^2(x_2)\right\rangle.$$

**Заключение.** Рассмотренные утверждения и пример показывают: добавление рисков и сожалений игроков к их функциям выигрышей позволяет в ряде случаев выделить в игре *единственное равновесие* по Нэшу.


**Литература**

1. Бардин, А.Е. Риски и сожаления игроков в игровых моделях / А.Е. Бардин // Материалы 3-ей международной научно-практической конференции. МГОГИ. Орехово-Зуево. – 2010. – С. 86–89.

2. Бардин, А.Е. Риски и сожаления ЛПР в игре с природой / А.Е. Бардин, Ю.Н. Житенева // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи». Симферополь. – 2012. – Т. 22. – С. 2–5.

3. Zhukovskiy, V.I. The Vector-Valued Maximin / V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze. – N.Y. etc.: Academic Press, 1994. – 282 p.


## ABOUT OPTIMUM ON RISKS AND REGRETS SITUATIONS IN GAME OF TWO PERSONS


***N.G. Soldatova*[1]**



Non-cooperative game of two persons is considered. Quality of functioning of players is estimated by four-component vector criterion. Here an outcome (payoff), risk and regrets of players are considered. Concepts of optimum situations of non-cooperative game from the point of view of the stated vector estimates are considered. The example is given. Solution of game is based on the principle of guaranteed result and function of regret used by Savage. Existence of this solution is established.



*Keywords: strategy, Nash equilibrium, maximin, Savage regret, Wald risk.*



**References**

1. Bardin A.E. Riski i sozhaleniya igrokov v igrovykh modelyakh. Materialy 3-ey mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Risks and regret players in the game models. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference). MGOGI. Orekhovo-Zuevo, 2010. pp. 86–89. (in Russ.).

2. Бардин А.Е., Житенева Ю.Н. Mezhdunarodnyy nauchnyy zhurnal «Spektral'nye i evolyutsionnye zadachi». Simferopol'. 2012. Vol. 22. pp. 2–5. (in Russ.).

3. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin.* N.Y. etc.: Academic Press, 1994. 282 p.



***Поступила в редакцию 1 августа 2013 г.***



[1] Soldatova Natalya Gennadevna is Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities
E-mail solnata@pochta ru