УДК 514.772

# ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

***Д.Г. Азов***[1]

**Рассматривается гиперболическое уравнение Монжа–Ампера, которое имеет $C^2$-регулярное решение в круге. Получены достаточные условия, при которых существует оценка для радиуса круга.**

*Ключевые слова: поверхности отрицательной гауссовой кривизны, уравнение Монжа–Ампера гиперболического типа, оценка области существования регулярного решения.*

Пусть поверхность

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

имеет гауссову кривизну $K(x, y)$. Известно, что если

$$K(x, y) \le -\alpha^2 < 0, \tag{2}$$

то поверхность (1) не может проектироваться на всю плоскость. Имеет место теорема Н.В. Ефимова [1]: существует $a_0 > 0$ такое, что если $C^2$-гладкая функция $f(x, y)$ задана на квадрате со стороной $a$ и ее график (1) имеет кривизну (2), то $a \le a_0 / \alpha$. Е. Хайнц [2] получил оценку для радиуса круга, на который может проектироваться поверхность с улучшением оценки Н.В. Ефимова: существует $r_0 > 0$ такое, что если $C^2$-гладкая поверхность (1) с кривизной (2) задана на круге радиуса $r$, то $r \le r_0 / \alpha$. В работе [3] Н.В. Ефимов получил оценки для сторон прямоугольника, на который проектируется поверхность (1). Данные результаты были обобщены в работах [4–8].

Учитывая известную формулу

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = K(x, y) \cdot \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^2, \tag{3}$$

результаты Н.В. Ефимова и Е. Хайнца можно сформулировать следующим образом: гиперболическое уравнение Монжа–Ампера (3) не имеет $C^2$-гладких решений в круге радиуса $r > r_0 / \alpha$ или на квадрате со стороной $a > a_0 / \alpha$, если $K(x, y)$ удовлетворяет условию (2).

В работе [9] была доказана теорема: пусть поверхность $z = z(x, y) \in C^2$ с отрицательной кривизной $K(x, y) < 0$ определена на круге $x^2 + y^2 \le R^2$. Если существует постоянная $C > 0$, такая, что $\iint\limits_{x^2+y^2 \le r^2} \frac{dxdy}{|K(x, y)|} \le Cr^m, \ 0 < m < 4, \ r > 0,$ то существует $R_0 > 0$, такая, что $R < R_0$. В этой теореме не требуется отделенность $K(x, y)$ от нуля константой.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = F(x, y, z, z_x, z_y). \tag{4}$$

Пусть $F(x, y, z, z_x, z_y) \le K(x, y) \cdot \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^p$, $p > 1$, $K(x, y) < 0$ – гиперболическое уравнение. Тогда верна теорема 1. Сформулируем ее.

**Теорема 1.** Пусть уравнение (4) имеет $C^2$-регулярное решение в круге $x^2 + y^2 \le R^2$. Если существует постоянная C>0, такая, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le r^2} \frac{dxdy}{|K(x, y)|^{\frac{1}{p-1}}} \le Cr^m, \ 0 < m < \frac{2p}{p-1}, \ r > 0, \tag{5}$$

[1] Азов Дмитрий Георгиевич – доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: azykl@rambler.ru

то

$$R \le \begin{cases} (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]^{\frac{2}{2-m(p-1)}}, \text{ при } m \ne \frac{2}{p-1} \\ e^{\frac{1}{p-1}} \sqrt{\frac{C}{\pi}} (p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}, \text{ при } m = \frac{2}{p-1}. \end{cases} \qquad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства используем интегральную формулу С.Н. Бернштейна:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(\overline{z}_{\varphi}(\rho,\varphi)\right)^2 d\varphi\right) = \int_0^{2\pi}\left(\overline{z}_{\rho}(\rho,\varphi)\right)^2 d\varphi - 2\iint_{x^2+y^2\le r^2}(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)dxdy. \qquad (7)$$

Здесь $z(x,y)\in C^2$, $\overline{z}(\rho,\varphi)=z(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $\rho$, $\varphi$ – полярные координаты.

Введем вспомогательную функцию

$$g(r)=\int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\left(\overline{z}_{\varphi}(\rho,\phi)\right)^2\right)d\varphi .$$

Тогда $g(0)=0$, $g(r)\ge \pi r^2$ и $g'(r)>0$ при $0<r<R$. Пусть $D(r): x^2+y^2\le r^2$. Оценим $g(r)$ сверху, используя неравенство Гельдера:

$$g^p(r)\le\left(\iint_{D(r)}(1+z_x^2+z_y^2)dxdy\right)^p \le \left(\iint_{D(r)}\frac{dxdy}{|K(x,y)|^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{p-1}\iint_{D(r)}|K(x,y)|\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^p dxdy. \qquad (8)$$

