УДК 519.22:539.12.08

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОНОВЫХ ДОЗ ОБЛУЧЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭПР ИЗМЕРЕНИЙ[1]

В.И. Заляпин[2], Ю.С. Тимофеев[3], Е.А. Шишкина[4]

Предложен и реализован алгоритм извлечения характеристик распределения фоновых доз из «зашумленных» результатов измерений для различных методов ЭПР с помощью статистического метода моментов. Получены оценки основных параметров распределения фоновых доз, изучена их точность и надежность.

Ключевые слова: ЭПР измерения, радиационный фон, реконструкция.

Введение

Метод электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) дозиметрии позволяет оценить суммарную поглощенную дозу радиации в эмали зубов, накопленную за время жизни донора (до момента экстракции зуба), включая воздействие как антропогенных, так и естественных источников излучения.

С точки зрения радиобиологических и эпидемиологических исследований последствий техногенных инцидентов, интерес представляет *надфоновая* компонента суммарной накопленной дозы индивидов, оценка которой требует корректного удаления фона[5] из суммарной дозы.

Однако уровни фоновых ЭПР-доз в разных популяциях могут сильно разниться, так как они зависят от радиационного фона конкретной местности, стиля жизни, типичного для населения региона, а также от индивидуальной вариабельности радиационной чувствительности эмали зубов в популяции [1].

Задача идентификации фона осложняется еще и тем, что фоновые уровни близки к пределу детектирования ЭПР дозиметрии, поэтому неопределенность каждого отдельного измерения может быть сопоставима с индивидуальной вариабельностью доз в популяции. В результате распределение *результатов* измерений отличается от распределения *фоновых доз*. Дополнительную трудность создают различия в точности ЭПР измерений, обусловленные различными измерительными методиками, применяемыми для экспериментальных наблюдений. На сегодняшний день для метода ЭПР дозиметрии не существует единого метрологического стандарта и, таким образом, результаты измерений могут включать не только стохастическую погрешность, но и неизвестную систематическую ошибку.

Исходные данные

В результате многолетних исследований [2] в разные годы были выполнены измерения фоновых доз сельских жителей Южного Урала, не подвергавшихся радиоактивному загрязнению (помимо глобальных выпадений) и не проживавших в радиационно загрязненных районах. Измерения проводились тремя лабораториями: ИФМ (Екатеринбург, Россия), HMGU (Мюнхен, Германия) и ISS (Рим, Италия) с использованием различных методик обработки наблюдений. В результате тщательного анализа было выделено шесть модификаций метода ЭПР дозиметрии: три из них соответствуют комбинациям метода приготовления и калибровки в ИФМ, два – вариантам

---

[1] Работа выполнена в рамках Проекта 1.1 Российско-Американского объединенного координационного комитета по изучению последствий радиационных воздействий «Дальнейшее изучение неопределенности и валидация доз в дозиметрической системе реки Теча». А также частично при финансовой поддержке Федерального Медико-Биологического Агентства РФ и Европейского Союза (Проект SOLO Fission-2009-3.1.2 "Эпидемиологические исследования населения Южного Урала, подвергнувшегося радиационному облучению").

[2] Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: vzal@susu.ac.ru

[3] Тимофеев Юрий Сергеевич – научный сотрудник, ООО «Прикладные технологии».

[4] Шишкина Елена Анатольевна – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, Уральский научно-практический центр радиационной медицины.

[5] Под фоновой компонентой в этой работе понимается доза, сформированная в основном естественными источниками излучения, такими, как, например, естественное излучение окружающей среды, космическое излучение, излучение медицинского оборудования и пр.

калибровки в HMGU и один – методу ISS. Возрастные, этнические и гендерные характеристики каждой из 6 групп образцов, измеренных каждым из методов, практически не отличаются. Средний возраст доноров составляет 62 года.

