УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

В.И. Ухоботов[1], *А.А. Троицкий*[2]

Найдено оптимальное время преследования в линейной дифференциальной игре второго порядка с импульсным управлением. Построены оптимальные управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, импульсное управление, время преследования.

1. Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, в которых допускается мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью, сводятся к задачам с импульсными управлениям [1, стр. 85–87]. Наличие импульсных управлений может приводить к мгновенному изменению фазового состояния системы. Это приводит к специфическим особенностям при исследовании дифференциальных игр с импульсными управлениями [2–6] и, в частности, задачи импульсного преследования [7, 8].

В работе [7] рассмотрена игровая задача, в которой преследователь управляет точкой переменного состава, движущейся только под действием реактивной силы. Убегающий управляет ограниченной по величине скоростью. В работе [8] рассмотрен усложненный вариант задачи, когда на точку переменного состава действует еще сила, пропорциональная скорости.

В данной работе предполагается, что на каждую управляемую точку наряду с силой трения, пропорциональной скорости, действует сила, линейно зависящая от координат.

2. Постановка задачи

Движение точки переменного состава описывается уравнением Мещерского [1]

$$\ddot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 \dot{x}_1 + g + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} u .$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^n$; u – вектор относительной скорости отделяющихся частиц, норма $\|u\| = c = \mathrm{const}$; $m(t) = 1 + \dfrac{m_1(t)}{m_0(t)}$, $m_1(t)$ – масса топлива в момент времени t, m_0 – неизменная часть массы.

Эта точка преследует другую управляемую точку, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x}_2 = a_1 x_2 + a_2 \dot{x}_2 + g - v, x_2 \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \le b.$$

Цель преследования заключается в том, чтобы побыстрее осуществить неравенство $\|x_1(t) - x_2(t)\| \le \varepsilon$. Здесь $\varepsilon \ge 0$ – заданное число.

В начальный момент времени имеется начальный запас топлива $m_1(0) \ge 0$, который не может быть перерасходован в процессе управления.

3. Формализация задачи

В переменных $x = x_1 - x_2$, $y = \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \varphi(t) = \ln(m(t))$, сформулированная задача принимает вид

$$\dot{x} = y, \dot{y} = a_1 x + a_2 y + \dot{\varphi}(t) u + v, \tag{1}$$

$$\|x(t)\| \le \varepsilon. \tag{2}$$

[1] Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет

E-mail ukh@csu ru

[2] Троицкий Антон Александрович – аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет

E-mail antonio troitsky@gmail com

Поскольку $m(t)$ убывает, то $\dot{\varphi}(t) \le 0$. Преследователь не может перерасходовать имеющийся запас топлива $m_1(0) \ge 0$. Условие не перерасхода топлива запишем в виде неравенства $m(t) \ge 1$ при $t \ge 0$, которое равносильно

$$\varphi(t) \ge 0 \text{ при } t \ge 0. \tag{3}$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы $m(t)$ в отдельные моменты времени τ может происходить мгновенное отделение конечного количества массы $0 \le \Delta m \le m(\tau) - 1$ со скоростью $u(\tau)$. Это приводит к мгновенному уменьшению скорости [1]

$$y(\tau+0) = y(\tau)u(\tau)\left(\varphi(\tau+0) - \varphi(\tau)\right), \varphi(\tau+0) = \ln\left(m(\tau) - \Delta m\right). \tag{4}$$

Управление убегающего строится в классе произвольных функций $v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих ограничению $\|v(t,x,y)\| \le b$.

