УДК 519.8

СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.Е. Бардин[1], *Н.Г. Солдатова*[2]

Рассмотрен новый подход к принятию решений для двухуровневой статической иерархической системы в условиях действия неопределенных факторов. Формализация оптимального решения базируется на понятиях равновесия по Нэшу, ситуационного сожаления по Сэвиджу и векторной гарантии.

Ключевые слова: иерархическая игра, равновесие по Нэшу, принцип минимаксного сожаления Сэвиджа, векторная гарантия, неопределенность.

Постановка задачи

Рассматривается модель конфликта в виде двухуровневой иерархической игры трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \left\langle \{C,1,2\}, \{U, X_i\}_{i=1,2}, Y^{U\times X}, \{f_i(u,x,y)\}_{i=C,1,2} \right\rangle,$$

где C – игрок верхнего уровня иерархии (Центр), числа 1, 2 – порядковые номера игроков нижнего уровня. Управляющее воздействие Центра есть $u \in U$, стратегия *i*-го игрока нижнего уровня есть $x_i \in X_i$, $i \in \{1,2\}$. Игроки нижнего уровня независимо друг от друга выбирают свои стратегии, в результате реализуется ситуация игры (на нижнем уровне) $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$. В игре Г каждый из трех игроков стремится достичь больших значений своей функции выигрыша $f_j(u,x,y)$, $j \in \{C,1,2\}$. При этом он должен учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$.

Далее наряду с «чистыми» неопределенностями $y \in Y$ будем использовать «информированные неопределенности» вида

$$y(\cdot): U \times X \to Y$$

или (в частном случае)

$$y(\cdot): X \to Y,$$

введенные академиком Н.Н. Красовским при исследовании антагонистической минимаксной позиционной дифференциальной игры [1, с. 353–354].

Перейдем к иерархической «процедуре» принятия решений в игре Г, которая заключается в определенном порядке ходов.

Первый ход за обоими игроками нижнего уровня и Центром: они передают лицу, принимающему решения (ЛПР) и формирующему неопределенности, свои стратегии $x_i \in X_i$ ($i = 1,2$), $u \in U$ (рис. 1).

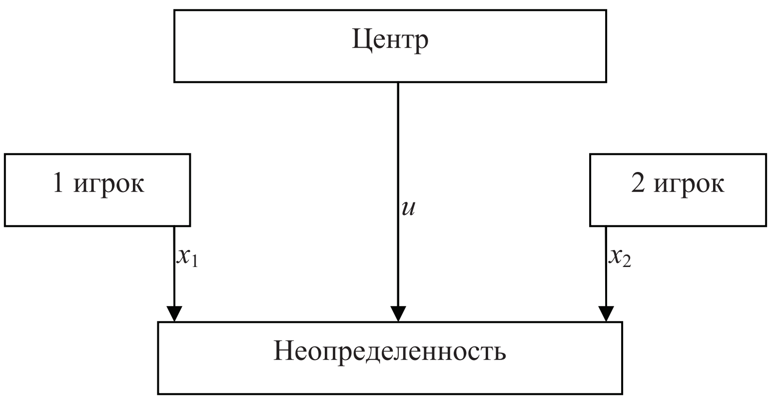

Рис. 1

Второй ход за ЛПР, аналитически конструирующем «ин-

[1] Бардин Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики, Московский государственный областной гуманитарный институт.
E-mail: intch2006@rambler.ru
[2] Солдатова Наталья Геннадьевна – старший преподаватель, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт.
E-mail: solnata@pochta.ru

формированную» неопределенность, именно он определяет функцию

$$y(\cdot): U \times X \to Y$$

согласно

$$\min_{y \in Y} f_c(u,x,y) = f_c(u,x,y(u,x)) = f_c[u,x] \quad \forall u \in U, x \in X \qquad (1)$$

и передает эту функцию $y(u,x)$ Центру (рис. 2). Здесь используем подход из работ [2–4]. Далее будем предполагать, что указанная выше функция $y(u,x): U \times X \to Y$ существует и единственна.

