УДК 517.948.00

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

***А.И. Сидикова*[1], *С.И. Бельков*[2]**

До последнего времени при решении данной задачи повышали точность среднеквадратичного приближения за счет разработки оптимальных методов. Недостатком среднеквадратичного приближения является не гарантированность достаточной точности приближений при конкретных значениях *t*. Потому, в настоящей работе предлагается алгоритм определения равномерного приближения. При этом дается равномерная оценка этого приближения.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

Постановка задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, \quad t>0, \tag{1}$$

решение $u(x,t)\in C([0,1]\times[0,\infty))\bigcap C^{2,1}((0,1)\times(0,\infty))$, удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u(x,0)=0; \quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=h(t); \qquad t\ge 0, \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}+ku(1,t)=0, \quad k>0, \quad t\ge 0, \tag{4}$$

где

$$h(t)\in C^2[0,\infty), \quad h(0)=h'(0)=0 \tag{5}$$

и существует число $t_0>0$ такое, что для любого $t\ge t_0$

$$h(t)=0. \tag{6}$$

Рассмотрим множество $M_r\subset L_2[0,\infty)$ и, определяемое формулой

$$M_r=\left\{h(t)\ :\ h(t)\in L_2[0,\infty);\ \ \int_0^\infty h^2(t)dt+\int_0^\infty [h'(t)]^2\,dt\le r^2\right\}.$$

Искомая функция

$$h(t)\in M_r. \tag{7}$$

Предположим, что при $f(t)=f_0(t)$ существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условиям (5)–(7) и такая, что при $h(t)=h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(6), удовлетворяющее условию

$$u(x_1,t)=f_0(t); \quad t\ge 0, \tag{8}$$

но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо неё даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t)\in L_2[0,\infty)\bigcap L_1[0,\infty)$ и число $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta-f_0\|\le\delta. \tag{9}$$

Требуется, используя f_δ,δ и M_r, определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1)–(4), (8) и оценить уклонение $\|h_\delta-h_0\|_{L_2}$ приближенного решения h_δ от точного h_0.

---

[1] Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.
[2] Бельков Сергей Игоревич – магистрант, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: sergey_belkov@mail.ru

Пусть $H = L_2(-\infty,\infty) + iL_2(-\infty,\infty)$, а F – оператор, отображающий $L_2[0,\infty)$ в H. Из теоремы Планшереля [1] следует изометричность оператора F.

Применяя преобразование

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h(t)\, e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \ge 0,$$

сведем задачу (1)–(4), (8) к задаче вычисления значений неограниченного оператора T, $T : H \to H$,

$$T\widehat{f}(\tau) = \hat{h}(\tau), \quad \tau \ge 0, \tag{10}$$

где $\widehat{f}(\tau) = F[f(t)], \hat{h}(\tau) = F[h(t)]$, а

$$T\widehat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\, \widehat{f}(\tau).$$

Из (9) следует, что

$$\left\| \widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau) \right\| \le \delta \tag{11}$$

и при $\widehat{f}(\tau) = \widehat{f}_0(\tau)$ существует точное решение $\hat{h}_0(\tau)$ задачи (10), которое принадлежит множеству $\widehat{M}_r$, определяемому формулой

$$\widehat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) \ : \ \hat{h}(\tau) \in H, \ \int_0^\infty (1+\tau^2) \left|\hat{h}(\tau)\right|^2 d\tau \le r^2 \right\}. \tag{12}$$

Требуется, используя $\widehat{f}_\delta(\tau), \delta$ и $\widehat{M}_r$, определить приближенное решение $\hat{h}_\delta(\tau)$ задачи (10), (11) и оценить уклонение $\left\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\right\|$. Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\}$, $\alpha > 0$

$$T_\alpha \widehat{f}(\tau) = \begin{cases} T\widehat{f}(\tau); & \tau \le \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha. \end{cases} \tag{13}$$

В качестве приближенного решения задачи (10), (11) возьмем элемент $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \widehat{f}_\delta(\tau)$, в котором параметр регуляризации $\alpha(\delta, r)$ определим из уравнения

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\,\delta. \tag{14}$$

Заметим, что метод $\{T_{\alpha(\delta,r)} : 0 < \delta \le \delta_0\}$, определяемый формулами (13) и (14), является методом проекционной регуляризации, предложенным в [2].

В [3] доказаны теоремы.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\frac{\sqrt{2}(1-\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)}} \le \Delta_\delta[T_{\alpha(\delta,r)}] \le \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)}},$$

где метод $\{T_{\alpha(\delta,r)} : 0 < \delta \le \delta_\varepsilon\}$ определен формулой (13), (14).

Теорема 2. Метод $\{T_{\alpha(\delta,r)} : 0 < \delta \le \delta_\varepsilon\}$, решение задачи (10), (11) и, определяемый формулами (13), (14) оптимален по порядку на классе $\widehat{M}_r$ и для него справедлива оценка погрешности

$$\Delta_\delta[T_{\alpha(\delta,r)}] \le \sqrt{2}(1+\varepsilon)\Delta_\delta^{opt}.$$

Получены асимптотические оценки [3].