Управлением догоняющего является невозрастающая функция $\varphi(t) \ge 0$ при $t \ge 0$ и произвольная функция $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая равенству $\|u(t,x,y)\| = c$. При выборе функции $\varphi(t)$ в отдельные моменты времени осуществляется её коррекция, которая проводится следующим образом. Преследователь в начальный момент времени выбирает набор моментов коррекций $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_q$. В момент времени τ_i, зная реализовавшееся состояние $x(\tau_i), y(\tau_i), \varphi(\tau_i)$, он выбирает при $\tau_i < t \le \tau_{i+1}$ непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, такую, что

$$\varphi(t) \ge 0, \dot{\varphi}(t) \le 0, \varphi(\tau_i + 0) \le \varphi(\tau_i), \tau_i < t \le \tau_{i+1}. \tag{5}$$

С помощью формулы (4) при $\tau = \tau_i$ и при $u = u\left(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i)\right)$ определяет значение скорости $y(\tau_i + 0)$.

Движение, порожденное выбранными управлениями на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, определим с помощью ломаных. С этой целью фиксируем разбиение:

$$\omega: \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$$

с диаметром разбиения

$$d(\omega) = \max_{0 \le j \le k}\left(t^{(j+1)} - t^{(j)}\right)$$

и построим ломаную $x_\omega(t)$, $y_\omega(t)$, $\tau_i < t \le \tau_{i+1}$.

Положим в (1) $u = u\left(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i)\right), v = v\left(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i)\right)$ и найдем решение $x_\omega(t)$, $y_\omega(t)$ при $t^{(0)} < t \le t^{(1)}$ с начальным условием $x_\omega(t^{(0)}) = x(\tau_i)$, $y_\omega(t^{(0)}) = y(\tau + 0)$. Допустим, что при $t^{(0)} < t < t^{(j)}$ определена ломаная. Положим в (1) $u = u^{(j)}, v = v^{(j)}$, где

$$w(j) = w\left(\tau^{(j)}, x_\omega\left(t^{(j)}\right), y_\omega\left(t^{(j)}\right)\right), w = u, v \tag{6}$$

и продлим решение $x_\omega(t), y_\omega(t)$ при $t^{(j)} < t < t^{(j+1)}$. Продолжая этот процесс дальше, построим ломаную при $\tau_i < t \le \tau_{i+1}$.

Можно показать, что все ломаные $x_\omega(t), y_\omega(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [9, стр. 236]. Под движением будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $x_{\omega_k}(t), y_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \to 0$.

Предельные функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют условию Липшица. Поэтому у них почти всюду на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ существуют производные.

Будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. Характеристический многочлен $\lambda^2 - a_2\lambda - a_1 = 0$ матрицы в системе (1) имеет два различных действительных корня, один из которых неотрицателен. Это значит, что $4a_1 + a_2^2 > 0$, а корни равны

$$\lambda_1 = \frac{a_2 + \sqrt{4a_1 + a_2^{\,2}}}{2} \ge 0, \lambda_2 = \frac{a_2 - \sqrt{4a_1 + a_2^{\,2}}}{2}. \tag{7}$$

Предположение 2. Выполнено неравенство

$$b + a_1\varepsilon \ge 0. \tag{8}$$

4. Формулировка результатов

Введем в рассмотрение функции

$$f_1(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right),\ f_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right). \tag{9}$$

Из неравенства $\lambda_1 > \lambda_2$ следует, что функция $f_2(t) > 0$ при $t > 0$ и строго возрастает. Из условия $\lambda_1 \ge 0$ получим, что $\int_0^t f_2(r)dr \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Поэтому при любом числе $\varepsilon \ge 0$ уравнение:

$$\frac{\varepsilon}{b} = \int_0^t f_2(r)dr \tag{10}$$

имеет единственный неотрицательный корень $t = t(\varepsilon)$.

