

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Е.В. Табаринцева¹

Рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного дифференциального уравнения. Устойчивое приближенное решение данной нелинейной некорректно поставленной задачи строится методом проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева. Получена точная по порядку оценка погрешности этого метода на одном из классов корректности.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейное дифференциальное уравнение, метод приближенного решения, оценка погрешности.

Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения.

Данная задача поставлена некорректно, поэтому основными вопросами при ее исследовании являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки погрешности приближенного решения.

Для линейных некорректно поставленных задач вопросы построения приближенных решений и оценки погрешности построенных приближенных решений на классах корректности рассматривались, например, в работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., напр., [1–3]). Были введены понятия оптимального и оптимального по порядку метода приближенного решения [1].

Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач [4, 5].

Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset U$, а $C[H]$ – пространство непрерывных отображений, действующих в H .

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_0 u = f; u \in H; f \in H, \quad (1)$$

где $A_0 \in C[H]$ – взаимно-однозначный оператор.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству M , но точное значение правой части нам не известно, а вместо него дано приближенное значение $f_\delta \in H$ такое, что $\|f_0 - f_\delta\| \leq \delta$. Требуется по исходным данным задачи M и f_δ определить приближенное решение уравнения (1) и оценить его отклонение от точного решения.

Определение 1. Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M , если для любого $\delta \in (0; \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство H в H и $T_\delta f_\delta \rightarrow u_0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на множестве M при условии $\|A_0 u_0 - f_\delta\| \leq \delta$.

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ на множестве M :

$$\Delta(T_\delta) = \sup \{ \|u - T_\delta f_\delta\| : u \in M, \|A_0 u - f_\delta\| \leq \delta \}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \sup \{ \|u_1, u_2\| : u_1, u_2 \in M, \|A_0 u_1 - A_0 u_2\| \leq \tau \}$$

¹ Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет
E-mail: eltab@rambler.ru

модуль непрерывности оператора, обратного к A_0 , на множестве A_0M .

Определение 2. Метод $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M , если существует число k такое, что для любого $\delta \in (0; \delta_0]$

$$\Delta(T_\delta) \leq k\omega_1(\delta; M).$$

Различные подходы к приближенному решению нелинейных некорректно поставленных задач предложены и исследованы, например, в монографиях [6–9] и статьях [10, 11].

В настоящей работе предложен метод приближенного решения полулинейной обратной задачи (модификация метода проекционной регуляризации) и доказана его оптимальность по порядку на одном из классов корректности.

1. Задача с обратным временем для дифференциально-операторного уравнения.

Пусть H – гильбертово пространство, A – линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H .

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$, такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); t \in (t_0; T), \quad (2)$$

$$u(t_0) = \varphi, \varphi \in H, 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f : [t_0; T] \times H \rightarrow H$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t , т.е. существуют постоянные $L > 0$, $K > 0$ и $0 < \alpha < 1$, такие,

$$\|f(u_1, t) - f(u_2, t)\|_H \leq L \|u_1 - u_2\|_H$$

для всех $t_1, t_2 \in [t_0; T]$, $u_1, u_2 \in H$.

Зафиксируем число $r > 0$. Рассмотрим множество

$$M = \{\varphi \in D(e^{At_0}) : \|e^{At_0}\varphi\| \leq r\}.$$

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M .

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$, такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его отклонение от точного решения.

Задача Коши (2) равносильна интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (3)$$

(см., напр., [12]).

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \chi_1 - \chi_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2 \| \leq \delta\} -$$

Наряду с нелинейной обратной задачей, рассмотрим соответствующую обратную задачу для линейного уравнения, т.е. задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av; t \in (t_0; T), \quad (2)$$

$$v(t_0) = \varphi, \varphi \in H, 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $v(T) = \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi} \in H$ – заданный элемент.

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \chi_1 - \chi_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для соответствующей линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма (см. [13]).

Лемма. Существует $\delta_0 > 0$, такое, что для всех $\delta < \delta_0$ выполняются неравенства

$$\hat{\omega}(M, e^{-Ll} \delta) \leq \omega(M, \delta) \leq \hat{\omega}(M, e^{Ll} \delta).$$

3. Метод приближенного решения задачи с обратным временем.

Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A . Пусть A_α – линейный ограниченный оператор в H , определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha(t)}{dt} &= -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \\ u^\alpha(T) &= E_\alpha \chi. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha(t)}{dt} &= -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \\ u^\alpha(t_0) &= \varphi_\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\varphi_\alpha = E_\alpha \varphi$.