Теорема 3. Для любого $r > 0$ существуют числа $c_1(r), c_2(r)$ и $\delta_1 < 1$ такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_1)$ справедливы оценки

$$c_1(r)\ln^2\delta \le \sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)} \le c_2(r)\ln^2\delta.$$

Рассмотрим пространство $\overline{H}_0 = F[L_2[0,\infty)]$, где F преобразование Фурье и через $\overline{h}_\delta(\tau)$ обозначим элемент, определяемый формулой

$$\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta(\tau);\overline{H}_0].$$

Окончательно, решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(4), (8) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)]; & t\in[0,t_0], \\ 0; & 0<t, \quad t>t_0. \end{cases} \tag{15}$$

При достаточно малом значении δ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t)-h_0(t)\|_{L_2} \le \sqrt{2}(1+\varepsilon)\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)}}. \tag{16}$$

Решение задачи восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью

Обозначим через M_r множество функций $u(t)\in C[a,b]$ таких, что

$$\int_a^b u^2(t)dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt \le r^2, \tag{17}$$

где $u'(t)$ – обобщенная производная Соболева от функции $u(t)$.

Предположим, что функция $u_0(t)$, принадлежащая множеству M_r, нам не известна. Вместо нее даны некоторое приближение $u_\varepsilon(t)\in L_2[a,b]$ и уровень погрешности $\varepsilon>0$ такие, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \le \varepsilon. \tag{18}$$

Требуется, используя априорную информацию $(u_\varepsilon(t),\varepsilon)$, определить приближенное значение $\overline{u}_\varepsilon(t)\in C[a,b]$ и оценить величину

$$\max\left\{\left|\overline{u}_\varepsilon(t)-u_0(t)\right| \ : \ t\in[a,b]\right\}.$$

Эта задача называется задачей восстановления непрерывной функции, заданной с погрешностью. Для ее решения используем метод усредняющих функций, предложенный в [4].

Рассмотрим усредняющую функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}e^{-\frac{1}{1-t^2}}; & |t|<1, \\ 0; & |t|\ge 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $\gamma = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}dt.$

Тогда для любого значения $h>0$ определим

$$\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{|t|}{h}\right), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{20}$$

Из [5, с. 111–112] и формул (19), (20) следует, что для любого $h>0$ $\omega_h(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\omega_h(t)=0$ при $|t|\ge h$ и $\int_{|t|\le h}\omega_h(t)dt = 1.$

Теперь определим регуляризующее семейство $\{P_h : h>0\}$ линейных ограниченных операторов P_h, отображающих пространство $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, использующих формулу

Лемма 1. Пусть линейный ограниченный оператор P_h определен формулой (21). Тогда

$$\|P_h\| \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}\sqrt{h}}.$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in L_2[a,b]$ и $\|u(t)\| \le 1,$ тогда из (19)–(21) следует, что для любого $t \in [a,b]$

$$\left|P_h u(t)\right| \le \frac{1}{\gamma h}\|u\|_{L_2}\left[\int\limits_{|z|\le h} e^{-\frac{2}{1-\frac{z^2}{h^2}}}dz\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Так как $\|u\|_{L_2} \le 1,$ и

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[e^{-1/\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)}\right]^2 dz \le h \cdot \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}dt \le h\gamma,$$

то из (22) следует, что для любого $t \in [a,b]$ $\left|P_h u(t)\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}\sqrt{h}},$ что и доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть множество M_r определено соотношением (17), а $u_0^h(t) = P_h u_0(t).$ Тогда

$$\sup_{u_0 \in M_r}\left\|u_0 - u_0^h\right\|_{C[a,b]} \le r\sqrt{h}.$$

Доказательство. Предположим, что $u_0 \in M_r,$ тогда для любого $t \in [a,b]$

$$\left|u_0(t) - u_0^h(t)\right| = \left|\int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)u_0(t)d\tau - \int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)u_0(\tau)d\tau\right|. \tag{23}$$

Из (23) следует, что

$$\left|u_0(t) - u_0^h(t)\right| = \int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)\left|u_0(t) - u_0(\tau)\right|d\tau. \tag{24}$$

Так как из теоремы, доказанной в [5] на стр. 126, следует, что для любого $t \in [a,b]$ выполняется соотношение

$$\left|u_0(t) - u_0^h(t)\right| \le r\sqrt{h},$$

что и доказывает лемму.

Окончательно, в качестве приближенного значения восстанавливаемой функции $u_0(t)$ возьмем функцию

$$\bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon^{h(\varepsilon)}(t) = P_{h(\varepsilon)}u_\varepsilon(t),$$

в которой ε определено формулой (18), а $h(\varepsilon)$ формулой

$$h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}\, r}. \tag{25}$$

Учитывая, что

$$\left\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\right\|_{C[a,b]} \le \sup_{t\in[a,b]}\left|u_0(t) - u_0^{h(\varepsilon)}(t)\right| + \left\|P_{h(\varepsilon)}\right\|\varepsilon,$$

где h_ε определена формулой (25).