При $t \ge 0$, $\varepsilon \ge 0$ положим

$$g(t,\varepsilon) = \varepsilon - b\int_0^t f_2(r)dr \text{ при } 0 \le t \le t(\varepsilon),$$

$$g(t,\varepsilon) = -(t - t(\varepsilon))bf_2(t) \text{ при } t(\varepsilon) \le t. \tag{11}$$

Обозначим

$$f(t) = f_1(t) + \frac{a_2}{2}f_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) \tag{12}$$

и при

$$0 \le t \le t(\varepsilon) + \frac{c}{b}\varphi(0) = T(\varepsilon,\varphi(0)) \tag{13}$$

положим

$$K(x,y,\varphi(0),\varepsilon,t) = \bigcup_{0\le r\le t}\left(\left(\frac{a_2}{2}x - y\right)\frac{f_2(r)}{f(r)} + \frac{cf_2(r)\varphi(0) + g(r,\varepsilon)}{f(r)}S\right). \tag{14}$$

Здесь обозначено $S = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \le 1\right\}$.

Теорема 1. Пусть начальное состояние таково, что

$$x(0) \notin K\left(x(0), y(0), \varphi(0), \varepsilon, T(\varepsilon,\varphi(0))\right). \tag{15}$$

Тогда убегающий может построить свое управление таким образом, что

$$\|x(t)\| > \varepsilon \text{ при всех } t \ge 0. \tag{16}$$

Пусть в (15) стоит включение. Тогда, как следует из вида множества (14), существует число $0 \le T_0 \le T(\varepsilon,\varphi(0))$, такое, что при $t = T_0$ выполнено включение

$$x(0) \in K\left(x(0), y(0), \varphi(0), \varepsilon, t\right), \tag{17}$$

а при любом $0 \le t < T_0$ включение (11) не выполнено.

Теорема 2. Преследователь может построить свое управление таким образом, что при некотором $0 \le t \le T_0$ будет осуществлена поимка (2) при любом поведении убегающего.

Теорема 3. Для любого числа $0 \le T < T_0$ убегающий может построить свое управление таким образом, что неравенство (16) будет выполнено при всех $0 \le t \le T$ и при любом поведении преследователя.

5. Решение задачи преследования

Рассмотрим начальное состояние $x(0), y(0), \varphi(0) \ge 0$, у которого $\|x(0)\| > \varepsilon$ и в (15) стоит включение. Тогда минимальный корень $p = t$ включения (17) является минимальным неотрицательным корнем уравнения

$$\|f_1(p)x(0) + f_2(p)y(0)\| = cf_2(p)\varphi(0) + g(p,\varepsilon). \tag{18}$$

Обозначим

$$z = f_1(p-t)x + f_2(p-t)y. \tag{19}$$

Из формулы (4) следует, что

$$z(\tau+0) = z(\tau) + u\big(\tau, x(\tau), y(\tau)\big(\varphi(\tau+0) - \varphi(\tau)\big) f_2(p-\tau)\big). \tag{20}$$

Дифференцируя равенство (19) и используя уравнение (1) и формулы (9), получим, что

$$\dot{z} = f_2(p-t)\dot{\varphi}(t)u + f_2(p-t)v, t^{(j)} < t \le t^{(j+1)}, j = \overline{0,k}. \tag{21}$$

Далее, $x(p) = z(p)$.

Преследователь берет

$$u(t,x,y) = cw;\ w = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } z \ne 0 \text{ и любой } \|w\| = 1 \text{ при } z = 0. \tag{22}$$

Пусть $0 < p \le t(\varepsilon)$. Равенство (18) принимает вид

$$\|z(0)\| = cf_2(p)\varphi(0) + \varepsilon - b\int_0^p f_2(r)dr. \tag{23}$$

Преследователь берет $\varphi(t) = 0$ при $0 < t \le p$. Тогда из формулы (20) получим, что

$$z(0+) = z(0) - u\big(0, x(0), y(0)\big)\varphi(0) f_2(p).$$

Подставляя сюда функцию (22), будем иметь $\|z(0+)\| = \big|\|z(0)\| - c\varphi(0) f_2(p)\big|$. Отсюда и из (23) получим, что