Постановка задачи

Пусть, $\hat{D}_1^j, \hat{D}_2^j, ..., \hat{D}_{n_j}^j$ – измерения, полученные j-ым методом, $j = 1, 2, ..., k$, в аддитивной относительно ошибки измерений модели

$$\hat{D} = D + E \tag{1}$$

Здесь: $\hat{D}$ – измеренное значение фоновой дозы, D – измеряемое значение фоновой дозы, E – ошибка измерений. В дальнейшем предполагается, что распределение фоновых доз логнормально [3] с параметрами $m, s : D = \log N[m; s]$, ошибка измерений E имеет нормальное распределение со средним, зависящим от смещения C_j метода, и дисперсией, определяемой измеряемым фоном, так, что:

$$\hat{D}^j = LogN[m, s] + N[C_j, g_j(D)], \quad j = 1, 2, ..., k. \tag{2}$$

Функции $g_j(D)$ определяются принятой методикой измерений и находятся для разных методов с помощью алгоритма «Performance of EPR dosimetry», разработанного авторами.

Как легко усмотреть из принятой модели (1)–(2), в рамках каждого из методов измерений модель полностью определяется совокупностью трех параметров m, s, C_j.

Требуется по имеющимся измерениям идентифицировать параметры m, s, C_j модели (2) и оценить точность и надежность идентификации.

Идентификация параметров модели

Идентификация параметров модели (1)–(2) в рамках каждой из методик измерений осуществлялась методом моментов. Идея этого метода, предложенного К. Пирсоном в начале XX века, заключается в замене истинных моментов распределения правой части соотношения (2) их выборочными аналогами, полученными с использованием экспериментальных данных $\widehat{D}_i^j$, что приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных параметров m, s, C_j:

$$\left\{ M_i(m, s, C_j) = \widehat{M}_i, i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, ..., k. \right.$$

Здесь M_i – теоретический начальный момент случайной величины $\widehat{D}^j$ порядка i, $\hat{M}_i$ – его эмпирический аналог.

Несложные выкладки дают:

$$M_1 = MD + C_j, \quad M_2 = MD^2 + 2C_j MD + C_j^2 + \int_0^\infty g_j^2(t) f_\eta(t) dt,$$

$$M_3 = MD^3 + 3C_j MD^2 + 3C_j^2 MD + C_j^3 + 3C_j \int_0^\infty g_j^2(t) f_\eta(t) dt + 3\int_0^\infty t g_j^2(t) f_\eta(t) dt.$$

Учитывая, что

$$M[D^p] = e^{pm + \frac{p^2 s^2}{2}}, \quad p = 1, 2, 3,$$

и полагая

$$d_i^2(m, \sigma) = \int_0^\infty g_j^2(t) f_D(t) dt \quad d_{1j}^2(m, \sigma) = \int_0^\infty t g_j^2(t) f_D(t) dt,$$

где

$$f_D(t) = \frac{1}{ts\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2s^2}}, t > 0,$$

окончательно приходим к системе (3) трех уравнений относительно параметров *m*, *s*, *C*.

Система (3) решалась численно модифицированным итерационным методом Ньютона [4].

$$\begin{cases} e^{m+\frac{s^2}{2}}+C_j=\dfrac{1}{n_j}\sum\limits_{i=1}^{n_j}\hat{D}_i^j \\ e^{2m+2s^2}+C_j^2+d_j^2(m,\sigma)+2C_je^{m+\frac{s^2}{2}}=\dfrac{1}{n_j}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(\hat{D}_i^j)^2 \\ e^{3m+\frac{9s^2}{2}}+C_j^3+3C_j^2e^{m+\frac{s^2}{2}}+3C_je^{2m+2s^2}+3C_jd_j^2(m;\sigma)+3d_{1j}^2(m;\sigma)=\dfrac{1}{n_j}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(\hat{D}_i^j)^3 \end{cases} \qquad (3)$$

Усреднение параметров модели

Пусть решение системы (3) при фиксированном значении j дается величинами $\hat{m}_j,\hat{s}_j,\hat{C}_j,\ j=1,2,...,k.$ Заметим, что в силу принятых допущений параметры m,s не зависят от метода обработки, используемого той или иной лабораторией, и должны быть одними и теми же для любых значений $j=1,2,...,k$.