Из лемм 1 и 2 получим, что

$$\left\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\right\|_{C[a,b]} \le \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}. \tag{26}$$

Теперь докажем, что оценка (26) является точной по порядку, а метод усредняющих функций $\left\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\right\},$ используемый в настоящем параграфе, оптимален по порядку. Из работы [6] следует, что

$$\omega_1(2\varepsilon, r) \sim \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \tag{27}$$

где модуль непрерывности $\omega_1(2\varepsilon, r)$ определен формулой

$$\omega_1(2\varepsilon, r) = \sup\left\{\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|_{C[a,b]} :\ u_1, u_2 \in M_r;\ \left\|u_1 - u_2\right\|_{L_2} \le 2\varepsilon\right\}.$$

Из работы [7] и формул (26), (27) следует, что метод $\left\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\right\}$ оптимален по порядку на классе M_r, а оценка погрешности (26) этого метода является точной по порядку.

Равномерное приближения решения $h_0(t)$ обратной граничной задачи (1)–(4), (8)

Используя методику, изложенную выше, задачу равномерного приближения граничного условия $h_0(t)$ в задаче (1)–(4), (8) сведем к задаче восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью.

Таким образом, из условия (17) следует, что нам необходимо определить функцию $h_0(t) \in W_2^1[0, t_0]$, и удовлетворяющую условию

$$\int_0^{t_0} h_0^2(t)dt + \int_0^{t_0} [h_0'(t)]^2 dt \le r^2. \tag{28}$$

Из (15) и (16) следует, что нам известна функция $h_\delta(t) \in L_2[0, t_0]$ такая, что

$$\left\|h_\delta(t) - h_0(t)\right\|_{L_2} \le \varepsilon(\delta), \tag{29}$$

где $\varepsilon(\delta) = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}^2(\delta, r)}}$, $\overline{\alpha}(\delta, r)$ – решение уравнения (14).

Требуется, используя априорную информацию $h_\delta(t), \varepsilon(\delta), r$ задачи (28), (29) определить функцию $z_\delta(t) \in C[0, t_0]$ такую, что

$$\max\left\{\left|z_\delta(t) - h_0(t)\right| \ :\ t \in [0, t_0]\right\} \to 0 \text{ при } \quad \delta \to 0$$

и оценить скорость этой сходимости.

Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\left\{P_\beta\ :\ \beta > 0\right\}$, определяемое формулой (21)

$$P_\beta h(t) = \int_0^{t_0} h(t)\omega_\beta(t - \tau)d\tau, \quad h(t) \in L_2[0, t_0],$$

$$\omega_\beta(t) = \frac{1}{\beta}\omega\left(\frac{|t|}{\beta}\right), \quad t \in \left[0, t_0\right], \text{ а } \omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases}$$

где $\gamma = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt$.

Окончательно, в качестве приближенного решения возьмем функцию

$$z_\delta(t) = P_{\beta(\delta)} h_\delta(t); \quad t \in [0, t_0],$$

где

$$\beta(\delta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}\, r}.$$

Из формулы (26) следует, что

$$\left\|z_\delta(t) - z_0(t)\right\|_{C[0,\, t_0]} \le \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}.$$

Литература

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
3. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 1–15.
4. Васин, В.В. Регуляризация задачи численного дифференцирования / В.В. Васин // Математические записки. – 1969. – Т. 7, № 2. – С. 29–33.
5. Осипов Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. М.: МГУ, 1972. – 238 с.
6. Хромова, Г.В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью / Г.В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1977. – Т. 17, № 5. – С. 1161–1171.
7. Танана, В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения / В.П. Танана // Изв. Вузов. Математика. – 1977. – № 11. – С. 106–112.

Поступила в редакцию 27 сентября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2014, vol. 6, no. 1, pp. 36–41

REGULAR APPROXIMATION FOR BOUNDARY CONDITION IN INVERSE PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS

A.I. Sidikova[1], S.I. Belkov[2]

Until recently at the solution of the problem the accuracy of the root-mean-square approximation has been increased through the development of optimum methods. The drawback of the root-mean-square approximation is unreliability of sufficient accuracy for concrete values of t. Thus, the algorithm of definition of regular approximation is considered in the article. Regular estimator of this approximation is given.

Keywords: inverse problem, regularization, estimation error, ill-posed problem, Fourier transformation.

References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (in Russ.).
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problems and its application). Moscow, Nauka Publ., 1978. 208 p. (in Russ.).
3. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN.* 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 1–15. (in Russ.).
4. Vasin V.V. *Matematicheskie zapiski.* 1969. Vol. 7, no. 2. pp. 29–33. (in Russ.).
5. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoy regulyarizatsii* (Basics of dynamic regularization method). Moscow, MGU Publ., 1972. 238 p.
6. Khromova G.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1977. Vol. 17, no. 5. pp. 1161–1171. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *Izvestiya Vuzov. Matematika.* 1977. no. 11. pp. 106–112. (in Russ.).

Received 27 September 2013

[1] Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.
[2] Belkov Sergey Igorevich is Undergraduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: sergey_belkov@mail.ru