Так как A_α – ограниченный самосопряженный оператор в H , то задача Коши (5) равносильна интегральному уравнению

$$u^\alpha(t) = e^{-A_\alpha(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^t e^{-A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u^\alpha(\tau)) d\tau. \tag{6}$$

Выполняется

Теорема. Для любого элемента $\chi \in H$ существует элемент $\varphi = \varphi_\alpha \in E_\alpha H$, такой, что решение $u(t)$ задачи Коши (5) удовлетворяет условию $u^\alpha(T) = E_\alpha \chi$.

Доказательство. Рассмотрим решение задачи Коши (5), которое удовлетворяет также интегральному уравнению (6). Из (6) следует, что функция $u^\alpha(t)$ удовлетворяет также уравнению

$$u^\alpha(t) = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u^\alpha(\tau)) d\tau \tag{7}$$

Рассмотрим в пространстве $C([t_0; T] \rightarrow H)$ непрерывных функций на $[0; T]$ со значениями в H норму

$$\|u\|_k = \max_{t_0 \leq t \leq T} e^{-kt} \|u(t)\|_H,$$

эквивалентную норму

$$\|u\|_k = \max_{t_0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H$$

пространства $C([t_0; T] \rightarrow H)$. Рассмотрим оператор P_α , действующий в $C([t_0; T] \rightarrow H)$ по правилу

$$P_\alpha u = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Имеем неравенство (для любых $u_1, u_2 \in C([0; T] \rightarrow H)$)

$$\begin{aligned} \|P_\alpha u_1 - P_\alpha u_2\|_k &\leq L e^{\alpha T} \max_{t_0 \leq t \leq T} \int_t^T e^{-k(t-\tau)} e^{-k\tau} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_H d\tau \leq \\ &\leq L e^{\alpha T} \|u_1 - u_2\|_k \max_{t_0 \leq t \leq T} \int_t^T e^{-k(t-\tau)} d\tau \leq L e^{\alpha T} \frac{1 - e^{-kT}}{k} \|u_1 - u_2\|_k. \end{aligned}$$

Выбирая $k > L e^{\alpha T}$, убеждаемся, что отображение P_α является сжимающим в пространстве $C([t_0; T] \rightarrow H)$ с нормой $\|\cdot\|_k$. Следовательно, уравнение (7) имеет единственное решение в $C([t_0; T] \rightarrow H)$. Обозначим $B_\alpha : H \rightarrow E_\alpha H$ оператор, действующий по правилу

$$B_\alpha \chi = u^\alpha(t_0),$$

где $u^\alpha(t)$ – решение уравнения (7). Тогда

$$\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0) = B_\alpha \chi - \tag{8}$$

искомый элемент, определяемый элементом χ однозначно. Теорема доказана.

4. Оценка погрешности метода проекционной регуляризации.

Обозначим $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ – решение задачи (4); $\varphi_\delta^\alpha = \varphi_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ – решение задачи (4) с приближенными исходными данными. В качестве приближенного решения задачи с обратным временем рассмотрим элемент $\varphi_\delta^{\alpha(\delta)} = P_{\alpha(\delta)} \chi_\delta$ при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Рассмотрим величину

$$\Delta_M(\alpha, \delta) = \sup \{ \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta \},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения задачи (2) на введенном множестве M .

Воспользуемся неравенством

$$\Delta_M(\alpha, \delta) \leq \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta),$$

где

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta} \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha\|;$$

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|\varphi^\alpha - \varphi\|.$$

Оценим величину $\Delta_2(\alpha, \delta)$. Рассмотрим функцию $v_\alpha(t) = e^{(t-t_0)\alpha} u_\alpha(t)$. Функция $v_\alpha(t)$, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = -(A_\alpha - \alpha E)v_\alpha(t) + E_\alpha g_\alpha(t, v_\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T), \tag{9}$$

где $g_\alpha(t, v) = E_\alpha e^{(t-t_0)\alpha} f(t, e^{-(t-t_0)\alpha} v) : [t_0; T] \times H \rightarrow H$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной v и условию Гельдера по переменной t , $t \in [t_0; T]$.