Будем искать оценку этих параметров в классе линейных оценок с наименьшим рассеянием, т.е. положим[1]

$$\begin{cases} m\approx\hat{m}=\sum\limits_j w_j\hat{m}_j,\ s^2\approx\hat{s}^2=\sum\limits_j v_j\hat{s}_j^2, \\ \sum\limits_j w_j=\sum\limits_j v_j=1,\quad V(\hat{m})\to\min,\quad V(\hat{s}^2)\to\min \end{cases} \qquad (4)$$

Задача (4) имеет единственное решение, даваемое соотношениями

$$\hat{m}=\frac{1}{\sum\limits_i\frac{1}{V(\hat{m}_i)}}\sum_j\frac{\hat{m}_j}{V(\hat{m}_j)},\quad \hat{s}^2=\frac{1}{\sum\limits_i\frac{1}{V(\hat{s}_i^2)}}\sum_j\frac{\hat{s}_j^2}{V(\hat{s}_j^2)} \qquad (5)$$

которое и было нами принято в качестве оценок параметров распределения фоновых доз.

Точность и надежность оценивания параметров модели.

Отметим, что вариабельность оценок найденных параметров складывается из вариабельности, порожденной численными процедурами решения системы (3), с одной стороны, и вариабельности, вносимой в оценки случайным характером правых частей системы (3), с другой.

Пусть m_j^0,s_j^0,C_j^0 – некоторое начальное приближение[2] к отыскиваемому решению. Подставляя эти значения в левые части системы (3), найдем *точные* значения правых частей, отвечающие этому приближению, и, таким образом, получим эталонную систему уравнений, *точное* решение которой (m_j^0,s_j^0,C_j^0) нам известно. Применяя к эталонной системе численный метод решения системы, получим *численное* решение $m_j^{num},s_j^{num},C_j^{num}$, сравнение которого с известным точным дает нам информацию о *точности метода*.

Например, можно полагать, что

$$\Delta_M m_j\le|m_j^{num}-m_j^0|,\quad \Delta_M s_j\le|s_j^{num}-s_j^0|,\quad \Delta_M C_j\le|C_j^{num}-C_j^0|.$$

Далее, возмутим правую часть эталонной системы некоторым возмущением $\varepsilon=\left(\varepsilon_{1,}\quad\varepsilon_{2,}\quad\varepsilon_{3,}\right)$ и обозначим её численное решение $m_{j,\varepsilon}^{num},s_{j,\varepsilon}^{num},C_{j,\varepsilon}^{num}$. *Точность численного решения* возмущенной системы можно оценить сравнением численных решений эталонной и возмущенной систем. Например, можно считать, что:

[1] В соотношениях (4)–(5) $V(\xi)$ – дисперсия величины ξ .

[2] В качестве такого приближения было взято решение системы (3), полученное численно.

$$\Delta_\varepsilon m_j \le | m_j^{num} - m_{j,\varepsilon}^{num} |, \quad \Delta_\varepsilon s_j \le | s_j^{num} - s_{j,\varepsilon}^{num} |, \quad \Delta_\varepsilon C_j \le | C_j^{num} - C_{j,\varepsilon}^{num} | .$$

Выше уже было отмечено, что этих соображений недостаточно для изучения вариабельности параметров модели (1)–(2), поскольку они не учитывают изменчивости, порожденной *случайностью* результатов эксперимента $\hat{D}_i^j$, и, соответственно, сопутствующим этой случайности рассеянием $\varepsilon = (\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3)$ правых частей системы (3).

В силу центральной предельной теоремы (например [5]), в первом приближении можно считать, что компоненты правых частей системы (3) совместно нормальны со средними $\{M_1, M_2, M_3\}$ и ковариационной матрицей

$$K = \left\| k_{ij} \right\|_{i,j=1,2,3}, k_{ij} = M(\hat{M}_i - M_i)(\hat{M}_j - M_j) = M\varepsilon_i\varepsilon_j ,$$

элементы которой можно оценить по экспериментальным данным $\hat{D}_i^j$:

$$k_{ij} = M\left(\frac{1}{n}\sum_s \left(\widehat{D}_s^i - M_i\right) \cdot \frac{1}{n}\sum_l \left(\widehat{D}_l^j - M_j\right) \right) = \frac{1}{n}\left(M_{i+j} - M_i \cdot M_j\right).$$

Величины M_q естественно оцениваются как $\widehat{M}_q$.

