УДК 517.988.52

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ У РАВНОМЕРНО СЖИМАЮЩЕГО МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА

М.Л. Катков[1]

Доказывается существование неподвижной точки у монотонного сжимающего отображения в банаховом K пространстве. Доказывается сходимость итераций к неподвижной точке в метрике равномерной сходимости. Компактность инвариантного множества, полная непрерывность оператора не предполагаются.

Ключевые слова. положительный оператор, монотонный вогнутый оператор, гетеротонный оператор.

Введение

М.А. Красносельским был рассмотрен класс монотонных вогнутых операторов [1]. Рамки построенной теории были расширены В.И. Опойцевым [2]. Им был рассмотрен класс гетеротонных операторов. Операторы из рассмотренных классов являются сжатиями в метрике Биркгофа. Центральными вопросами построенных теорий являются вопросы существования неподвижной точки и сходимости итераций. При этом существование неподвижной точки устанавливается из каких-либо дополнительных соображений (компактность множества, полная непрерывность оператора), а сходимость итераций обеспечивает условие вогнутости.

Автором рассматривались сжимающие отображения в метрике равномерной сходимости. Сжатия в этой метрике обладают такими же свойствами, что и вогнутые и гетеротонные. В настоящей работе приводится признак существования неподвижной точки у монотонного сжимающего отображения в метрике равномерной сходимости.

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K.

Определение компоненты. *Пусть $x_0 \in K$; $u_0 \in K$ $(u_0 \neq 0)$. Компонентой $K(x_0;u_0)$ называется множество элементов $y \in X$, для которых при некотором $\alpha \geq 0$ выполняются неравенства*

$$x_0 \leq y + \alpha u_0; \quad y_0 \leq x_0 + \alpha u_0. \tag{1}$$

Определение метрики равномерной сходимости. *Пусть $x, y \in K(x_0;u_0)$. Метрика $d(x,y)$ определяется как минимальное α, при котором выполняются неравенства (1).*

Определение равномерного u_0-сжатия. *Монотонный оператор T, действующий в X, будем называть оператором равномерного u_0-сжатия, если для любого конусного отрезка $\langle u;v\rangle$ $(\langle u;v\rangle \subset K(x_0;u_0))$, для любого положительного t найдётся такое положительное $q = q(t;u;v)$ $(q(t;u;v) < 1)$, что для любого $x \in \langle u;v\rangle$ выполняется неравенство*

$$T(x + tu_0) \leq Tx + qt. \tag{2}$$

Будем говорить, что оператор T оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v,v\rangle$, если $T\langle u;v\rangle \subset \langle u;v\rangle$.

Теорема. *Пусть оператор T является оператором равномерного u_0-сжатия и оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle u_0;v_0\rangle \subset K(x_0;u_0)$*

Тогда у оператора T есть неподвижная точка $x_* \in K(x_0;u_0)$ и для любого начального приближения $z_0 \in K(x_0;u_0)$ последовательность итераций сходится к x_*.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности $\{u_n\}$; $\{v_n\}$ такие, что

---

[1] Катков Михаил Львович – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет
E-mail katkovml@yandex.ru

$$u_n = T^n u_0; \quad v_n = T^n v_0.$$

Очевидно, что

$$v_n \le u_n + t_{mn} u_0,$$

где $t_{mn} = d(u_n, v_m)$. Последовательность $\{t_{mn}\}$ не возрастает. Предположим, что

$$t = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} t_{mn} \ne 0.$$

Тогда

$$v_{m+1} \le T(u_n + tu_0) + (t_{mn} - t)u_0;$$

и, следовательно,

$$v_{m+1} \le u_{n+1} + qtu_0 + (t_{mn} - t)u_0.$$

Таким образом,

$$d(u_{n+1}; v_{n+1}) \le qt + (t_{mn} - t),$$

получаем противоречие.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ фундаментальные. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} = x_k.$$

Так как T – сжатие, x_k – единственная неподвижная точка.

Теорема доказана.

Литература

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
2. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов / В.И. Опойцев // Труды Московского математического общества. – 1978. – Т. 36. – С. 237–380.

EXISTENCE OF THE FIXED POINT IN THE CASE OF EVENLY CONTRACTIVE MONOTONIC OPERATOR

M.L. Katkov[1]

The article proves the existence of the fixed point in the case of evenly contractive monotonic operator in the Banach K-space. It proved to be right that the iterations converge to the fixed point in the metric of the even convergence. Compactness of the invariant set and the total continuity of the operator are not assumed.

Keywords: positive operator, monotonic concave operator, heterotonic operator.

References

1. Krasnoselskiy M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskie metody nelineynogo analiza (Geometrical methods of nonlinear analysis). Moscow: Nauka, 1975. 512 p. (in Russ.).
2. Opoitsev V.I. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva.* 1978. Vol. 36. pp. 237–380. (in Russ.).

Поступила в редакцию 28 мая 2013 г.

[1] Katkov Mikhail Lvovich is Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University
E-mail katkovml@yandex ru