УДК 519.63

МОДИФИКАЦИЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Л. Ушаков[1]

Рассматривается два эллиптических уравнения второго порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Их численное решение с помощью итерационной факторизации и фиктивных продолжений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трех.

Ключевые слова: итерационная факторизация, фиктивные продолжения.

Введение

Рассматривается два эллиптических дифференциальных уравнения второго порядка в прямоугольной области со сторонами параллельными осям координат. При этом на правой и верхней сторонах прямоугольной области задано главное краевое условие, а на остальной части границы задано естественное краевое условие. При достаточно гладких данных и, как следствие, гладких решениях эти уравнения сводятся к уравнению Пуассона, экранированному уравнению Пуассона. Для разностных аналогов этих уравнений в виде систем линейных алгебраических уравнений приводится факторизующийся переобуславливатель попеременно треугольного вида при модификации [1]. Эта методика аналогична модификации метода фиктивных компонент, предложенной и изучаемой в [2]. Дискретные задачи такого вида могут быть также получены в методе типа фиктивных компонент при решении более сложных задач в [2, 3]. Решаемые в работе разностные уравнения получаются и при численном решении эллиптического дифференциального уравнения уже четвертого порядка в [4].

Первая и вторая непрерывные задачи

Рассматриваются две задачи

$$u_\alpha \in W: \mathrm{A}_\alpha(u_\alpha, v) = l_\alpha(v)\ \forall v \in W,\ \ l_\alpha \in W',\ \ \alpha = 1, 2, \tag{1}$$

где соболевское пространство функций

$$W = W(\Omega) = \left\{ v \in W_2^1(\Omega) : v\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

на прямоугольной области

$$\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2),\ \text{с}\ \Gamma_1 = \{b_1\}\times[0;b_2]\cup[0;b_1]\times\{b_2\},$$

билинейные формы

$$\mathrm{A}_\alpha(u,v) = \int\limits_\Omega (u_x v_x + u_y v_y + (\alpha-1)cuv)d\Omega$$

и заданы константы $b_1, b_2 > 0$, $c \geq 0$.

Заметим, основываясь на [5-7], что решение каждой задачи из (1) существует и единственно. Если

$$l_\alpha(v) = \int\limits_\Omega f_\alpha v d\Omega, \Gamma = \partial\Omega,\ \ \Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1,$$

где f_α – заданные действительные достаточно гладкие функции, то задачи из (1) представляются в следующем виде

$$-\Delta u_\alpha + (\alpha-1)cu_\alpha = f_\alpha,\ u_\alpha\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ \alpha = 1, 2. \tag{2}$$

---

[1] Ушаков Андрей Леонидович – старший преподаватель, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет

E-mail ushakov_al@inbox.ru

Можно отметить, что в (2) уравнения с точностью до знака совпадают с уравнением Пуассона, когда $\alpha=1$, с экранированным уравнением Пуассона, когда $\alpha=2$.

Первая и вторая дискретные задачи

Рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений, получающиеся при дискретизации (1), (2) на основе метода сумматорных тождеств

$$\overline{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha = \overline{f}_\alpha,\ \overline{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N,\ \alpha=1,2, \tag{3}$$

где векторы

$$\overline{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N:\ \overline{v}_\alpha = (v_{\alpha,1},\dots,v_{\alpha,N})',\ N=m\cdot n,\ m,\ n\in\mathbb{N},$$

при этом считается, что

$$v_{\alpha,m(j-1)+i} = v_{\alpha,i,j},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

а $v_{\alpha,i,j}$ – являются значениями функции дискретного аргумента, соответствующего узлам сетки

$$(x_i,y_j) = \big((i-0{,}5)h_1,(j-0{,}5)h_2\big),\ i,j\in\mathbb{Z},$$

шаги сетки

$$h_1 = b_1/(m+0{,}5),\ \ h_2 = b_2/(n+0{,}5),$$

состоящей из указанных выше узлов, а матрицы A_α размерности $N\times N$ определяются следующим образом:

$$\left\langle \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((u_{\alpha,i+1,j}-u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i+1,j}-v_{\alpha,i,j})h_1^{-2} +$$

$$+(u_{\alpha,i,j+1}-u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i,j+1}-v_{\alpha,i,j})h_2^{-2} + (\alpha-1)cu_{\alpha,i,j}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,$$

$$u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} = 0,\ \ i=1,\dots,m,\ \ u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0,\ \ j=1,\dots,n.$$

