УДК 532.529

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ ДВУХФАЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД[1]

Ю.М. Ковалев[2]

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели, описывающей переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ - твердые частицы. Было показано, что уравнение сохранения полной энергии смеси не является инвариантным относительно преобразования Галилея. Следовательно, данная модель не может быть использована при анализе перехода конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.

Введение

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов.

В настоящее время на практике ослабление УВ в газе осуществляется путем применения различных экранирующих систем в виде сплошных, перфорированных и разрушающихся перемычек. Один из основных недостатков сплошных и перфорированных перемычек состоит в их весьма большой материалоемкости и, соответственно, большой величине объемного содержания α твердого конденсированного вещества ($\alpha \approx 1 \div 0{,}1$). Указанный недостаток в меньшей степени относится к перемычкам, разрушающимся при взаимодействии с УВ и образующим экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1]. Поэтому с особой остротой встает проблема разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

В настоящей статье на примере анализа инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели аэровзвеси [7], применяемой для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, покажем, к чему может привести ситуация, когда расчеты и эксперимент проведены в разных системах координат.

Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим математическую модель течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [7], и проведем оценку ее на инвариантности относительно преобразования Галилея.

Система уравнений сохранения двухфазной аэровзвеси [7] имеет следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = J, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = -J, \qquad (2)$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13-01-00072.

[2] Ковалёв Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: yum_kov@mail.ru

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n v_2}{\partial x}=0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1{}^2}{\partial x}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}=-f+Jv_2\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2{}^2}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}=f-Jv_2\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=\begin{cases} q, T_2<T_S \\ Je_2, T_2\ge T_S\end{cases}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\rho_1E_1+\rho_2E_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1v_1E_1+\rho_2v_2E_2+(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)p\right]=0\,, \tag{7}$$

$$e_1=c_p(T_1-T_0)-\frac{p}{\rho_1{}^{\circ}},\quad p=\frac{\rho_1{}^{\circ}R_1T_1}{1-\beta\rho_1{}^{\circ}}\,, \tag{8}$$

$$e_2=c_2(T_2-T_0)+Q^{\circ}-\frac{p}{\rho_2{}^{\circ}},\quad E_i=e_i+\frac{v_i{}^2}{2}\,, \tag{9}$$

$$\rho_1=\rho_1{}^{\circ}\alpha_1,\ \rho_2=\rho_2{}^{\circ}\alpha_2,\ \rho_2{}^{\circ}=\text{const}\,, \tag{10}$$

$$q=n\pi d\lambda_1 Nu(T_1-T_2)\,, \tag{11}$$

$$f=n\pi d^2\rho_1{}^{\circ}C_d(v_1-v_2)\left|v_1-v_2\right|/8\,, \tag{12}$$

$$J=\pi nd^2\rho_2{}^{\circ}u_s\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\varphi}. \tag{13}$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; ρ_i°,α_i $(i=1,2)$ – истинные плотности и объемные содержания фаз; ρ_i,v_i,T_1,e_i,E_i – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i-ой фазы; Q° – теплота химической реакции при $T_2=T_0, p=p_0$; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси; β – ковольюм; c_p и c_2 – теплоемкости фаз; λ_1 – теплопроводность газовой фазы; R_1 – универсальная газовая постоянная; C_d и Nu – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса (*Re*) и Прандтля (*Pr*) относительного движения фаз; d – диаметр частиц, u_s и φ – эмпирические константы, характеризующие скорость горения топлива. Уравнения (1)–(3) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (4)–(5) – уравнения импульса газа и частиц; (6)–(9) – уравнения энергии частиц и смеси в целом; (8)–(10) – уравнения состояния; (11)–(13) – уравнения, определяющие члены теплового (q), силового (f) и массового (J) взаимодействия между фазами соответственно. Запишем исходную систему уравнений в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1н}=v_1+D\,, \tag{14}$$

$$v_{2н}=v_2+D\,, \tag{15}$$

Координата будет определяться из уравнения:

$$x_н=x+Dt\,, \tag{16}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_н}\,, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_н}\right)D\,. \tag{18}$$

Таким образом, уравнение (1) с учетом (14)–(18) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1}{\partial x_н}D+\frac{\partial \rho_1(v_{1н}-D)}{\partial x_н}=J\ ,$$

или

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1}{\partial x_н}D+\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}-\frac{\partial \rho_1 D}{\partial x_н}=J\ .$$

Получаем:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}=J\ . \qquad (19)$$

Аналогично, уравнения (2) и (3) с учетом (14)–(18) принимают вид:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_{2н}}{\partial x_н}=-J\ , \qquad (20)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n v_{2н}}{\partial x_н}=0\,. \qquad (21)$$

Запишем уравнение (4) в новой системе координат:

$$\frac{\partial \rho_1(v_{1н}-D)}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1(v_{1н}-D)}{\partial x_н}D+\frac{\partial \rho_1(v_{1н}-D)^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}=-f+J(v_{2н}-D)\,,$$