Используя (5), (7) и (8), получаем неравенство

$$g''(r)\ge\frac{2g^p(r)}{(Cr^m)^{p-1}} . \qquad (9)$$

Интегрируя неравенство (9) по $\rho\in(0,r)$, получим

$$g'(\rho)g^{-\frac{p+1}{2}}(\rho)\ge\frac{2}{\sqrt{p+1}}r^{-\frac{m(p-1)}{2}}c^{\frac{1-P}{2}}.$$

Переходя к пределу при $\rho\to r$ и интегрируя по $r$ от $R_1$ до $R_2$ $(0<R_1<R_2<R)$ при $m\ne\frac{2}{p-1}$, получаем

$$\frac{1}{p-1}(g^{\frac{1-p}{2}}(R_1)-g^{\frac{1-p}{2}}(R_2))\ge\frac{2}{(2-m(p-1))\sqrt{p+1}}(R_2^{\frac{2-m(p-1)}{2}}-R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}})C^{\frac{1-p}{2}}.$$

Так как $g(r)\ge\pi r^2$, то

$$\frac{1}{p-1}\pi^{\frac{1-p}{2}}R_1^{1-p}\ge\frac{2C^{\frac{1-p}{2}}}{(2-m(p-1))\sqrt{p+1}}\left(R_2^{\frac{2-m(p-1)}{2}}-R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}\right). \qquad (10)$$

Пусть $0<m(p-1)<2$. Устремляя в неравенстве (10) $R_2$ к $R$, получим

$$R^{\frac{2-m(p-1)}{2}}\le\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2}}R_1^{1-p}+R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}. \qquad (11)$$

Минимальное значение правой части неравенства (11) достигается при $R_1=(p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}}$ и равно $(p+1)^{\frac{2-m(p-1)}{2(2p-m(p-1))}}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{(p-1)(2-m(p-1))}{2(2p-m(p-1))}}\left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]$.

Поэтому $R^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \le (p+1)^{\frac{2-m(p-1)}{2(2p-m(p-1))}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{(p-1)(2-m(p-1))}{2(2p-m(p-1))}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]$ и, следовательно,

$$R \le (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]^{\frac{2}{2-m(p-1)}}. \qquad (12)$$

При $2-m(p-1)<0$ в (11) изменится знак неравенства:

$$R^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \ge \frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2}} R_1^{1-p} + R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}.$$

Если $m(p-1)<2p$, то правая часть неравенства достигает максимального значения при $R_1 = (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}}$. Отсюда снова получим неравенство (12).

При $m(p-1)=2$ неравенство (10) будет иметь вид $\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{\pi}{C}\right)^{\frac{1-p}{2}} R_1^{1-p}\sqrt{p+1} + \ln R_1 \ge \ln R_2$.

Минимальное значение левой части неравенства достигается при $R_1 = \sqrt{\dfrac{C}{\pi}}(p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}$ и $\ln R \le \dfrac{1}{p-1} + \ln\sqrt{\dfrac{C}{\pi}}(p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}$. Но тогда

$$R \le e^{\frac{1}{p-1}}\sqrt{\frac{C}{\pi}}(p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}. \qquad (13)$$

Оценка (13) получается из (12) предельным переходом при $m \to \dfrac{2}{p-1}$. Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** *При $p=2$ теорема была доказана в работе [9]. Она имеет геометрический смысл: если гауссова кривизна $K(x,y)$ поверхности $z=z(x,y)$ удовлетворяет условию (5) при $p=2$, то радиус круга $R$, на который может однозначно проектироваться поверхность, удовлетворяет (6).*

**Замечание 2.** *Если $K(x,y) \le -\alpha^2 < 0$, то $\displaystyle\iint\limits_{D(r)} \frac{dxdy}{|K(x,y)|} \le Cr^2$, и при $m=2$ из теоремы 1 следует результат работы [5].*

**Замечание 3.** *Если выполнено условие (2) и $p=2$, то из (13) следует оценка Е. Хайнца $R \le \dfrac{e\sqrt{3}}{\alpha}$.*

**Замечание 4.** *Теорема 1 останется верной, если условие (5) выполняется при $r \ge r_0$, где $r_0$ – некоторая постоянная. В этом случае при доказательстве нужно рассматривать $r > r_0$. При необходимости $r_0$ можно уменьшить, увеличивая значение постоянной $C$.*

**Замечание 5.** *Если условие теоремы $0 < m(p-1) < 2p$ не выполнено, то теорема перестает быть верной. Покажем, что если $m(p-1) > 2p$, то существуют примеры уравнений, которые имеют решение в круге любого радиуса $R$.*

Рассмотрим уравнение

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^n}\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^p.$$

$$\iint_{D(r)} \frac{dxdy}{\left|K(x,y)\right|^{\frac{1}{p-1}}} = \iint_{D(r)} (1+x^2+y^2)^{\frac{n}{p-1}} dxdy \le Cr^{2\left(\frac{n}{p-1}+1\right)},$$

$$m(p-1) = 2n+2(p-1),\ \ 0 < m(p-1) < 2p, \text{ если } n<1.$$

Следовательно, при $n<1$ по теореме 1 радиус круга ограничен.

