УДК 519.633

ЯВНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.З. Хайрисламов[1], *А.В. Геренштейн*[2]

Предлагается численный метод решения третьей смешанной задачи для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности параболического типа, основанный на использовании явной разностной схемы. Зависимость коэффициентов уравнения от температуры преодолевается введением новой искомой функции – первообразной теплопроводности. Предлагается тестовая задача с известным точным решением для численных расчетов.

Ключевые слова: теплопроводность, квазилинейное уравнение теплопроводности, явные разностные схемы, аппроксимация.

В настоящей работе используются идеи, изложенные в работах [1, 2], в которых была предложена и обоснована явная устойчивая схема для линейного уравнения теплопроводности.

1. Численный метод

Рассмотрим следующую постановку третьей смешанной задачи для одномерного однородного квазилинейного уравнения [3]:

$$\begin{cases} c(u)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), & 0<t\le T,\ 0<x<L,\\ u(x,0)=\varphi(x), & \\ -\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=\lambda_l(u(0,t))(\theta_l-u(0,t))+Q_l, & \\ \left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L}=\lambda_r(u(L,t))(\theta_r-u(L,t))+Q_r, & \end{cases} \tag{1}$$

где $u=u(x,t)$ – температура стержня; $0\le x\le L$ – координата; $0\le t\le T$ – время; L – длина стержня; T – конечный момент времени; $c(u)$ – объемная теплоемкость материала стержня; $q(u)$ – теплопроводность материала стержня; $\varphi(x)$ – функция начального распределения температуры стержня; $\lambda_l(u)$ – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня; $\lambda_r(u)$ – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня; θ_l – температура внешней среды на левом конце стержня; θ_r – температура внешней среды на правом конце стержня; $Q_l=Q_l(t)$ – мощность потока тепла на левом конце стержня; $Q_r=Q_r(t)$ – мощность потока тепла на правом конце стержня. Функции $c=c(u)$, $q=q(u)$, $\lambda_l=\lambda_l(u)$ и $\lambda_r=\lambda_r(u)$ предполагаются непрерывными функциями температуры, заданными для всех значений температуры.

Замена искомой функции

Поскольку в уравнении присутствует член $q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то удобно сделать замену $G(u)=\int\limits_0^u q(\xi)d\xi$. Тогда для функции G получим уравнение $\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2(u)\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, где $a(u)=\sqrt{\dfrac{q(u)}{c(u)}}$ –

[1] Хайрисламов Михаил Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет
E-mail zinatmk@gmail com
[2] Геренштейн Аркадий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет

коэффициент температуропроводности. Функция $G(u)$ является строго монотонной функцией температуры, поэтому обратная функция G^{-1} существует и может быть вычислена в конкретной точке, например, методом дихотомии.

Шаблон схемы. Расчетные формулы

На плоскости (x, t) используется равномерная сетка [2]

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,\ \omega_h = \left\{ x_i = \left(i - \frac{1}{2} \right) h,\ i = 1, 2, ..., N \right\},\ \omega_\tau = \{ t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ... \},$$

где $h = L/N$ – шаг по переменной x, τ – шаг по переменной t. Шаблон предлагаемой схемы представлен на рис. 1. Для обозначения значений сеточной аппроксимации функции G на следующем временном слое используется верхний индекс $(+1)$, на следующем полуцелом временном слое – $\left(+\frac{1}{2}\right)$, а на предыдущем полуцелом временном слое – $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Используемая расчетная формула имеет вид