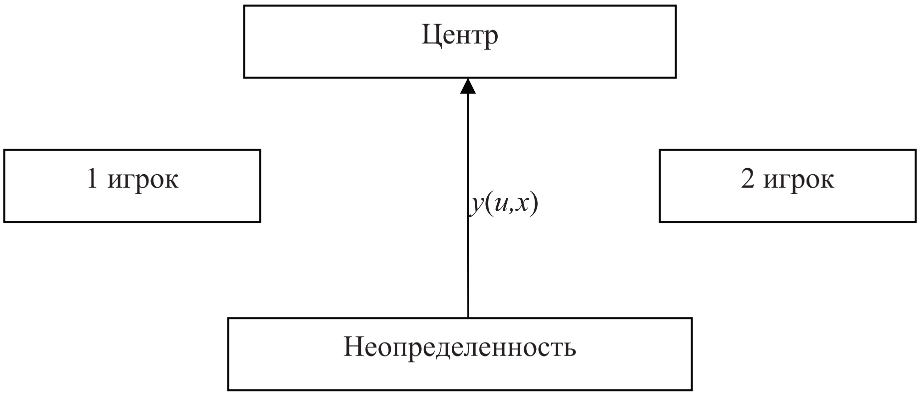

Рис. 2

Отметим, что согласно (1) для любой неопределенности $y \in Y$ имеет место неравенство

$$f_c(u,x,y) \ge f_c[u,x] \qquad (2)$$

при всех $(u,x): U \times X$.

Третий ход за Центром: он формирует стратегию

$$u(\cdot): X \to U, \ u(\cdot) \in U^X,$$

такую, что

$$\max_{u \in U} f_c(u,x,y(u,x)) = \max_{u \in U} f_c[u,x] = f_c[u(x),x] = \tilde{f}_c[x] \quad \forall x \in X \qquad (3)$$

и передает эту стратегию $u(\cdot)$ обоим игрокам нижнего уровня иерархии (рис. 3). Здесь также предполагаем существование и единственность функции $y(x): X \to Y$.

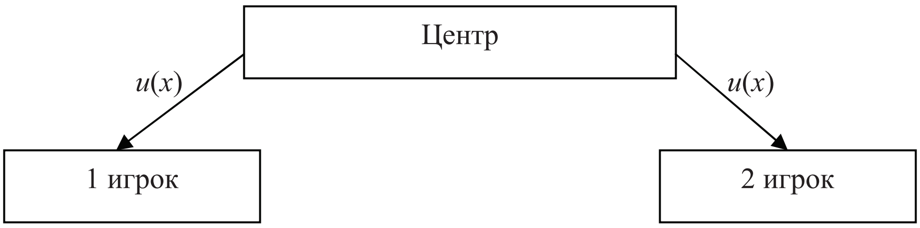

Рис. 3

Четвертый ход за игроками нижнего уровня иерархии:

во-первых, i-ый игрок ($i = 1,2$) строит свою вспомогательную функцию

$$\tilde{f}_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(u(x),x,y) \ \ (i = 1,2); \qquad (4)$$

во-вторых, по определенной в (4) функции $\tilde{f}_i[x]$ каждый игрок нижнего уровня находит так называемую функцию «сожаления» по Сэвиджу [5]

$$\begin{aligned} \Phi_1[x] &= \max_{z \in X_1} \tilde{f}_1[z,x_2] - \tilde{f}_1[x_1,x_2], \\ \Phi_2[x] &= \max_{z \in X_2} \tilde{f}_2[x_1,z] - \tilde{f}_2[x_1,x_2], \end{aligned} \qquad (5)$$

значения которых каждому из игроков $i = 1,2$ желательно получить возможно меньшими;

в-третьих, для вспомогательной бескоалиционной «игры гарантий» (без неопределенности)

$$\Gamma_G = \left\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{\varphi_i(x) = \tilde{f}_i[x] - \Phi_i[x]\}_{i\in\{1,2\}} \right\rangle$$

игроки нижнего уровня находят ситуацию равновесия по Нэшу [6], которая определяется равенствами

$$\begin{aligned} &\max_{x_1\in X_1} \varphi_1(x_1, x_2^e) = \varphi_1(x_1^e, x_2^e), \\ &\max_{x_2\in X_2} \varphi_2(x_1^e, x_2) = \varphi_2(x_1^e, x_2^e). \end{aligned} \tag{6}$$

При этом снова будем предполагать, что ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_G единственна.