Пусть $E_R^\varepsilon = \left\{ \varepsilon^T K^{-1} \varepsilon \le R^2 \right\}$ – эллипсоид рассеяния возмущений ε радиуса R, отвечающий надежности $0 \ll p < 1$.

Надежность и радиус эллипсоида связаны соотношением

$$P\left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in E_R^\varepsilon \right\} \ge p , \tag{6}$$

$$P\left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in E_R^\varepsilon \right\} = 2\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^R r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr \ge p ,$$

которое позволяет отыскивать радиус R эллипсоида, в котором с надежностью p заключено рассеяние правых частей системы:

$$\sqrt{2\pi} \cdot \Phi(R) = \frac{p}{4\pi} + R \cdot e^{-\frac{R^2}{2}}, \quad \Phi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} dr . \tag{7}$$

Изменчивость параметров модели

Известно (например [5]), что решения системы метода моментов, являясь статистиками первого типа, состоятельны и асимптотически совместно нормальны. Обозначим для сокращения записи эти решения через[1] U_j :

$$U_j = (\hat{m}_j, \hat{s}_j, \hat{C}_j)^T, \quad \Delta U_j = (\hat{m}_j - m_j, \hat{s}_j - s_j, \hat{C}_j - C_j)^T .$$

Тогда, в первом приближении, имеет место равенство

$$\frac{\partial M}{\partial U} \cdot \Delta U_j = \Delta\hat{M} = \varepsilon .$$

Здесь $\dfrac{\partial M}{\partial U}$ – матрица производных левых частей системы (3).

Если ε – вектор возмущений правых частей системы – лежит в эллипсоиде рассеяния E_R^ε, то в первом приближении вектор погрешностей решения этой системы – в эллипсоиде E_R^U , который дается соотношением

$$E_R^U = \left\{ \Delta U_j : \Delta U_j^T \cdot K_U^{-1} \cdot \Delta U_j \le R^2 \right\},$$

где матрица

[1] В дальнейшем все векторы – матрицы-столбцы, а операция умножения – обычное матричное умножение, значок T в показателе – знак транспонирования. Таким образом $(a_1, a_2, a_3)^T$ – столбец.

$$K_U = \left(\frac{\partial M}{\partial U}\right)^{-1} \cdot K \cdot \left(\left(\frac{\partial M}{\partial U}\right)^{T}\right)^{-1} \qquad (8)$$

– ковариационная матрица вектора погрешностей решений системы (3). При этом, очевидно, имеет место тождество $P\left\{\varepsilon \in E_R^{\varepsilon}\right\} = P\left\{\Delta U_j \in E_R^U\right\}$. Из этого тождества заключаем, что рассеяние правых частей системы (3) в эллипсоиде $E_R^{\varepsilon} = \left\{\varepsilon^T K^{-1} \varepsilon \le R^2\right\}$ с надежностью p обеспечивает рассеяние погрешностей решения этой системы в эллипсоиде

$$E_R^U = \left\{\Delta U_j : \Delta U_j^T \cdot K_U^{-1} \cdot \Delta U_j \le R^2\right\}.$$

Одновременно, соотношение (8) дает возможность найти веса $V(m_j)$ и $V(s_j^2)$ для формулы усреднения (5) и оценить точность определения смещения C_j метода измерений.

Результаты

В таблице приведены результаты расчетов индивидуальных значений параметров $\hat{m}_j, \hat{s}_j, \hat{C}_j$ и усредняющие веса. Взвешенное решение при этом оказывается равным $m = 4,44, s = 0,5$, откуда средняя фоновая доза для жителей Челябинской области, накапливаемая за 62 года жизни, оценивается величиной $M(D) = 96,073$ мГр.