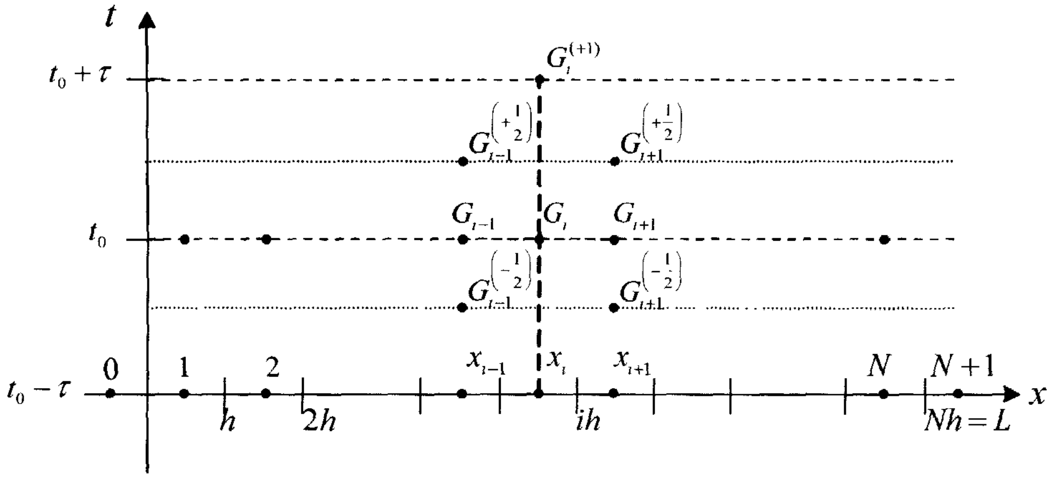

Рис. 1. Шаблон разностной схемы

$$G_i^{(+1)} = (G_i - B) e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}\tau} + A\tau + B, \tag{2}$$

где $A = \frac{1}{2\tau}\left(G_{i-1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)} - G_{i-1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)} + G_{i+1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)} - G_{i+1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \right)$, $B = \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2} - A \cdot \frac{h^2}{2a^2(u_i)}$.

Для расчета значений функции G на временном слое $t = \tau$, а также для вычисления значений функции в полуцелых слоях по времени используются формулы:

$$G_i(\tau) = G_i e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}\tau} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}\tau} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2},\ G_i^{\left(+\frac{1}{2}\right)} = G_i e^{-\frac{a^2(u_i)}{h^2}\tau} + \left(1 - e^{-\frac{a^2(u_i)}{h^2}\tau} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}. \tag{3}$$

Для выполнения краевых условий введены фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ (см. рис. 1): сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних точках, после чего, исходя из краевых условий, задаются ее значения в фиктивных узлах.

Используя следующие аппроксимации второго порядка точности

$$\lambda_l(u(0, t)) = \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2},\ q(u(0, t)) = \frac{3q_1 - q_2}{2},\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{u_1 - u_0}{h},\ u(0, t) = \frac{u_0 + u_1}{2},$$

нетрудно получить формулу определения температуры в фиктивном узле 0:

$$u_0 = \frac{u_1 \left(\frac{3q_1 - q_2}{h} - \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2} \right) + (3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2)\theta_l + 2Q_l}{\frac{3q_1 - q_2}{h} + \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2}}. \tag{4}$$

Аналогичные рассуждения для правого конца приводят к расчетной формуле для узла $N+1$

$$u_{N+1}=\frac{u_N\left(\dfrac{3q_N-q_{N-1}}{h}-\dfrac{3(\lambda_r)_N-(\lambda_r)_{N-1}}{2}\right)+(3(\lambda_r)_N-(\lambda_r)_{N-1})\theta_r+2Q_r}{\dfrac{3q_N-q_{N-1}}{h}+\dfrac{3(\lambda_r)_N-(\lambda_r)_{N-1}}{2}}. \tag{5}$$

2. Тестовая задача

С учетом конечности скорости распространения тепла в [4] были получены приближенные решения одномерной задачи нелинейной теплопроводности на полубесконечной прямой при заданном потоке в начале координат в виде степенной зависимости. В данной работе с использованием идей, изложенных в [4, 5], получено аналитическое решение следующей третьей смешанной задачи на полубесконечной прямой для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^n\frac{\partial u}{\partial x}\right),\qquad t>0,\ x>0, \tag{6}$$

$$u(x,0)=0,\qquad x\ge 0, \tag{7}$$

$$\left.\left(u^n\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=\lambda u|_{x=0}-Qt^{\frac{1}{n}},\quad t>0, \tag{8}$$

где $n>0$ – показатель степени, характеризующий лучистую теплопроводность, $\lambda>0$ – коэффициент теплоотдачи, $Q>0$ – коэффициент, характеризующий мощность теплового потока в начале координат.

