УДК 517.988.52

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

М.Л. Катков [1]

М.А. Красносельским был рассмотрен класс монотонных вогнутых операторов. Существенным развитием этой теории явилось определение В.И. Опойцевым понятия гетеротонности. В настоящей работе доказывается сходимость к неподвижной точке итераций для положительного оператора без предположения монотонности при существенном расширении понятия вогнутости.

Ключевые слова: положительный оператор, монотонный оператор, вогнутый оператор, гетеротонный оператор.

Введение

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K, $K(u_0)$ – компонента, порожденная элементом $u_0 \in K$ (см. [1]).

Определение метрики Биркгофа

$$\rho(x;y) = \min\left\{\alpha:\ e^{-\alpha}x \le y \le e^{\alpha}x;\quad x,y \in K(u_0);\quad \alpha \ge 0\right\}.$$

Определение u_0-сжатия. *Положительный оператор T, действующий в X, будем назвать u_0-сжатием, если он удовлетворяет двум условиями:*

1. Для любого $x \in K(u_0)$ $\quad Tx \in K(u_0)$;

2. Для любого $x \in K(u_0)$ существует $q = q(x,t)$, такое, что $0 < q(x,t) < 1$, при котором из неравенств $e^{-t}x \le y \le e^{t}x$ следуют неравенства $e^{-qt}Tx \le Ty \le e^{qt}Tx$.

Отметим, что u_0-вогнутый монотонный оператор является u_0-сжатием.

Теорема. *Пусть оператор является T u_0-сжатием и имеет неподвижную точку $x_* \in K(u_0)$. Тогда для любого $y_0 \in K(u_0)$ последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = Ty_{n-1}$, сходится к x_* по метрике p.*

Доказательство. Пусть $t_n = \rho(y_n, x_*)$. Последовательность $\{t_n\}$ не возрастает.

Предположим, что

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n \ne 0.$$

Рассмотрим шар с центром в точке x_* радиуса t. Оператором T этот шар отображается в шар с центром в точке x_* радиуса $q(x_*,t)t$, так как для любого y из неравенств $e^{-t}x_* \le y \le e^{t}x_*$ следуют неравенства $e^{-qt}x_* \le Ty \le e^{qt}x_*$.

Пусть $\varepsilon = t - qt$. Положим $z = \alpha x_* + \beta y_n$, где $\alpha + \beta = 1$; $\alpha > 0$; $\beta > 0$. Очевидно, что n и β можно выбрать таким образом, чтобы $\rho(x_*, z) \le t$ и $\rho(z, y_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для этого достаточно, чтобы n удовлетворяло неравенству $e^{tn} < e^{t} + e^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1$, а β принадлежало интервалу

$$\left(\frac{e^{tn} - e^{\frac{\varepsilon}{2}}}{e^{tn} - 1}; \frac{e^{t} - 1}{e^{tn} - 1}\right).$$

Получаем противоречие

[1] Катков Михаил Львович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: katkovml@yandex.ru

$$t \le \rho\left(x_*; y_{n+1}\right) \le \rho\left(x_*, Tx\right) + \rho\left(Tz; Ty_n\right) \le qt + \frac{\varepsilon}{2};$$

или

$$t \le t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

Утверждение доказано.

Литература

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов / В.И. Опойцев // Труды Московского математического общества. – 1978. – Т. 36. – С. 237–380.

Поступила в редакцию 24 декабря 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 28–29

CONCEPT EXTENSION FOR CONCAVE OPERATOR

M.L. Katkov[1]

The class of monotone concave operators is considered by M.A. Krasnosel'sky. Significant development of this theory starts with V.I. Opoytsev's definition of heterotone. In this paper we prove the convergence to the fixed point for a positive operator's iterations without hypothesis about monotonicity with a significant extension of the idea of concavity.

Keywords: positive operator, monotone operator, concave operator, heterotone operator.

References

1. Krasnosel'skiy M.A., Zabreyko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* (Geometrical methods of nonlinear analysis). Moscow, Nauka Publ., 1975. 512 p. (in Russ.).

2. Opoytsev V.I. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. 1978. Vol. 36. pp. 237–380. (in Russ.).

Received 24 December 2013

[1] Katkov Mikhail Lvovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics) Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: katkovml@yandex.ru