Отметим, что равновесная стратегия $x_1^e \in X_1$ из (6) является максимальной по Парето в двухкритериальной задаче

$$\left\langle X_1, \left\{ \tilde{f}_1[x_1, x_2^e], -\Phi_1[x_1, x_2^e] \right\} \right\rangle, \tag{7}$$

тогда увеличение исхода $\tilde{f}_1[x_1, x_2^e]$ влечет увеличение «сожаления» $\Phi_1[x_1, x_2^e]$, а уменьшение «сожаления» $\Phi_1[x_1, x_2^e]$ приводит к уменьшению исхода $\tilde{f}_1[x_1, x_2^e]$. При этом значение функции $\Phi_1[x_1, x_2^e]$ в ситуации равновесия (x_1^e, x_2^e) равно нулю, что является *оптимальным* (наименьшим) значением этой функции на множестве $X = X_1 \times X_2$.

Аналогичное свойство выполняется для стратегии $x_2^e \in X_2$ из равновесной ситуации (x_1^e, x_2^e) в двухкритериальной задаче

$$\left\langle X_2, \left\{ \tilde{f}_2[x_1^e, x_2], -\Phi_2[x_1^e, x_2] \right\} \right\rangle. \tag{8}$$

Раскроем «гарантированный смысл» указанного в (6) равновесия $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в исходной игре Γ, именно:

с одной стороны, при известной игрокам $i \in \{1,2\}$ функции $u(x_1, x_2)$ и любой неопределенности $y \in Y$ выполняется неравенство

$$f_i(u(x^e), x^e, y) \ge \tilde{f}_i[x^e]; \tag{9}$$

с другой, для «замороженной» Центром $u(x)$ и определенной равенством (1) функции $y(u,x)$ будет

$$f_1(u(x_1, x_2^e), x_1, x_2^e, y(u(x_1, x_2^e), x_1, x_2^e)) \le \tilde{f}_1[x^e], \tag{10}$$

$$f_2(u(x_1^e, x_2), x_1^e, x_2, y(u(x_1^e, x_2), x_1^e, x_2)) \le \tilde{f}_2[x^e], \tag{11}$$

для всех $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$.

Еще раз отметим, что

$$\min_{x\in X} \Phi_i[x] = \Phi_i[x^e] = 0, \ \ i \in \{1,2\}, \tag{12}$$

а нулевые и достигаемые в ситуации равновесия x^e значения функций сожаления являются наилучшими для каждого игрока $i = 1,2$.

в-четвертых, игроки нижнего уровня «отправляют» Центру найденную равновесную (единственную) ситуацию $x^e \in X$ (рис. 4).

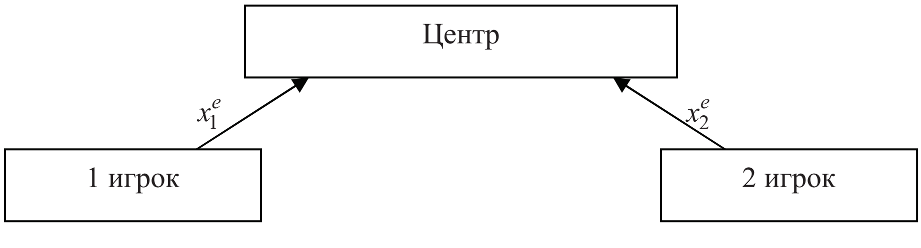

Рис. 4

Последний **пятый ход** состоит в нахождении Центром своей гарантии

$$\tilde{f}_c[x^e] = f_c(u(x^e), x^e, y(u(x^e), x^e)), \tag{13}$$

для нее выполнено неравенство

$$f_c(u(x^e),x^e,y) \ge \tilde{f}_c[x^e]$$

при любой неопределенности $y \in Y$.