Пусть $n>1$. Рассмотрим функцию $z=\int_0^r I(t)\,dt$, где $I(t)=\sqrt{\left(1+(1+R^2)^{1-n}-(1-t^2)^{1-n}\right)^{\frac{1}{1-p}}-1}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Эта функция определена в круге радиуса $R$ и удовлетворяет уравнению

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2 = -\frac{n-1}{p-1}\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^n}\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^p.$$

## Литература

1. Ефимов, Н.В. Исследование полной поверхности отрицательной кривизны / Н.В. Ефимов. – М.: Докл. АН СССР, 1953. – 640 с.

2. Heinz, E. Über Flachen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind / E. Heinz // Math. Ann. – 1955. – Vol. 129, № 5. – P. 451–454.

3. Ефимов, Н.В. Оценки размеров области регулярности решений некоторых уравнений Монжа–Ампера / Н.В. Ефимов // Математический сборник. – 1976. – Т. 100(142), № 3(7). – С. 356–363.

4. Азов, Д.Г. Об одном классе гиперболических уравнений Монжа–Ампера / Д.Г. Азов // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, № 1. – С. 153–154.

5. Брысьев, А.Б. Оценка области регулярности решений некоторых нелинейных дифференциальных неравенств / А.Б. Брысьев // Украинский геометрический сборник. – 1985. – Вып. 28. – С. 19–21.

6. Азов, Д.Г. Изометрическое погружение n-мерных метрик в евклидовы и сферические пространства / Д.Г. Азов // Вестник Челябинского государственного университета. – 1994. – №1(2). – С. 12–17.

7. Азов, Д.Г. Погружение методом Д. Блануши некоторых классов полных n-мерных римановых метрик в евклидовы пространства / Д.Г. Азов // Вестник Московского университета. – 1985. – № 5. – С. 72–74.

8. Азов, Д.Г. Некоторые обобщения одной теоремы Н.В. Ефимова о гиперболических уравнениях Монжа–Ампера / Д.Г. Азов // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. науч. тр. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – С. 60–64.

9. Азов, Д.Г. Оценка области однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны / Д.Г. Азов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 4–7.

***Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.***

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 10–14

## ESTIMATION OF THE SIZE OF DOMAIN OF REGULAR SOLUTION FOR A HYPERBOLIC MONGE–AMPERE EQUATION

***D.G. Azov***[1]

The article deals with a hyperbolic Monge–Ampere equation which has a $C^2$-regular solution in the circle. It provides sufficient conditions for the existence of estimate for the circle radius.

*Keywords: surfaces with negative Gaussian curvature, hyperbolic Monge–Ampere equation, estimate of domain of regular solution.*

**References**

1. Efimov N.V. *Issledovanie polnoy poverkhnosti otritsatel'noy krivizny* (Analysis of total surface of negative curvature). Moscow, Dokl. AN SSSR, 1953. 640 p. (in Russ.).
2. Heinz E. Über Flachen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. *Math. Ann.* 1955. Vol. 129, no. 5. pp. 451–454.
3. Efimov N.V. *Matematicheskiy sbornik.* 1976. Vol. 100(142), no. 3(7). pp. 356–363. (in Russ.).
4. Azov D.G. On a class of hyperbolic Monge–Ampere equations. *Russian Mathematical Surveys.* 1983. Vol. 38, no. 1. pp. 170–171. http://dx.doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003390
5. Brys'ev A.B. *Ukrainskiy geometricheskiy sbornik.* 1985. Issue 28. pp. 19–21. (in Russ.).
6. Azov D.G. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta.* 1994. no. 1(2). pp. 12–17. (in Russ.).
7. Azov D.G. *Vestnik Moskovskogo universiteta.* 1985. no. 5. pp. 72–74. (in Russ.).
8. Azov D.G. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya: sb. nauch. tr.* (Differential equations and their applications: collection of scientific papers). Moscow: MGU Publ., 1984. pp. 60–64. (in Russ.).
9. Azov D.G. Estimation of bijective projection area of a surface with negative curvature (Otsenka oblasti odnoznachnoy proektsii poverkhnosti otritsatel'noy krivizny). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika».* 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 4–7. (in Russ.).

***Received 4 September 2013***

[1] Azov Dmitry Georgievich is Associate Professor, Department of Differential and Stochastic Equations, South Ural State University.
E-mail: azykl@rambler.ru