$$\|z(0+)\| = \varepsilon - b\int_0^p f_2(r)dr.$$

При выбранном управлении убегающего реализуется движение $x(t)$ и $y(t)$. Подставим его в формулу (19). Получим функцию $z(t)$. Из (21) следует, что $\|\dot{z}(t)\| \le b f_2(p-t)$. Поэтому

$$\|x(p)\| = \|z(p)\| \le \|z(0+)\| + b\int_0^p f_2(r)dr = \varepsilon.$$

Пусть $t(\varepsilon) < p \le T\big(\varepsilon, \varphi(0)\big)$. Тогда равенство (18) принимает вид

$$\|z(0)\| = c f_2(p)\varphi(0) - \big(p - t(\varepsilon)\big) b f_2(p). \tag{24}$$

Преследователь выбирает функцию

$$\varphi(t) = \varphi(0) - \frac{\|z(0)\|}{cf_2(p)} - \frac{b}{c}t \text{ при } 0 < t \le p - t(\varepsilon) \tag{25}$$

и $\varphi(t) = 0$ при $p - t(\varepsilon) < t \le p$. Тогда из (24) получим, что

$$\varphi(0+) = \big(p - t(\varepsilon)\big)\frac{b}{c} > 0,\ \varphi\big(p - t(\varepsilon)\big) = 0.$$

Используя формулы (20), (22), (25) получим, что $\|z(0+)\| = 0$. Покажем, что $\|z\big(p - t(\varepsilon)\big)\| = 0$.

Допустим, что $\|z(p-t(\varepsilon))\|>0$. Тогда, учитывая, что $\|z(0+)\|=0$, найдем число $0\le t_0<p-t(\varepsilon)$ такое, что $\|z(t)\|>0$ при $t_o<t\le p-t(\varepsilon)$ и $\|z(t_0)\|=0$. Функция $z(t)$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[t_0,p-t(\varepsilon)]$. Поскольку $\|z(t)\|>0$ при $t_0<t\le p-t(\varepsilon)$, то можно показать, используя формулы (21), (22) и (25), что

$$\dot z(t)=-bf_2(p-t)\frac{z(t)}{\|z(t)\|}+f_2(p-t)v,\|v\|\le b. \tag{26}$$

для почти всех $t\in(t_0,p-t(\varepsilon)]$. Так как функция $\|z\|$ удовлетворяет условию Липшица, то норма $\|z(t)\|$ является абсолютно непрерывной функцией. Поэтому ее производная существует почти всюду и [10, стр. 118]

$$\frac{d\|z(t)\|}{dt}=\lim_{h\to0+}\frac{\|z(t)+h\dot z(t)\|-\|z(t)\|}{h}.$$

Отсюда и из формулы (26) следует, что $\dfrac{d\|z(t)\|}{dt}\le0$. Из этого неравенства получим, что $\|z(p-t(\varepsilon))\|<\|z(t)\|$ при любом $t\in(t_0,p-t(\varepsilon))$. Устремляя $t\to t_0$, будем иметь требуемое равенство $\|z(p-t(\varepsilon))\|\le0$.

При $p-t(\varepsilon)\le t\le p$ из формул (21) и (25) получим, что $\dot z(t)=f_2(p-t)v,\ \|v\|\le b$. Поэтому, учитывая определение числа $t(\varepsilon)$, будем иметь $\|z(t)\|\le\varepsilon$.

6. Задача убегания

Для построения управления убегающего потребуется некоторые свойства множества (14).

Лемма 1. Множество (14) является выпуклым компактом.