Определение 1. Сильно гарантированным равновесием в иерархической игре при неопределенности Γ (с одним игроком верхнего уровня и двумя игроками нижнего уровня) называется набор

$$(x^e, u(\cdot), f_c^g, f_1^g, f_2^g), \tag{14}$$

где $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ – ситуация равновесия по Нэшу в игре гарантий Γ_G, $u(\cdot): X \to U$ есть функция, передаваемая Центром игрокам нижнего уровня, величины

$$f_c^g = f_c[u(x^e),x^e], f_1^g = \tilde{f}_1[x^e], f_2^g = \tilde{f}_2[x^e].$$

При этом предполагается,

во-первых, игроки верхнего и нижнего уровней, а также ЛПР, «отвечающий» за построение «информированной» неопределенности $y(\cdot)$, придерживаются процедуры принятия решений, описанной выше (см. ходы 1–5);

во-вторых, обе функции $y(\cdot)$ из равенства (1) и $y(\cdot)$, определенная условием (3), а также равновесие по Нэшу в игре Γ_G единственны.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ будет равновесной в игре Γ_G тогда и только тогда, когда x^e есть равновесие по Нэшу в игре

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{f_i[x]\}_{i\in\{1,2\}} \right\rangle, \tag{15}$$

где функции выигрыша игроков заданы равенствами (4).

Линейно-квадратичная игра без ограничений (скалярный случай)

Пусть в игре Γ множества $U = X_1 = X_2 = Y = \mathbf{R}$. Скалярные функции выигрыша игроков определены ниже:

$$\begin{gathered}
f_c(u,x,y) = a_{11}u^2 + \sum_{i=1}^{2} a_{22}^{(i)} x_i^2 + a_{33}y^2 + 2\sum_{i=1}^{2} a_{12}^{(i)} u x_i + 2a_{13}uy + 2\sum_{i=1}^{2} a_{23}^{(i)} x_i\, y, \\
f_i(u,x,y) = b_{11}^{(i)}u^2 + b_{22}^{(i)}x_1^2 + b_{33}^{(i)}x_2^2 + b_{44}^{(i)}y^2 + 2b_{12}^{(i)}ux_1 + 2b_{13}^{(i)}ux_2 + 2b_{14}^{(i)}uy + \\
+2b_{23}^{(i)}x_1 x_2 + 2b_{24}^{(i)}x_1 y + 2b_{34}^{(i)}x_2 y + 2b_{10}^{(i)}x_1 + 2b_{20}^{(i)}x_2, \quad i \in \{1,2\}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_c}{\partial y} = 2a_{33}y + 2a_{13}u + 2\sum_{i=1}^{2} a_{23}^{(i)} x_i = 0, \\ a_{33} > 0 \end{cases} \tag{17}$$

получаем, что

$$\min_{y\in Y} f_c(u,x,y) = f_c(u,x,y(u,x))$$

достигается при

$$y(u,x) = -a_{33}^{-1}\left(a_{13}u + \sum_{i=1}^{2} a_{23}^{(i)} x_i \right).$$

Окончательно имеем

$$\begin{gathered}
\tilde{f}_c[u,x] = f_c(u,x,y(u,x)) = a_{33}^{-1}\left[\left(a_{33}a_{11} - a_{13}^2\right)u^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(a_{33}a_{22}^{(i)} - \left(a_{23}^{(i)}\right)^2 \right) x_i^2 + \right. \\
\left. +2\sum_{i=1}^{2}\left(a_{33}a_{12}^{(i)} - a_{13}a_{23}^{(i)}\right) x_i\, u - 4\sum_{i\ne j} a_{23}^{(i)} a_{23}^{(j)} x_i\, x_j \right].
\end{gathered}$$

Из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}_c}{\partial u} = 2a_{33}^{-1}\left[\left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)u + \sum_{i=1}^{2}\left(a_{12}^{(i)}a_{33} - a_{13}a_{23}^{(i)}\right)x_i\right] = 0, \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0 \end{cases} \tag{18}$$

получаем функцию $u(\cdot): X \to U$, именно

$$u(x) = \left(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(a_{12}^{(i)}a_{33} - a_{13}a_{23}^{(i)}\right)x_i\right),$$