По построению функция $v^\alpha(t)$ удовлетворяет также условиям

$$v^\alpha(t_0) = \varphi_\alpha; \tag{10}$$

$$v^\alpha(T) = e^{(T-t_0)\alpha} \chi. \tag{11}$$

Решение задачи Коши (9), (10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v^\alpha(t) = e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^t e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-\tau)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \tag{12}$$

Из равенства (12) при $t = T$ с учетом (11) следует равенство

$$e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi = e^{-(A_\alpha - \alpha E)(T-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^T e^{-(A_\alpha - \alpha E)(T-\tau)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \tag{13}$$

Из (13) следует

$$e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha = e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi - \int_{t_0}^T e^{-(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в равенство (12), имеем

$$v^\alpha(t) = e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)} e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \quad (15)$$

Аналогично, функция $v_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_\delta^\alpha(t) = e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)} e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi_\delta - \int_t^T e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\delta^\alpha(\tau)) d\tau. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует неравенство

$$\|v^\alpha - v_\delta^\alpha(t)\| \leq \|e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)}\| \|e^{\alpha(T-t_0)}\| \|\chi - \chi_\delta\| + L \int_t^T \|e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)}\| \|v^\alpha - v_\delta^\alpha(\tau)\| d\tau. \quad (17)$$

Из неравенства (17) с учетом леммы Гронуолла и неравенства

$$\|e^{(\lambda - \alpha)(T-t)}\| \leq \max_{0 \leq \lambda \leq \alpha} e^{(\lambda - \alpha)(T-t)} \leq 1$$

следует

$$\|v^\alpha(t) - v_\delta^\alpha(t)\| \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{L(T-t)} \delta,$$

откуда при $t = t_0$

$$\|\varphi^\alpha - \varphi_\delta^\alpha\| \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{L(T-t_0)} \delta.$$

Следовательно, для величины $\Delta_2(\alpha, \delta)$ имеем оценку

$$\Delta_2(\alpha, \delta) \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{LTe^{LT}} \delta \quad (18)$$

Оценим величину $\Delta_1(\alpha)$. Рассмотрим функцию $u(t)$, удовлетворяющую интегральному уравнению (3) и функцию $u_\alpha(t)$, удовлетворяющую (6) и функцию $\bar{u}(t) = E_\alpha u(t)$. Рассмотрим равенство

$$\bar{u}(t) = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(\tau-t)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (19)$$

Из (3) следует равенство

$$\chi = e^{-A(T-t_0)} \varphi + \int_{t_0}^T e^{-A(T-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

Подставляя выражение (20) в равенство (6) и учитывая, что $e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha = e^{A(T-t)} E_\alpha$, имеем равенство

$$u^\alpha(t) = e^{-A(t-t_0)} E_\alpha \varphi + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_t^T e^{-A(t-\tau)} E_\alpha (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau))) d\tau. \quad (21)$$

С учетом равенства (19) из (21) следует

$$u^\alpha(t) - u(t) = E_\alpha u(t) - u(t) + \int_t^T e^{-A(t-\tau)} E_\alpha (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau))) d\tau \quad (22)$$

Из (22) с учетом неравенства $\|e^{A(\tau-t)} E_\alpha\| \leq e^{\alpha(\tau-t)}$ следует

$$e^{-\alpha(T-t)} \|u^\alpha(t) - u(t)\| \leq e^{-\alpha(T-t)} \|E_\alpha u(t) - u(t)\| + L \int_t^T e^{-\alpha(T-\tau)} \|u^\alpha(\tau) - u(\tau)\| d\tau. \quad (23)$$

Из (23) в силу леммы Гронуолла

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\| \leq e^{L(T-t_0)} \|E_\alpha u(t) - u(t)\|.$$

Следовательно,

$$\Delta_1(\alpha) \leq e^{L(T-t_0)} \sup\{\|\varphi - E_\alpha \varphi\|: \varphi \in M\} = e^{L(T-t_0)} \Delta_1(\alpha) \leq e^{L(T-t_0)} r e^{-\alpha t_0}.$$

Выберем зависимость $\alpha = \alpha^1(\delta)$. из условия

$$e^{\alpha(T-t_0)} \delta = e^{LT} r e^{-\alpha t_0} \quad (24)$$

(см. [14]). Из (24) следует, что

$$\alpha^1(\delta) = \frac{1}{T} \ln(re^{L(T-t_0)}/\delta).$$

Таким образом, оценка погрешности метода проекционной регуляризации на множестве M с выбором параметра регуляризации из условия (24) имеет вид

$$\Delta_M(\alpha^1(\delta), \delta) \leq e^{L(T-t_0)} r^{-1} \delta^{T-t_0}. \quad (25)$$

Так как модуль непрерывности для полулинейной обратной задачи на множестве M удовлетворяет неравенству

$$\omega(M, \delta) \leq e^{L(T-t_0)} r^{-1} \delta^{T-t_0}$$

(см. [13]), то из оценки (25) следует теорема.