В частности, при $n=2$ точное решение задачи (6)–(8) будет таким:

$$u(x,t)=\begin{cases}\sqrt{2\alpha(\alpha t-x)}, & x<\alpha t,\\ 0, & x\ge\alpha t,\end{cases} \tag{9}$$

где $\alpha=\dfrac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2+2\sqrt{2}Q}}{2}$.

3. Результаты численных расчетов

Решалась задача (6)–(8) при $n=2$, $\lambda=1$ Дж/(м^2×с×°С), $Q=5$ Дж/(м^2×с). Шаг по координате h брался равным 1, шаг по времени τ брался равным 0,05. Сравнение численного и точного решений в моменты времени $t=10$, 20, 30 с приведено на рис. 2. Сплошная кривая представляет точное решение.

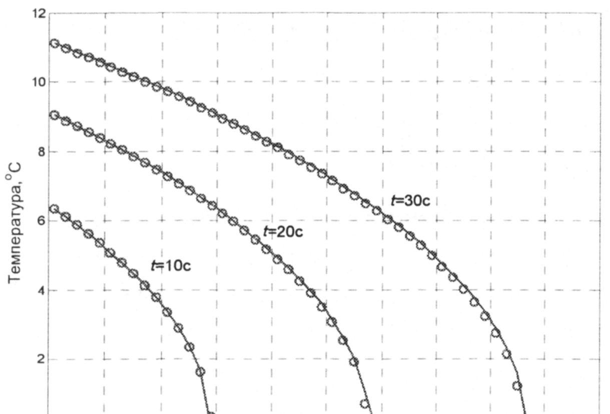

Рис. 2. Численное и точное решения задачи в разные моменты времени

Полученные результаты позволяют говорить о хороших свойствах предложенного численного метода.

Литература

1. Геренштейн, А.В. Нагревание круга движущимся теплоисточником / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 870–871.

2. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности /А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – Вып. 1. – № 15(115). – С. 9–11.

3. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

4. Кудряшов, Н.А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке / Н.А. Кудряшов, М.А. Чмыхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.

5. Зельдович, Я.Б. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец // К 70-летию А.Ф. Иоффе: сб. науч. тр. - М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.

EXPLICIT SCHEME FOR THE SOLUTION OF THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-LINEAR HEAT EQUATION

***M.Z. Khayrislamov*[1], *A.W. Herreinstein*[2]**

In produced paper numerical method for the solution of third boundary value problem for one-dimensional quasi-linear heat equation grounded on the use of explicit finite-difference scheme is offered. The coefficients' dependence on temperature is overcome by introducing the new unknown function – a primitive integral of conduction. Test problem with known exact solution for numerical calculations is proposed.

Keywords: thermal conductivity, quasi-linear heat equation, explicit finite-difference schemes, approximation.

References

1. Gerenshteyn A.V., Mashrabov N. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki.* 2008. Vol. 15, no. 5. pp. 870–871.

2. Herreinstein A.W., Herreinstein E.A., Mashrabov N. Ustoychivye yavnye skhemy dlya uravneniya teploprovodnosti (Steady Obvious Schemes for Equation of Heat Conductivity). Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie». 2008. Issue 1. no. 15(115). pp. 9–11. (in Russ.).

3. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (The theory of difference schemes). Moscow: Nauka, 1989. 616 p. (in Russ.).

4. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2007. Vol. 47, no. 1. pp. 107–117

5. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. *K 70-letiyu A.F. Ioffe*: sb. nauch. tr. (On the 70th anniversary of the A.F. Ioffe: collection of scientific papers). Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1950. pp. 61–71. (in Russ.).

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.

[1] Khayrislamov Mikhail Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University
E-mail zinatmk@gmail com

[2] Herreinstein Arcady Wasilevich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University