которую далее пишем в виде

$$u(x) = c_1x_1 + c_2x_2 . \tag{19}$$

С учетом последнего равенства получаем функции

$$\tilde{f}_i[x,y] = f_i(u(x),x,y) = \left(c_1^2b_{11}^{(i)} + b_{22}^{(i)} + 2b_{12}^{(i)}c_1\right)x_1^2 + \left(c_2^2b_{11}^{(i)} + b_{33}^{(i)} + 2b_{13}^{(i)}c_2\right)x_2^2 + 2\left(c_1c_2b_{11}^{(i)} + c_2b_{12}^{(i)} + \right.$$

$$\left. + c_1b_{13}^{(i)} + b_{23}^{(i)}\right)x_1x_2 + b_{44}^{(i)}y^2 + 2\left(b_{14}^{(i)}c_1 + b_{24}^{(i)}\right)x_1y + 2\left(b_{14}^{(i)}c_2 + b_{34}^{(i)}\right)x_2y + 2b_{10}^{(i)}x_1 + 2b_{20}^{(i)}x_2,$$

которые ниже пишем в виде

$$\tilde{f}_i(x,y) = d_{11}^{(i)}x_1^2 + d_{22}^{(i)}x_2^2 + 2d_{12}^{(i)}x_1x_2 + d_{33}^{(i)}y^2 + 2d_{13}^{(i)}x_1y + 2d_{23}^{(i)}x_2y + 2d_{10}^{(i)}x_1 + 2d_{20}^{(i)}x_2 . \tag{20}$$

Из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}_i[x,y]}{\partial y} = 2d_{33}^{(i)}y + 2d_{13}^{(i)}x_1 + 2d_{23}^{(i)}x_2 = 0, \\ d_{33}^{(i)} > 0, \quad i \in \{1,2\} \end{cases} \tag{21}$$

имеем явный вид функций гарантированных исходов для игроков нижнего уровня

$$\tilde{f}_i[x] = \min_{y \in Y} \tilde{f}_i[x,y] = \tilde{f}_i[x, y_i(x)], \tag{22}$$

где $y_i(x) = h_1^{(i)}x_1 + h_2^{(i)}x_2$, $h_1^{(i)} = -\left(d_{33}^{(i)}\right)^{-1}d_{13}^{(i)}$, $h_2^{(i)} = -\left(d_{33}^{(i)}\right)^{-1}d_{23}^{(i)}$, $i \in \{1,2\}$.

Таким образом

$$\tilde{f}_i[x] = \left(d_{11}^{(i)} + d_{33}^{(i)}\left(h_1^{(i)}\right)^2 + 2d_{13}^{(i)}h_1^{(i)}\right)x_1^2 + \left(d_{22}^{(i)} + d_{33}^{(i)}\left(h_2^{(i)}\right)^2 + 2d_{23}^{(i)}h_2^{(i)}\right)x_2^2 + 2\left(d_{33}^{(i)}h_1^{(i)}h_2^{(i)} + d_{12}^{(i)} + d_{13}^{(i)}h_2^{(i)} + \right.$$

$$\left. + d_{23}^{(i)}h_1^{(i)}\right)x_1x_2 + 2d_{10}^{(i)}x_1 + 2d_{20}^{(i)}x_2, \quad i \in \{1,2\}.$$

Введя новые обозначения, получаем

$$\tilde{f}_i[x] = k_{11}^{(i)}x_1^2 + k_{22}^{(i)}x_2^2 + 2k_{12}^{(i)}x_1x_2 + 2k_{10}^{(i)}x_1 + 2k_{20}^{(i)}x_2. \tag{23}$$

Используя достаточные условия существования равновесия по Нэшу в игре

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{f_i[x]\}_{i\in\{1,2\}} \right\rangle,$$

решаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} = 2k_{11}^{(1)}x_1 + 2k_{12}^{(1)}x_2 + 2k_{10}^{(1)} = 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} = 2k_{22}^{(2)}x_2 + 2k_{12}^{(2)}x_1 + 2k_{20}^{(2)} = 0, \\ k_{11}^{(1)} < 0, \quad k_{22}^{(2)} < 0. \end{cases} \tag{24}$$

Равновесная ситуация x^e в игре $\tilde{\Gamma}$ представима в виде $x^e = (x_1^e, x_2^e)$, где

$$x_1^e = \Delta^{-1}\Delta_1, \quad x_2^e = \Delta^{-1}\Delta_2 \quad и$$
$$\Delta = k_{11}^{(1)}k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)}k_{12}^{(2)} \neq 0, \quad \Delta_1 = k_{10}^{(1)}k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)}k_{20}^{(2)}, \quad \Delta_2 = k_{11}^{(1)}k_{20}^{(2)} - k_{10}^{(1)}k_{12}^{(2)}. \tag{25}$$