Теорема. Метод проекционной регуляризации приближенного решения задачи с обратным временем, определенный равенством (8), оптимален по порядку на множестве M .

Литература

1. Иванов, В.К. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Страхов, В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В.Н. Страхов // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1490–1495.
3. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филингов. – М.: Наука, 1995. – 176 с.
4. Танана, В.П. Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач / В.П. Танана // ЖВМиМФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 503–507.
5. Танана, В.П. О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений / В.П. Танана // Сиб. журнал индустр. математики. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 119–133.
6. Тихонов, А.Н. Нелинейные некорректные задачи / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1995. – 312 с.
7. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Анеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.
8. Кокурин, М.Ю. Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач // М.Ю. Кокурин. – Йошкар-Ола, Изд. Марийского гос. Ун-та, 1998. – 292 с.
9. Tanana, V.P. Methods for solving of nonlinear operator equations / V.P. Tanana. – Utrecht, VSP, 1997. – 241 p.
10. Табаринцева, Е.В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 259–271.
11. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.
12. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
13. Табаринцева, Е.В. Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 253–257
14. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики // М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1962. – 92 с.

**ABOUT SOLVING OF AN ILL-POSED PROBLEM FOR A NONLINEAR
DIFFERENTIAL EQUATION BY MEANS OF THE PROJECTION REGULARIZATION
METHOD**E.V. Tabarintseva¹

A retrospective inverse problem for a semi-linear differential equation is studied. The projection regularization method with the choice of the regularization parameter by means of M.M. Lavrentiev scheme is used to find a stable approximate solution to the ill-posed problem under consideration. An explicit evaluation of inaccuracy of this method was measured on one of the cases of robustness.

Keywords: inverse problem, nonlinear differential equation, approximate method, evaluation of inaccuracy.

References

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektno postavlennykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problem and its applications). Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russ.).
2. Strakhov V.N. *Differentsial'nye uravneniya*. 1970. Vol. 6, no. 8. pp. 1490–1495.
3. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* (Differential and operator equations and ill-posed problems). Moscow: Nauka, 1995. 176 p. (in Russ.).
4. Tanana V.P. Optimal order methods of solving non-linear ill-posed problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1976. Vol. 16, no. 2. pp. 219–225.
5. Tanana V.P. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2003. Vol. 6, № 3. pp. 119–133. (in Russ.).
6. Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. *Nelineynye nekorrektnye zadachi* (Non-linear ill-posed problems). Moscow: Nauka, 1995. 312 p. (in Russ.).
7. Vasin V.V., Aneev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoy informatsiyey* (Ill-posed problems with prior information). Ekaterinburg: Nauka, 1993. 262 p. (in Russ.).
8. Kokurin M.Yu. *Operatornaya regulyariizatsiya i issledovanie nelineynykh monotonykh zadach* (Operator regularization and the study of non-linear monotonic problem). Yoshkar-Ola, Izd. Mariyskogo gosudarstvennogo universiteta, 1998. 292 p.
9. Tanana V.P. *Methods for solving of nonlinear operator equations*. Utrecht, VSP, 1997. 241 p.
10. Tabarintseva E.V. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2005. Vol. 8, no. 3. pp. 259–271. (in Russ.).
11. Tanana V.P., Tabarintseva I.V. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2005. Vol. 8, no. 1. pp. 129–142. (in Russ.).
12. Khenri D. *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Geometrical theory of semilinear parabolic equations). Moscow: Mir, 1985. 376 p. (in Russ.). [Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, 1981. 348 p.]
13. Tabarintseva E.V. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2013. Vol. 19, no. 1. pp. 253–257. (in Russ.).
14. Lavrent'ev M.M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (Some improperly-posed problems in mathematical physics). Novosibirsk: Sibirskoe otdelenie AN SSSR, 1962. 92 p. (in Russ.). [Lavrentiev M.M. *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, Berlin, 2012. 88 p.]

Поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.

¹ Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Computational Mathematics Department, South Ural State University
E-mail: eltab@rambler.ru