Здесь $\langle .,. \rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида

$$\left\langle \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} u_{\alpha,k}v_{\alpha,k}h_1h_2\ \ \forall \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N.$$

Если функции f_α непрерывны на области Ω, то возможно положить

$$f_{\alpha,i,j} = f(x_i,y_j),\ \ i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n.$$

Решение каждой задачи из (3) существует и единственно, т.к. $\mathrm{A}_\alpha > 0,\ \ \alpha=1,2.$

Фиктивные продолжения дискретных задач и их решений

Выбираются фиктивные продолжения для (3)

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^{2N}:\ D\overline{u} = \overline{f},\ \overline{f}\in\mathbb{R}^{2N},\ \overline{f}_{3-i} = 0,\ \alpha=1,2, \tag{4}$$

где векторы

$$\overline{v}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \overline{v} = (\overline{v}_1{}', \overline{v}_2{}')',$$

блочная, верхнетреугольная матрица D размерности $2N\times 2N$ такова, что

$$D_{11} = A = \mathrm{A}_1,\ D_{12} = \theta,\ D_{21} = 0,\ D_{22} = \mathrm{A} = \mathrm{A}_2,$$

матрицы

$$\theta = \nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x,\ A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y,$$

а матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N\times N$ определяются следующим образом

$$\left\langle \nabla_x \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i+1,j}-u_{\alpha,i,j})h_1^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ \ u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0,\ \ j=1,\dots,n,$$

$$\left\langle \nabla_y \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i,j+1}-u_{\alpha,i,j})h_2^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ \ u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} = 0,\ \ i=1,\dots,m.$$

Введём подпространства векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$:

$$\bar{V}_1=\left\{\bar{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}')':\bar{v}_2=0\right\},\quad \bar{V}_2=\left\{\bar{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}')':A\bar{v}_1-\theta\bar{v}_2=0\right\}.$$

Утверждение 1. Решение каждой задачи из (4) $\bar{u}\in\bar{V}_\alpha$, $\alpha=1, 2$, существует и единственно.

Итерационная факторизация на фиктивных продолжениях

Определим блочную матрицу C размерности $2N\times 2N$ такую, что

$$C_{11}=C_{22}=A\,,\ C_{12}=-\theta\,,\ C_{21}=\theta\,.$$

Для решения задач из (4) предлагаются итерационные процессы:

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^{2N}:\ C(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1})=-\tau_k(D\bar{u}^{k-1}-\bar{f}),\ k\in\mathbb{N},\ \tau_k>0\ \ \forall\bar{u}^0\in\bar{V}_\alpha,\ \alpha=1,2\,. \tag{5}$$

Заметим, что в итерационных процессах из (5) возникают задачи с факторизуещимся оператором и следующего вида

$$\bar{U}\in\mathbb{C}^N:\ LL^{*}\bar{U}=\bar{F}\,,\ \bar{F}\in\mathbb{C}^N\,,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{W}\in\mathbb{C}^N:\ L\bar{W}=\bar{F}\,,\ \bar{F}\in\mathbb{C}^N\,,$$

$$\bar{U}\in\mathbb{C}^N:\ L^{*}\bar{U}=\bar{W}\,,\ \bar{W}\in\mathbb{C}^N\,,$$

где матрицы

$$L=\nabla_x{}'-i\nabla_y{}'\,,\ L^{*}=\bar{L}'=\nabla_x+i\nabla_y\,,$$

$$LL^{*}=(\nabla_x{}'-i\nabla_y{}')(\nabla_x+i\nabla_y)=A+i\theta\,,$$

тогда

$$(A+i\theta)(\bar{u}_1+i\bar{u}_2)=\bar{f}_1+i\bar{f}_2\,,$$

что равносильно:

$$\begin{cases}A\bar{u}_1-\theta\bar{u}_2=\bar{f},\ \ \bar{u}_1+i\bar{u}_2=\bar{U},\\ \theta\bar{u}_1+A\bar{u}_2=\bar{f}_2,\ \ \bar{f}_1+i\bar{f}_2=\bar{F}\end{cases}$$

и, действительно, на каждом шаге итерационных процессов из (5) возникают задачи типа

$$C\bar{u}=\bar{f}\,,\ \bar{u}=(\bar{u}_1',\bar{u}_2')',\ \bar{f}=(\bar{f}_1',\bar{f}_2')'\,.$$

Утверждение 2. Если в итерационных процессах из (5) $\bar{u}^{k-1}=\bar{u}$, то $\bar{u}^k=\bar{u}\ \ \forall k\in\mathbb{N}$.