Доказательство. Замкнутость и ограниченность множества (14) следует из непрерывности функций $f_2(t)$, $f(t)$ и $g(t,\varepsilon)$ по переменной t. Для доказательства его выпуклости перейдем к новой переменной

$$\tau=\frac{f_2(t)}{f(t)},\ t\ge0.$$

Поскольку

$$\frac{f_2(0)}{f(0)}=0,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{f_2(t)}{f(t)}=\frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}\ \text{ и }\ \frac{d}{dt}\left(\frac{f_2(t)}{f(t)}\right)=\frac{e^{a_2t}}{f^2(t)}>0,$$

то при $0\le\tau\le\dfrac{2}{\lambda_1-\lambda_2}$ определена обратная функция $t=\psi(\tau)$, у которой

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=f^2(t)e^{-a_2t}\ \text{ при } t=\psi(\tau) \tag{27}$$

С помощью переменной τ множество (14) представимо в виде

$$\bigcup_{0\le\tau\le\tau(t)}\left(\left(\frac{a_2}{2}x-y\right)\tau+G(\tau)S\right). \tag{28}$$

Здесь обозначено

$$G(\tau)=\frac{g(\psi(\tau),\varepsilon)}{f(\psi(\tau))}+c\varphi(0)\tau. \tag{29}$$

Покажем, что функция $G(\tau)$ является вогнутой. Отсюда будет следовать выпуклость множества (28).

Из формулы (11) получим, что производная $\frac{dg(t,\varepsilon)}{dt}$ является непрерывной при $0 \le t$. По теореме о производной сложной функции производная функции (29) является непрерывной при $0 \le \tau < \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Дифференцируя формулу (29) и учитывая равенство (27), получим, что

$$\frac{dG}{d\tau} = Q(\psi(\tau)) + c\varphi(0). \tag{30}$$

Здесь обозначено

$$Q(t) = \left(\frac{dg(t,\varepsilon)}{dt} f(t) - g(t,\varepsilon)\frac{df(t)}{dt}\right)e^{-a_2 t}. \tag{31}$$

Нужно показать, что производна (30) не возрастает. Для этого достаточно проверить, что $\frac{dQ(t)}{dt} \le 0$ при $t \ge 0$.

Функция (12) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = a_2 \frac{df(t)}{dt} + a_1 f(t). \tag{32}$$

Поэтому

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \left(\frac{d^2 g(t,\varepsilon)}{dt^2} - a_2 \frac{dg(t,\varepsilon)}{dt} - a_1 g(t,\varepsilon)\right) f(t) e^{-a_2 t}. \tag{33}$$

Пусть $0 \le t < t(\varepsilon)$. Тогда, как следует из формул (11) и (33), неравенство $\frac{dQ(t)}{dt} \le 0$ принимает вид

$$b\left(\frac{df_2(t)}{dt} - a_2 f_2(t) - a_1 \int_0^t f_2(r)\,dr\right) + a_1\varepsilon \ge 0. \tag{34}$$

Функция $f_2(t)$ удовлетворяет уравнению (32). Поэтому левая часть неравенства (34) является постоянной величиной. При $t = 0$ она равна $b + a_1\varepsilon$. Согласно предположению 2 неравенство (34) выполнено.

При $t(\varepsilon) < t$ формула (33) принимает вид

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \left(-2\frac{df_2(t)}{dt} + a_2 f_2(t)\right) b\, f(t) = -2b\, f^2(t) < 0.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (15). Тогда существует вектор $\|\psi\| = 1$ такой, что

$$\langle f_1(s)x(0) + f_2(s)y(0), \psi\rangle > cf_2(s)\varphi(0) + g(s,\varepsilon) \tag{35}$$

при всех $s \ge 0$.

Здесь посредством $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из (14) следует, что вектор $x(0)$ не принадлежит множеству (28), в котором объединение берется по всем $0 \le \tau \le \tau(T(\varepsilon,\varphi(0))) = \tau_0$. Из формул (11), (13) и (29) следует, что $G(\tau_0) = 0$. Из формул (9), (10) и (12) получим, что при $t(\varepsilon) < t$ функция (31) равна

$$Q(t) = -b\, f_2(t) f(t) e^{-a_2 t} - (t - t(\varepsilon))b.$$

Отсюда и из формулы (30) следует, что

$$\frac{dG(\tau_0)}{d\tau} = -b\, f_2(T) f(T) e^{-a_2 T} < 0,\ T = T(\varepsilon,\varphi(0)).$$

Применяя лемму из работы [7], найдем требуемый вектор ψ.