или

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial t}-\frac{\partial \rho_1 D}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_{1н}D}{\partial x_н}-\frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_н}+\frac{\partial \rho_1 {v_{1н}}^2}{\partial x_н}-2\frac{\partial \rho_1 v_{1н}D}{\partial x_н}+\frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}=-f+J(v_{2н}-D)\,.$$

Используя (19) получаем:

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 {v_{1н}}^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}=-f+Jv_{2н}\,. \qquad (22)$$

Аналогично, получается уравнение (5) с учетом (20):

$$\frac{\partial \rho_1 v_{2н}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 {v_{2н}}^2}{\partial x_н}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}=f-Jv_{2н}\,. \qquad (23)$$

Рассмотрим уравнение (6):

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_н}D+\frac{\partial \rho_2 e_2(v_{2н}-D)}{\partial x_н}=\begin{cases} q, T_2<T_S \\ Je_2, T_2\ge T_S \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_н}D+\frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н}-\frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_н}=\begin{cases} q, T_2<T_S \\ Je_2, T_2\ge T_S \end{cases}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н}=\begin{cases} q, T_2<T_S \\ Je_2, T_2\ge T_S \end{cases}. \qquad (24)$$

Рассмотрим уравнение энергии (7), учитывая (14)–(21):

$$\frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1+\frac{(v_{1н}-D)^2}{2}\right)+\rho_2\left(e_2+\frac{(v_{2н}-D)^2}{2}\right)\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1+\frac{(v_{1н}-D)^2}{2}\right)+\rho_2\left(e_2+\frac{(v_{2н}-D)^2}{2}\right)\right)}{\partial x_н}D+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1(v_{1н}-D)\left(e_1+\frac{(v_{1н}-D)^2}{2}\right)+\rho_2(v_{2н}-D)\left(e_2+\frac{(v_{2н}-D)^2}{2}\right)+(\alpha_1(v_{1н}-D)+\alpha_2(v_{2н}-D))p\right]=0\,.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho_1(v_{1н}-D)^2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho_2(v_{2н}-D)^2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 e_1 D}{\partial x_н}+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho_1 D(v_{1н}-D)^2}{\partial x_н}+$$

$$+\frac{\partial\rho_2 e_2 D}{\partial x_н}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_2(v_{2н}-D)^2}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_{1н}}{\partial x_н}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_1 v_{1н}(v_{1н}-D)^2}{\partial x_н}-\frac{\partial\rho_1 e_1 D}{\partial x_н}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_1 D(v_{1н}-D)^2}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_2 v_{2н}(v_{2н}-D)^2}{\partial x_н}-\frac{\partial\rho_2 e_2 D}{\partial x_н}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_2 D(v_{2н}-D)^2}{\partial x_н}+\frac{\partial\alpha_1 p(v_{1н}-D)}{\partial x_н}+\frac{\partial\alpha_2 p(v_{2н}-D)}{\partial x_н}=0.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\frac{\partial\rho_1\left(e_1+\frac{v_{1н}{}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2\left(e_2+\frac{v_{2н}{}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}\right)+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial x_н}\right)-$$

$$-D\left(\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}{}^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)-D\left(\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}{}^2}{\partial x_н}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)+$$

$$+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}\left(e_1+\frac{v_{1н}{}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}\left(e_2+\frac{v_{2н}{}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+\frac{\partial}{\partial x_н}\left[\left(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н}\right)p\right]=0.$$

Согласно (19) и (20) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (22) и (23) будут равны $\left(Df-DJv_{2н}\right)$ и $-\left(Df+DJv_{2н}\right)$. В результате получим:

$$\frac{\partial\left(\rho_1 E_{1н}+\rho_2 E_{2н}\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_{1н}E_{1н}+\rho_2 v_{2н}E_{2н}+(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н})p\right]+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}=0. \qquad (25)$$

В новой системе координат в уравнении полной энергии смеси (25) появился дополнительный член

$$\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н},$$

который приводит к неинвариантности относительно преобразования Галилея уравнение полной энергии смеси.

Для понимания причины неинвариантности относительно преобразования Галилея уравнения полной энергии смеси разобьем уравнение (7) на элементы. С этой целью получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно в случае $T_2\le T_S$ и проверим их на инвариантность относительно преобразования Галилея.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы (4) на v_1, а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы (5) на v_2, получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно

$$v_1\left[\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1^2}{\partial x}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}\right]=-fv_1,\quad v_2\left[\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2^2}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}\right]=fv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид

$$\frac{\partial\rho_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial x}+\alpha_1 v_1\frac{\partial p}{\partial x}=-fv_1, \qquad (26)$$

$$\frac{\partial\rho_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha_2 v_2\frac{\partial p}{\partial x}=fv_2, \qquad (27)$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения кинетической энергии газа и частиц (26) и (27) соответственно. С этой целью переходим в новую систему координат в соответствии с соотношениями (14)–(18). В новой системе координат уравнение сохранения кинетической энергии газа имеет следующий вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_1\left(v_{1н}-D\right)^2}{\partial t}+\frac{1}{2}D\frac{\partial\rho_1\left(v_{1н}-D\right)^2}{\partial x_н}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_1\left(v_{1н}-D\right)\left(v_{1н}-D\right)^2}{\partial x_н}+\alpha_1\left(v_{1н}-D\right)\frac{\partial p}{\partial x_н}=-f\left(v_{1н}-D\right).$$