Пусть $\bar{u}^k=\bar{u}+\bar{\psi}^k\ \ \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Утверждение 3. В итерационных процессах из (5)

$$A\bar{\psi}_1^k-\theta\bar{\psi}_2^k=(1-\tau_k)\left(A\bar{\psi}_1^{k-1}-\theta\bar{\psi}_2^{k-1}\right),$$

если $\alpha=1$, $\tau_1=1$, то $\bar{\psi}^k\in\bar{V}_2\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, если $\alpha=2$, то $\bar{\psi}^k\in\bar{V}_2\ \ \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Введём нормы

$$\|\bar{v}_\alpha\|_{\mathrm{A}_\alpha}=\sqrt{\left\langle \mathrm{A}_\alpha\bar{v}_\alpha,\bar{v}_\alpha\right\rangle}\,,\ \alpha=1,2\,.$$

Замечание 1. Имеют место неравенства

$$\exists\delta\in[1;+\infty):\ A\le\mathrm{A}\le\delta A\,,$$

где $\delta=1+c\lambda^{-1}$, $\lambda=2,25(b_1^{-2}+b_2^{-2})=\lambda_{1,1}(1,1)\le\lambda_{1,1}(m,n)<\lim\limits_{m,n\to\infty}\lambda_{1,1}(m,n)=\dfrac{\pi^2}{9}\lambda$, а собственные числа матрицы A из [1]:

$$\lambda_{i,j}(m,n)=\left(\frac{2m+1}{b_1}\right)^2\sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{2(2m+1)}\right)+\left(\frac{2n+1}{b_2}\right)^2\sin^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}\right).$$

Утверждение 4. Имеет место равенство

$$\left\langle C\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle=\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle-\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle\ \forall\bar{\psi}\in\bar{V}_2\,.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$A\bar{\psi}_1-\theta\bar{\psi}_2=0\,,\ \theta'=-\theta\,,$$

получается

$$\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle=\langle\theta\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2\rangle+\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle=\langle\overline{\psi}_1\theta'\overline{\psi}_2\rangle+\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\rangle=$$
$$=\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\rangle-\langle\theta\overline{\psi}_2\overline{\psi}_1\rangle=\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\rangle-\langle A\overline{\psi}_1\overline{\psi}_1\rangle.$$

Предположение 1. (О фиктивном продолжении) Имеет место неравенство

$$\exists\alpha_1\in(0;1):\ \langle A\overline{v}_1,\overline{v}_1\rangle\le\alpha_1\langle A\overline{v}_2,\overline{v}_2\rangle\quad\forall\overline{v}\in\overline{V}_2.$$

Можно отметить ($\gamma=(1-\alpha_1)^{-1}$ или $\alpha_1=1-\gamma^{-1}$), что

$$\exists\gamma\in(1;+\infty):\ \langle A\overline{v}_2,\overline{v}_2\rangle\le\gamma\langle C\overline{v},\overline{v}\rangle=\gamma\big(\langle A\overline{v}_2,\overline{v}_2\rangle-\langle A\overline{v}_1,\overline{v}_1\rangle\big)\quad\forall\overline{v}\in\overline{V}_2,$$

т.к. матрица $A>0$, а из [8] и матрица $C>0$. А именно в нашем случае выводится, что

$$(C\overline{v},\overline{v})=(\nabla_x\overline{v}_1-\nabla_y\overline{v}_2)^2+(\nabla_y\overline{v}_1+\nabla_x\overline{v}_2)^2>0\quad\forall\overline{v}\ne0,$$

последнее, т.к. $(\nabla_x+i\nabla_y)(\overline{v}_1+i\overline{v}_2)\ne0\quad\forall\overline{v}\ne0$. Также отметим, что

$$\exists\lambda^{-1}\in(0;+\infty):\ 0\le\langle A\overline{v}_1,\overline{v}_1\rangle=\langle\theta\overline{v}_2,\overline{v}_1\rangle=\left\langle A^{-1}\theta\overline{v}_2,\theta\overline{v}_2\right\rangle\le\lambda^{-1}\langle\theta\overline{v}_2,\theta\overline{v}_2\rangle\to0,\ \text{при}\ h_1,h_2\to0,$$