Геометрический смысл неравенства (35) заключается в том, что гиперплоскость, перпендикулярная вектору ψ, отделяет точку $x(0)$ от выпуклого множества K, которое задается формулой (14) при $x=x(0), y=y(0), t=T(\varepsilon,\varphi(0))$ (см. рисунок).

Лемма 3. При любых $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$ и $t>0$ выполнено неравенство

$$g(t,\varepsilon_1)>g(t,\varepsilon_2)+\varepsilon_1-\varepsilon_2. \qquad (36)$$

Лемма 4. При любых $\varepsilon\ge 0$, $\varphi(0)\ge 0$, $0\le s\le T(\varepsilon,\varphi(0))$, $\tau>0$ выполнено неравенство

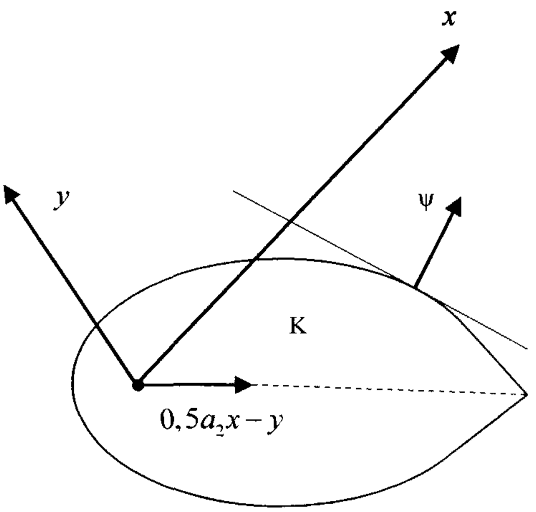
$$g(s+\sigma,\varepsilon)-g(s,\varepsilon)+b\int_s^{s+\sigma} f_2(\tau)d\tau \ge -(s+\sigma-t(\varepsilon))(f_2(s+\sigma)-f_2(s))b. \qquad (37)$$

Доказательство неравенств (36) и (37) следует из формулы (11). При доказательстве неравенства (37) используется монотонность функции $f_2(t)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим начальное состояние, для которого выполнено (15). Тогда существует число $\eta>0$, такое, что выполнено (15) с заменой ε на $(1+\eta)\varepsilon$.

Зафиксируем число $T>T((1+\eta)\varepsilon,\varphi(0))$. Разобьем отрезок $[0,T]$ на конечное число равных частей точками $t_i=i\sigma$. Число σ возьмем из условия

$$0<\sigma<t(\varepsilon), \beta(\sigma)=\eta\varepsilon e^{-T}\frac{1-e^{-\sigma}}{\sigma}-\max_{0\le s\le T}(f_2(s+\sigma)-f_2(s))>0. \qquad (38)$$



Схематическое изображение выпуклого множества K, отделяемого гиперплоскостью, перпендикулярной вектору ψ

Обозначим

$$\varepsilon_i=\left(1+\eta e^{-i\sigma}\right)\varepsilon. \qquad (39)$$

Допустим, что убегающий смог обеспечить в момент времени t_i условие

$$x(t_i)\notin K\left(x(t_i),y(t_i),\varphi(t_i),\varepsilon_i,T(\varepsilon_i,\varphi(t_i))\right). \qquad (40)$$

Отметим, что при $i=0$ это условие выполнено.

Согласно лемме 2 существует единичный вектор ψ_i такой, что

$$\langle f_1(s)x(t_i)+f_2(s)y(t_i),\psi_i\rangle > cf_2(s)\varphi(t_i)+g(s,\varepsilon_i) \qquad (41)$$

для всех $s\ge 0$.