Индивидуальные решения системы

Метод	*m*	*s*	*C*	*w*	*v*
IMP (2001-2002)	4,68	0,53	32	0,159	0,036
IMP (2003)	5,36	0,18	–160	0,022	0,011
GSF (after 2003)	4,94	0,39	–38	0,587	0,728
GSF (before 2003)	2,93	0,87	20	0,232	0,225

Иными словами, мощность фоновой дозы в эмали зубов для сельских жителей Южного Урала составляет 1.5 мГр/год.

Полученная модель фоновых доз будет использована в качестве референтного образца для оценки систематических ошибок для разных методик ЭПР дозиметрии с целью гармонизации экспериментальных данных и их совместного анализа.

Литература

1. Вариабельность радиационной чувствительности эмали зубов / Е.А. Шишкина, Е.И. Толстых, М.О. Дегтева и др. // Аппаратура и новости радиационных измерений. – 2012. – № 2(69). – С. 41–50.

2. Harmonization of dosimetric information obtained by different EPR methods: Experience of the Techa river study / A. Volchkova, E.A. Shishkina, D. Ivanov *et al.* // Radiation Measurements. – 2011. – Vol. 46. – Issue 9. – P. 801–807.

3. Shishkina, E.A. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region / E.A. Shishkina, P. Fattibene, A. Wieser *et al.* // In Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection - Radiation protection: from knowledge to action. – 2006. – CD, № TA-33. – P. 12.

4. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

5. Боровков, А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков – М.: Наука, 1984. – 472 с.

Поступила в редакцию 12 января 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 22–27

STATISTICAL RECONSTRUCTION OF THE DISTRIBUTION OF BACKGROUND DOSES BASED ON THE RESULTS OF THE EPR MEASUREMENTS

V.I. Zalyapin[1], *Yu.S. Timofeev*[2], *E.A. Shishkina*[3]

Proposed and implemented algorithm to extract the characteristics of the distribution of background doses of "noisy" measurements for different EPR methods using the statistical method of moments. There were obtained estimates of the main parameters of the distribution of background doses. Studied the accuracy and reliability of the estimates.

Keywords: EPR measurements, the background radiation, reconstruction.

References

1. Shishkina E.A., Tolstykh E.I., Degteva M.O., Ivanov D.V., Aladova E.E. Variabel'nost' radiatsionnoy chuvstvitel'nosti emali zubov (Variability of the Radiation Sensitivity for Tooth Enamel of the Ural Residents). *Apparatura i novosti radiatsionnykh izmereniy* (Radiation control equipment and news). 2012. no. 2(69). pp. 41–50. (in Russ.).

2. Volchkova A., Shishkina E.A., Ivanov D., Timofeev Yu., Fattibene P., Della Monaca S., Wieser A., Degteva M.O. Harmonization of dosimetric information obtained by different EPR methods: Experience of the Techa river study. *Radiation Measurements.* 2011. Vol. 46. Issue 9. pp. 801–807. http://dx.doi.org/10.1016/j.radmeas.2011.03.036

3. Shishkina E.A., Fattibene P., Wieser A., Degteva M.O., Onori S., Ivanov D.V., Shved V.A., Bayankin S.N., Knyazev V.A., Vasilenko E.K., Gorelov M. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region. *Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection – Radiation protection: from knowledge to action.* 2006. CD, № TA-33. p. 12.

4. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1977. 744 p. (in Russ.).

5. Borovkov A.A. *Matematicheskaya statistika* (Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1984. 472 p. (in Russ.).

Received 12 January 2014

[1] Zalyapin Vladimir Illich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional analysis Department, South Ural State University.
E-mail: vzal@susu.ac.ru
[2] Timofeev Yuriy Sergeevich is Researcher, Applied Technologies, Ltd.
[3] Shishkina Elena Anatol'evna is Cand. Sc. (Biology), Senior Staff Scientist, Ural Research Center for Radiation Medicine.