После проведения необходимых преобразований получим

$$\frac{\partial\rho_1\frac{{v_{1н}}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}\frac{{v_{1н}}^2}{2}}{\partial x_н}-D\left(\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}v_{1н}}{\partial x_н}\right)+\frac{1}{2}D^2\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}\right)+\alpha_1 v_{1н}\frac{\partial p}{\partial x_н}-\alpha_1 D\frac{\partial p}{\partial x_н}=-fv_{1н}+fD.$$

Здесь четвертый член в левой части уравнения равен нулю в соответствии с уравнением (1), а третий в соответствии с уравнением (4) равен

$$\alpha_1 D\frac{\partial p}{\partial x_н}+fD.$$

Таким образом, в новой системе координат уравнение сохранения кинетической энергии газа записывается в виде

$$\frac{\partial\rho_1\frac{{v_{1н}}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}\frac{{v_{1н}}^2}{2}}{\partial x_н}+\alpha_1 v_{1н}\frac{\partial p}{\partial x_н}=-fv_{1н}. \qquad (28)$$

Уравнение (28) полностью совпадает с уравнением (26), следовательно, уравнение сохранения кинетической энергии газа (26) инвариантно относительно преобразования Галилея. Аналогично показывается инвариантность относительно преобразования Галилея уравнения сохранения кинетической энергии частиц (27).

Таким образом, из четырех составляющих, входящих в уравнение сохранения полной энергии смеси (7), три являются инвариантными относительно преобразования Галилея: уравнение сохранения внутренней энергии частиц (6), уравнение сохранения кинетической энергии газа (26) и уравнение сохранения кинетической энергии частиц (27). Следовательно, неинвариантным относительно преобразования Галилея является уравнение сохранения внутренней энергии газа. А это значит, что математическая модель, представленная уравнениями (1)–(13), не может правильно описывать условия зажигания твердого топлива.

Заключение

По результатам проведенного в работе анализа инвариантности относительно преобразования Галилея законов сохранения математической модели перехода конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв можно сделать следующие выводы:

1. Уравнения сохранения массы (1), (2), импульса (4), (5), внутренней энергии конденсированной фазы (6), кинетической энергии фаз (26) и (27) являются инвариантными относительно преобразования Галилея;

2. Уравнения сохранения внутренней энергии газовой фазы и уравнение сохранение полной энергии смеси (7) не являются инвариантными относительно преобразования Галилея;

3. Данная математическая модель не может правильно прогнозировать переход конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв.

Автор выражает свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток/ Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.

2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.

4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.

5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 13. – № 27(286). – С. 69–73.

7. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматуллин // Известия АН СССР. Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

Поступила в редакцию 16 января 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2014, vol. 6, no. 1, pp. 30–35

ANALYSIS OF INVARIANCE UNDER GALILEAN TRANSFORMATION OF TWO-PHASE MATHEMATICAL MODELS OF HETEROGENEOUS MEDIA

Yu.M. Kovalev[1]

The article analyzes the invariance under Galilean transformation of mathematical model describing the transition of combustion into an explosion of solid monopropellant in a two-phase heterogeneous medium: gas is solid. It has been shown that the equation of total energy conservation of the mixture is not invariant under Galilean transformation. Consequently, this model can not be used in the analysis of the transition of convective combustion of solid unitary fuel into explosion.

Keywords: mathematical model, invariance, multi-component mixture.

References

1. Kovalev Yu.M., Cheremokhov A.Yu. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya “Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov”.* 1997. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

2. Kuropatenko V.F. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal.* 2011. Vol. 84, no. 1. pp. 74–92. (in Russ.).

3. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Doklady Akademii nauk.* 1989. Vol. 308, no. 5. pp. 1074–1078. (in Russ.).

4. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Fizika goreniya i vzryva.* 1989. Vol. 25, no. 6. pp. 72–79. (in Russ.).

5. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti nekotorykh matematicheskikh modeley mnogokomponentnykh sred (Analysis of the invariance some mathematical models of multicomponent media). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika».* 2012. Issue 6. no. 11(270). pp. 4–7. (in Russ.).

6. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti otnositel'no preobrazovaniya Galileya nekotorykh modeley matematicheskikh mnogokomponentnykh sred (Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multicomponent Media). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie».* 2012. Issue 13. no. 27(286). pp. 69–73. (in Russ.).

7. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatullin Kh.A. *Izvestiya AN SSSR. Seriya “Mekhanika zhidkosti i gaza”.* 1981. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

Received 16 January 2014

[1] Kovalev Yury Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: yum_kov@mail.ru