Убегающий берет при $t_i\le t\le t_{i+1}$ управление $v(t)=\psi_i$. При выбранном управлении первого игрока реализуется движение $x(t), y(t)$. Подставим эти функции в формулу (19) с произвольным фиксированным числом $p\ge t_i$. Тогда из уравнений движения (20) и (21) следует, что

$$\langle f_1(p-t)x(t)+f_2(p-t)y(t),\psi_i\rangle \ge$$

$$\ge\langle f_1(p-t_i)x(t_i)+f_2(p-t_i)y(t_i),\psi_i\rangle-(\varphi(t_i)-\varphi(t))cf_2(p-t_i)+b\int_{p-t}^{p-t_i} f_2(\tau)d\tau.$$

Отсюда из неравенства (41) при $s=p-t_i$ получим, что

$$\langle f_1(p-t)x(t)+f_2(p-t)y(t),\psi_i\rangle > cf_2(p-t_i)\varphi(t)+g(p-t_i,\varepsilon_i)+b\int_{p-t}^{p-t_i} f_2(\tau)d\tau. \qquad (42)$$

Положим в этом неравенстве $p=t$. Получим, что $\|x(t)\|=\langle x(t),\psi_i\rangle>\varepsilon_i>\varepsilon$ при $t_i\le t\le t_{i+1}$. Покажем, что при любом

$$0\le s\le t(\varepsilon_{i+1})+\frac{c}{b}\varphi(t_{i+1}) \qquad (43)$$

выполнено неравенство $A(s)>0$. Здесь обозначено

$$A(s)=\langle f_1(s)x(t_{i+1})+f_2(s)y(t_{i+1}),\psi_i\rangle - c f_2(s)\varphi(t_{i+1})-g(s,\varepsilon_{i+1}).$$

Тогда условие (40) будет выполнено и при $i+1$. Возьмем любое число s, удовлетворяющее условиям (43), и положим в неравенстве (42) $p=s+t_{i+1}, t=t_{i+1}$. Получим

$$A(s)>c\big(f_2(s+\sigma)-f_2(s)\big)\varphi(t_{i+1})+g(s+\sigma,\varepsilon_i)-g(s,\varepsilon_{i+1})+b\int\limits_s^{s+\sigma} f_2(\tau)d\tau.$$

Отсюда, используя неравенства (36), (37), будем иметь

$$A(s)>\big(c\varphi(t_{i+1})-bs+bt(\varepsilon_{i+1})\big)\big(f_2(s+\sigma)-f_2(s)\big)-\sigma\big(f_2(s+\sigma)-f_2(s)\big)+\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}.$$

Отсюда, используя монотонность функции $f_2(t)$, неравенства (43) и формулу (39), получим, что

$$A(s)>\sigma\left(\eta\varepsilon e^{-T}\frac{1-e^{-\sigma}}{\sigma}-f_2(s+\sigma)+f_2(s)\right)\ge\sigma\beta(\sigma).$$

Из второго условия в (38) получим требуемое неравенство $A(s)>0$.

По описанному выше алгоритму убегающий строит свое управление на отрезке $[T,2T]$ и т.д.

Доказательство теоремы 3. Пусть начальное состояние и число $0<T<T(\varepsilon,\varphi(0))$ таковы, что включение (17) при $t=T$ не выполнено. Тогда существует число $\eta>0$ и единичный вектор ψ такие, что при всех $0\le s\le T$ выполнено неравенство (35) с заменой в нем ε на $(1+\eta)\varepsilon$. Разобьем отрезок $[0,T]$ точками $t_i=i\sigma$. Число σ выбирается из условий (38). Допустим, что в момент времени t_i выполнено неравенство (41) на некотором единичном векторе ψ_i при всех $0\le s\le T-t_i$.