где опять $\lambda=\lambda_{1,1}(1,1)=2,25(b_1^{-2}+b_2^{-2})$, т.е.

$$\langle A\overline{v}_1,\overline{v}_1\rangle\to0,\ \overline{v}_1\to\overline{0},\ \text{т.к.}\ \theta\overline{v}_2=\left(\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\right)\overline{v}_2\to\overline{0},\ \text{при}\ h_1,h_2\to0\quad\forall v\in\overline{V}_2.$$

Утверждение 5. Имеют место неравенства

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle\le(1-\alpha_1)\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle\le\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\quad\forall\overline{\psi}\in\overline{V}_2.$$

Доказательство. Используя, что

$$\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle\le\alpha_1\langle C\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle\quad\forall\overline{\psi}\in\overline{V}_2$$

получаем

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle\le(1-\alpha_1)\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle=\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle-\alpha_1\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle\le$$
$$\le\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle-\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle=\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\quad\forall\overline{\psi}\in\overline{V}_2.$$

Утверждение 6. Если в итерационном процессе из (5) $\alpha=1$, $k=1$, $\tau_1=1$, то имеют место оценки

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\overline{\psi}_1^0,\overline{\psi}_1^0\right\rangle=(\gamma-1)\left\langle C\overline{\psi}^0,\overline{\psi}^0\right\rangle,\quad\left\|\overline{\psi}_1^1\right\|_A\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\|\overline{\psi}_1^0\right\|_A=(\gamma-1)\left\|\overline{\psi}_1^0\right\|_A.$$

Доказательство. Из итерационного процесса имеем

$$C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0)=-D\overline{\psi}^0,\quad\left\langle C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0),\overline{\psi}^1\right\rangle=\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle=-\left\langle D\overline{\psi}^0,\overline{\psi}^1\right\rangle=-\left\langle A\overline{\psi}_1^0,\overline{\psi}_1^1\right\rangle\le\left\|\overline{\psi}_1^0\right\|_A\left\|\overline{\psi}_1^1\right\|_A,$$

тогда

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle\le\frac{\left\langle A\overline{\psi}_1{}^1,\overline{\psi}_1{}^1\right\rangle}{\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle}\left\langle A\overline{\psi}_1^0,\overline{\psi}_1^0\right\rangle\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\overline{\psi}_1^0,\overline{\psi}_1^0\right\rangle=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle C\overline{\psi}^0,\overline{\psi}^0\right\rangle,$$

учитывая, что

$$\left\langle A\overline{\psi}_1^1,\overline{\psi}_1^1\right\rangle\le\alpha_1\left\langle C\overline{\psi}_2^1,\overline{\psi}_2^1\right\rangle,\quad\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle=\left\langle A\overline{\psi}_2^1,\overline{\psi}_2^1\right\rangle-\left\langle A\overline{\psi}_1^1,\overline{\psi}_1^1\right\rangle\ge(1-\alpha_1)\left\langle A\overline{\psi}_2^1,\overline{\psi}_2^1\right\rangle.$$

Из утверждения 5.

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\overline{\psi}_1^1,\overline{\psi}_1^1\right\rangle\le\left\langle C\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1\right\rangle=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle C\overline{\psi}_1^0,\overline{\psi}_1^0\right\rangle,$$

следовательно, выполняется вторая оценка.

Утверждение 7. Имеют место неравенства

$$\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\le\langle D\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\le\delta\gamma\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\quad\forall\overline{\psi}\in\overline{V}_2.$$

Доказательство. Заметим,

$$\frac{1-\alpha_1}{\delta}\langle D\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle\le\frac{1-\alpha_1}{\delta}\langle \mathrm{A}\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle\le(1-\alpha_1)\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle\le\langle C\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle=$$
$$=\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle-\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle\le\langle \mathrm{A}\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle=\langle D\overline{\psi},\overline{\psi}\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 8. Если в итерационных процессах из (5) $\alpha \neq 1$ или $k \neq 1$,

$$0 < \tau_k = \tau = \frac{2}{1+\gamma\delta} < \frac{2}{\gamma\delta},\ q = \frac{\delta - 1 + \alpha_1}{\delta + 1 - \alpha_1} = \frac{\gamma\delta - 1}{\gamma\delta + 1} < 1,$$

то

$$\left\langle C\bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из итерационных процессов получается, что

$$C(\bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1}) = -\tau D\bar{\psi}^{k-1},\ \bar{\psi}^k = T\bar{\psi}^{k-1},\ T = E - \tau C^{-1}D,\ T = T' > 0,$$