Как было отмечено выше, равновесная ситуация x^e в игре $\tilde{\Gamma}$ совпадает с равновесной ситуацией в игре Γ_G. Суммируя полученные результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть в игре Γ заданы множества

$$U = X_1 = X_2 = Y = \mathbf{R}.$$

Скалярные функции выигрыша игроков определены равенствами (16) и выполнены неравенства

$$a_{33} > 0,\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0,\ d_{33}^{(i)} > 0,\ k_{ii}^{(\mathrm{i})} < 0,\ i \in \{1,2\},$$

а также

$$\Delta = k_{11}^{(1)}k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)}k_{12}^{(2)} \neq 0,$$

где величины $d_{33}^{(i)}$, $k_{ii}^{(\mathrm{i})}$, $i \in \{1,2\}$ определены условиями (19)–(24).

Тогда в игре Γ существует равновесно-сильно-гарантированное решение, явный вид которого представлен в (25).

Указанная в теореме система условий будет совместной, если, например, $a_{11} = a_{33} = a_{12}^{(i)} = 1$, $a_{13} = \sqrt{2}$, $a_{23}^{(i)} = 0$, $b_{11}^{(i)} = b_{44}^{(i)} = 1$, $b_{22}^{(i)} = b_{33}^{(i)} = -1$, $b_{12}^{(i)} = b_{13}^{(i)} = -\frac{1}{2}$, $b_{14}^{(i)} = b_{24}^{(i)} = b_{34}^{(i)} = \frac{1}{2}$, $b_{23}^{(i)} = 2$.

Заключение

В работе рассмотрен один из подходов к проблеме формализации риска в игровых моделях иерархических структур, который основан на принципе минимаксного сожаления по Сэвиджу. Для иерархической игры в условиях действия неконтролируемых факторов (неопределенностей) можно предложить другие способы моделирования риска игроков верхнего и нижнего уровней, используя модификации различных принципов принятия оптимальных решений из теории задач при неопределенности [2–4].

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

2. Жуковский, В.И. Риски при конфликтных ситуациях / В.И. Жуковский. – М.: URSS, ЛЕНАНД, 2011. – 328 с.

3. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев. – М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012. – 304 с.

4. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 3–45.

5. Savage, L.Y. The theory of statistical decision / L.Y. Savage // J. American Statistic Association. – 1951. – № 46. – P. 55–67.

6. Nash, J.F. Non-cooperative games / J.F. Nash // Ann. Math. – 1951. – Vol. 54. – P. 289–295.

Поступила в редакцию 5 ноября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 15–21

STRONGLY GUARANTEED EQUILIBRIUM IN ONE HIERARCHICAL TWO-LEVEL GAME UNDER UNCERTAINTY

A.E. Bardin[1], *N.G. Soldatova*[2]

In the article new approach to decision-making for two-level static hierarchical system under uncertain factors is considered. Formalization of the optimum solution is based on the concepts of Nash equilibrium, situational Savage regret and a vector guarantee.

Keywords: hierarchical game, Nash equilibrium, principle of Savage minimax regret, vector guarantee, uncertainty.

References

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games). Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (in Russ.).
2. Zhukovskiy V.I. *Riski pri konfliktnykh situatsiyakh* (Risks at conflicts). Moscow, URSS, LENAND Publ., 2011. 328 p.
3. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Uravnoveshivanie konfliktov i prilozheniya* (Equilibration of conflicts and application). Moscow, URSS, LENAND Publ., 2012. 304 p. (in Russ.).
4. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya.* 2013. Vol. 5. no. 2. pp. 3–45. (in Russ.).
5. Savage L.Y. The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association.* 1951. no. 46. pp. 55–67.
6. Nash J.F. Non-cooperative games. *Ann. Math.* 1951. Vol. 54. pp. 289–295.

Received 5 November 2013

[1] Bardin Aleksandr Evgenievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Informatics, Moscow State Regional Institute of Humanities.
E-mail: intch2006@rambler.ru
[2] Soldatova Natalya Gennadevna is Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities.
E-mail: solnata@pochta.ru