УДК 517.17:517.51

МНОГОЧЛЕН КАК СУММА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Эвнин[1]

Доказано, что произвольный многочлен *n*-й степени представим в виде суммы периодических функций, причём минимальное число слагаемых в этой сумме равно *n*+1.

Ключевые слова: периодические функции, контрпримеры в анализе.

Данная заметка продолжает тему построения примеров функций, обладающих неожиданными свойствами [1, 2].

Теорема 1. *Любой многочлен степени* n *представим в виде суммы* $n+1$ *периодических функций.*

Доказательство. Нам понадобится следующий факт.

Лемма. *Многочлен* $P(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ *степени* n *представим в виде суммы* $n+1$ *многочленов* $P(x_1,x_2,...,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_1,x_2,...,x_{n+1})$, *таких, что для каждого* i *многочлен* $f_i(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ *не зависит от переменной* x_i.

Доказательство леммы. Индукцией по степени многочлена докажем, что для любого $k \le n$ многочлен $P_k(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ степени не выше k можно представить в виде суммы $k+1$ многочленов, не зависящих, соответственно, от переменных $x_{n-k+1},x_{n-k+2},...,x_{n+1}$.

База индукции ($k=0$) очевидна (многочлен P_0 – это просто константа).

Индукционный шаг. Пусть многочлен $T(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ получается из многочлена $P_k(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ в результате подстановки вместо переменной x_{n-k+1} числа 0. Тогда

$$P_k(x_1,x_2,...,x_{n+1})=T(x_1,x_2,...,x_{n+1})+x_{n-k+1}P_{k-1}(x_1,x_2,...,x_{n+1}),$$

при этом многочлен $T(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ не зависит от переменной x_{n-k+1}, а многочлен $P_{k-1}(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ имеет степень не выше $k-1$ и к нему применимо предположение индукции.

Доказанное утверждение при $k=n$ даёт формулировку леммы. □

Продолжим доказательство теоремы 1.

Пусть $T_1,T_2,...,T_{n+1}$ – несоизмеримые действительные числа (т.е. $k_1T_1+k_2T_2+...+k_{n+1}T_{n+1} \ne 0$ для произвольных целых чисел $k_1,k_2,...,k_{n+1}$, хотя бы одно из которых не нуль).

На множестве $\mathbb{R}$ введём отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если для некоторых целых чисел $k_1,k_2,...,k_{n+1}$ выполняется равенство

$$x_1-x_2=k_1T_1+k_2T_2+...+k_{n+1}T_{n+1}.$$

Возьмём произвольный класс эквивалентности K и зафиксируем в нём какое-нибудь число z. Любое число $x \in K$ имеет вид

$$x=z+m_1T_1+m_2T_2+...+m_{n+1}T_{n+1},$$

где $m_1,m_2,...,m_{n+1}$ – некоторые целые числа. Пусть $Q(x)$ – многочлен степени n. Будем теперь рассматривать значение многочлена $Q(z+m_1T_1+m_2T_2+...+m_{n+1}T_{n+1})$ как многочлен от целочисленных переменных $m_1,m_2,...,m_{n+1}$. В соответствии с утверждением леммы имеем

$$Q(z+m_1T_1+m_2T_2+...+m_{n+1}T_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1} f_i(m_1,m_2,...,m_{n+1}),$$

[1] Эвнин Александр Юрьевич – доцент, кандидат педагогических наук, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет
E-mail graph98@yandex.ru

где для каждого i многочлен $f_i(m_1, m_2, ..., m_{n+1})$ не зависит от m_i. Это означает, что функция $f_i(m_1, m_2, ..., m_{n+1})$ как функция от переменной x (поскольку числа m_i однозначно определены значением x) имеет период T_i. □

Теорема 2. *Многочлен n-й степени не представим в виде суммы n периодических функций.*

Доказательство. Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n и $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, где для каждого k функция $f_k(x)$ имеет период T_k. Рассмотрим многочлен

$$Q_{n-1}(x) = P_n(x + T_n) - P_n(x).$$

Это многочлен степени $n-1$, и он представим в виде суммы $n-1$ периодических функций:

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k(x + T_n) - f_k(x)).$$

Последовательно уменьшая степень многочлена, в конце концов придём к линейной функции (отличной от константы), являющейся периодической – противоречие! □

Замечание. В статье [3] доказан следующий интересный факт: *никакая рациональная функция, не являющаяся многочленом, не представима в виде суммы конечного числа периодических функций.*

Литература

1. Эвнин, А.Ю. Период суммы двух периодических функций / А.Ю. Эвнин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 56–61.

2. Эвнин, А.Ю. Пример всюду разрывного биективного отображения f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обратное к которому непрерывно в счётном множестве точек / А.Ю. Эвнин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 38–39.

3. Эвнин, А.Ю. Представимость функций в виде суммы конечного числа периодических функций / А.Ю. Эвнин, Д.А. Швед // Математика в школе. – 2013. – № 5. – С. 72–74.

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

POLYNOMIAL AS A SUM OF PERIODIC FUNCTIONS

A.Yu. Evnin[1]

It is proved that an arbitrary polynomial of degree n representatives as a sum of periodic functions, the minimum number of terms in this sum is n+1.

Keywords: periodic functions, counterexamples in the analysis.

References

1. Evnin A.Yu. Period summy dvukh periodicheskikh funktsiy (The period of the sum of two periodic functions). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*. 2005. Issue 5. no. 2(42). pp. 56–61. (in Russ.).

2. Evnin A.Yu. Primer vsyudu razryvnogo biektivnogo otobrazheniy f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, obratnoe k kotoromu nepreryvno v schyetnom mnozhestve tochek (The example of the bijective mapping f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that f is everywhere discontinuous, but an inverse of the f is continuous at a countable set of points). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 38–39. (in Russ.).

3. Evnin A.Yu., Shved D.A. Predstavimost' funktsiy v vide summy konechnogo chisla periodicheskikh funktsiy (Functions' representability as a sum of a finite number of periodic functions). *Matematika v shkole*. 2013. no. 5. pp. 72–74. (in Russ.).

[1] Evnin Alexander Yurievich is Cand. Sc. (Pedagogical), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: graph98@yandex.ru