тогда

$$\left\langle C\bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \right\rangle = \left\langle CT\bar{\psi}^{k-1}, T\bar{\psi}^{k-1} \right\rangle \le \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \frac{\langle CT\bar{\psi}, T\bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left(\frac{\langle CT\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left(\frac{\langle (C - \tau DT)\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left(1 - \tau \frac{\langle D\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle = \max\left\{ |1-\tau|^2 \, |1 - \tau\gamma\delta|^2 \right\} \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle = q^2 \left\langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \right\rangle.$$

Теорема 1. В итерационных процессах из (5)

$$\left\| \bar{u}_\alpha^{\ k} - \bar{u}_\alpha \right\|_{A_\alpha} \le \varepsilon_\alpha \left\| \bar{u}_\alpha^{\ 0} - \bar{u}_\alpha \right\|_{A_\alpha},$$

при

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau_k = \tau,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

получается, что

$$\varepsilon_\alpha \le \left((2-\alpha)(\gamma - 1) + (\alpha - 1)\sqrt{\gamma\delta q} \right) q^{k-1}.$$

Доказательство. Если $\alpha = 1$, то из утверждения 5 имеем

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \le \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2,$$

а из утверждения 6 следует $\left\langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \right\rangle \le \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \left\langle A\bar{\psi}_1^{\ 0}, \bar{\psi}_1^{\ 0} \right\rangle = (\gamma - 1)\left\langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \right\rangle$.

Если $\alpha = 2$, то из утверждения 7 получается

$$\frac{1-\alpha_1}{\delta} \langle \mathrm{A}\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \le \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle,\ \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \le \langle \mathrm{A}\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2.$$

Вывод. Учитывая вид матриц L, L^{1}, можно отметить, что для решения задач из (3) с N неизвестными, на основании приведенной теоремы 1, предложенными итерационными процессами из (5) с относительными погрешностями ε_α, требуется не более чем $O(N \ln \varepsilon_\alpha^{\ -1})$ арифметических операций.

Литература

1. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптической краевой задачи второго порядка / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7(62). – С. 64–70.

2. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков // Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 40 с. (Деп. в ВИНИТИ 11.11.91, № 4232-В91)

3. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

4. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия Челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1 (35) – С. 33–36.

5. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

6. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. – 256 с.

7. Обэн, Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

UPDATING ITERATIVE FACTORIZATION FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF TWO ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER IN RECTANGULAR AREA

A.L. Ushakov[1]

Two elliptic equations of the second order in rectangular area under the mixed regional conditions are considered. Their numerical decision is reduced by means of iterative factorization and fictitious continuations to the solution of systems of the linear algebraic equations with triangular matrixes, in which the quantity of nonzero elements in each line do not exceed three.

Keywords: iterative factorization, fictitious continuations.

References

1. Ushakov A.L. Modelirovanie iteratsionnoy faktorizatsii dlya ellipticheskoy kraevoy zadachi vtorogo poryadka (Simulation of iterative factorization for the elliptic second-order boundary value problem). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika, fizika, khimiya».* 2006. Issue 7. no. 7(62). pp. 64–70. (in Russ.).

2. Ushakov A.L. *Modifikatsiya metoda fiktivnykh komponent* (Updating of the method of fictitious entries). Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet, 1991. 40 p. (Dep. v VINITI 11.11.91, no. 4232-V91). (in Russ.).

3. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. The fictitious-domain method and explicit continuation operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1993. Vol. 33, no. 1. pp. 45–59.

4. Ushakov A.L. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra.* 2007. Issue 1(35). pp. 33–36. (in Russ.).

5. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variational differential solution method of elliptic equations). Erevan: Izd-vo AN ArmSSR, 1979. 235 p. (in Russ.).

6. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* (Some applications of functional analysis in mathematical physics). Leningrad: Izd-vo LGU, 1950. 256 p. (in Russ.).

7. Oben Zh.-P. Priblizhyennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach (Approximate answer to elliptic boundary value problems). Moscow: Mir, 1977. 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York: Wiley-Interscience, 1972. 360 p.]

8. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniya (Matrices and calculations). Moscow: Nauka, 1984. 320 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 11 февраля 2013 г.

[1] Ushakov Andrei Leonidovich is Associate Professor, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University
E-mail ushakov_al@inbox.ru