Убегающий берет управление $v(t)=\psi_i$ при $t_i\le t\le t_{i+1}$. Тогда при всех $t_i\le t\le t_{i+1}$ и при любом $p\ge t_i$ выполнено неравенство (42). Как и ранее из него, получим, что $\|x(t)\|>\varepsilon_i>\varepsilon$ при $t_i\le t\le t_{i+1}$. Далее, при любом $0\le s\le T-t_{i+1}$ будет выполнено неравенство $A(s)>0$. Поэтому, если $T-t_{i+1}<T(\varepsilon_{i+1},\varphi(t_{i+1}))$, то неравенство (41) выполнено при $i+1$. Если $T(\varepsilon_{i+1},\varphi(t_{i+1}))\le T-t_{i+1}$, то реализовавшееся в момент времени t_{i+1} состояние удовлетворяет условию (40).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский – М.: Наука, 1970. – 420 с.

2. Красовский, Н.Н. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы / Н.Н. Красовский // Прикл. матем. и мех. – 1968. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 177–184.

3. Пожарицкий, Г.К. Импульсное преследование в случае однотипных объектов второго порядка / Г.К. Пожарицкий // Прикл. матем. и мех. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5 – С. 897–907.

4. Субботина, Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков / Н.Н. Субботина, А.Н. Субботин // Прикл. матем. и мех. – 1975. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 397–406.

5. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей / Н.Н. Петров // Известия РАН, Теория и системы управления. – 2009. – № 2. – С. 38–44.

6. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челябинский государственный университет. – 2005. – 124 с.

7. Ухоботов, В.И. Модификация игры изотропные ракеты. Многокритериальные системы при неопределённости и их приложениях / В.И. Ухоботов // Межвузовский сборник научных трудов: Челябинский государственный университет. – Челябинск: изд-во Башкирского университета, 1988. – С. 123–130.

8. Ухоботов, В.И. Одна задача импульсного преследования при ограниченной скорости убегающего / В.И. Ухоботов, О.В. Зайцева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 11. – № 2 (178). – С. 29–32.

9. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

10. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. Наука, 1985. – 224 с.

ONE PROBLEM OF PULSE PERSUIT

V.I. Ukhobotov[1], *A.A. Troitsky*[2]

Optimum time is found in second order linear differential game with pulse control. Optimum control has been developed for players.

Keywords: differential game, pulse control, pursuit time.

References

1. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow: Nauka, 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1968. Vol. 32. Issue 2. pp. 177–184. (in Russ.).

3. Pozharitskiy G.K. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1966. Vol. 30. Issue 5. pp. 897–907. (in Russ.).

4. Subbotina N.N., Subbotin A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1975. Vol. 39. Issue 3. pp. 397–406. (in Russ.).

5. Petrov, N.N. *Izvestiya RAN, Teoriya i sistemy upravleniya.* 2009. no. 2. pp. 38–44. (in Russ.).

6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide). Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet. 2005. 124 p. (in Russ.).

7. Ukhobotov V.I. *Modifikatsiya igry izotropnye rakety. Mnogokriterial'nye sistemy pri neopredelyennosti i ikh prilozheniyakh* (Modification of the isotropic rockets game. Multi-criterion systems in indeterminedness and its applications) // Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov: Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet (Interuniversity collection of scientific papers: Chelyabinsk State University). – Chelyabinsk: izd-vo Bashkirskogo universiteta, 1988. pp. 123–130. (in Russ.).

8. Ukhobotov V.I., Zaytseva O.V. Odna zadacha impul'snogo presledovaniya pri ogranichennoy skorosti ubegayushchego (About one Problem of Impulse Pursuit at the Limited Velocity of the Escaping) *Vestnik YuUrGU. Seriya «Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika».* 2010. Issue 11. no. 2(178). pp. 29–32. (in Russ.).

9. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka, 1965. 520 p. (in Russ.).

10. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential equations with diffuse right member). Moscow: Nauka, 1985. 224 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 9 апреля 2013 г.

[1] Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr Sc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University

E-mail ukh@csu ru

[2] Troitsky Anton Aleksandorvich is Post-graduate Student, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University

E-mail antonio troitsky@gmail com