УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Л. Ушаков[1]

Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Его решение строится на итерационной факторизации оператора, энергетически эквивалентного оператору решаемой задачи. Дискретизация исходной задачи производится по методу конечных элементов, а предобуславливатель выбирается на основе метода конечных разностей, при этом скорость сходимости итерационного процесса не зависит от параметров дискретизации.

Ключевые слова: итерационная факторизация, предобуславливатель.

Введение

Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат; на правой и верхней сторонах прямоугольника заданы условия шарнирного опирания, а на остальной части границы условия симметрии. Задача, получающаяся при дискретизации уравнения Пуассона по методу конечных разностей, решаемая в [1], дважды возникает на каждом шаге предлагаемого итерационного процесса. Система линейных алгебраических уравнений получается при дискретизации исходной задачи по методу конечных элементов, в отличие от [2], где применялся метод конечных разностей. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных, например, главных или естественных краевых условиях.

Непрерывная задача в вариационной и классической постановках

Рассматривается задача

$$u\in V: \Lambda(u,v)=l(v)\ \forall v\in V,\ \ l\in V', \tag{1}$$

где соболевское пространство функций

$$V=V(\Omega)=\left\{v\in W_2^2(\Omega): v\big|_{\Gamma_1}=0, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0\right\}$$

на области $\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2)$, с границами $\Gamma_1=\{b_1\}\times[0;b_2]\bigcup[0;b_1]\times\{b_2\}, \Gamma_2=\Gamma\setminus\Gamma_1, \Gamma=\partial\Omega$, билинейная форма

$$\Lambda(u,v)=\int_\Omega(\sigma\Delta u\Delta v+(1-\sigma)(u_{xx}v_{xx}+2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{yy})+auv)d\Omega,$$

при этом $a=a_1$ на области Ω_1, $a=a_2$ на $\Omega\setminus\Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_1\bigcup\overline{\Omega}_2$, $\Omega_1\bigcap\Omega_2=\varnothing$, $\partial\Omega_1\bigcap\partial\Omega_2\neq\varnothing$, заданы константы $\sigma\in(0;1)$, $b_1, b_2\in(0;+\infty)$, $a_1, a_2\in[0;+\infty)$, $a_1\le a_2$.

Можно отметить, что

$$\exists c_1,c_2\in(0;+\infty):\ c_1\|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}\le\Lambda(v,v)\le c_2\|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}\ \ \forall v\in V,$$

а, следовательно, решение задачи (1) существует и единственно. Если f – заданная достаточно гладкая функция и

$$l(v)=(f,v)\text{, где }(f,v)=\int_\Omega fvd\Omega,$$

то из задачи (1) получается неоднородное бигармоническое уравнение со свободным членом при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2u+au=f,\ u\big|_{\Gamma_1}=\Delta u\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0. \tag{2}$$

---

[1] Ушаков Андрей Леонидович – старший преподаватель, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ushakov_al@inbox.ru

Итерационное решение непрерывной задачи в вариационной постановке

Утверждение 1. Для следующей спектральной задачи, имеющей у нас вспомогательное значение

$$\lambda: -\Delta\varphi=\lambda\varphi,\ \varphi\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0,\ \varphi\neq 0$$

находятся методом разделения переменных собственные числа и функции соответственно:

$$\lambda_{i,j}=\frac{(2i-1)^2\pi^2}{4b_1^2}+\frac{(2j-1)^2\pi^2}{4b_2^2},\ \varphi_{i,j}=C_{i,j}\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2b_1}cos\frac{(2j-1)\pi y}{2b_2},\ C_{i,j}\in\mathbb{R},\ i,j\in\mathbb{N},$$

при этом $0<\min\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\lambda_{i,j}=\lambda_{1,1}=\dfrac{\pi^2}{4b_1^2}+\dfrac{\pi^2}{4b_2^2}$, $\sup\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\lambda_{i,j}=+\infty$.

Введём билинейную форму

$$\mathrm{M}(u,v)=\int\limits_\Omega \Delta u\Delta v d\Omega=\int\limits_\Omega (u_{xx}v_{xx}+2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{yy})d\Omega,\ u,v\in V.$$

Второе равенство имеется при рассматриваемых краевых условиях на прямоугольной области.

Утверждение 2. Имеют место неравенства

$$\gamma_1\mathrm{M}(v,v)\le\Lambda(v,v)\le\gamma_2\mathrm{M}(v,v)\quad\forall v\in V,\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=(\lambda_{1,1}^2+a_2)\big/\lambda_{1,1}^2.$$

Доказательство. Выполняется, что

$$1=\inf_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda_{i,j}^2+a_1}{\lambda_{i,j}^2}=\gamma_1\le\frac{\Lambda(v,v)}{\mathrm{M}(v,v)}\le\gamma_2=\sup_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda_{i,j}^2+a_2}{\lambda_{i,j}^2}=\frac{\lambda_{1,1}^2+a_2}{\lambda_{1,1}^2}\quad\forall v\in V$$

Введём нормы

$$\|v\|_{\mathrm{M}}=\sqrt{\mathrm{M}(v,v)},\ \|v\|_V=\sqrt{\Lambda(v,v)}.$$

Рассматривается итерационный процесс:

$$u^k\in V:\ \mathrm{M}(u^k-u^{k-1},v)=-\tau_k(\Lambda(u^{k-1},v)-l(v))\quad\forall v\in V,\tag{3}$$
$$\tau_k=\tau=2/(\gamma_1+\gamma_2)=2\lambda_{1,1}^2\big/(2\lambda_{1,1}^2+a_2),\ k\in\mathbb{N},\ \forall u^0\in V.$$

Теорема 1. Для итерационного процесса (3) имеют место оценки:

1. $\|u^k-u\|_V\le\varepsilon\|u^0-u\|_V$,
2. $\|u^k-u\|_{\mathrm{M}}\le\varepsilon\|u^0-u\|_{\mathrm{M}}$,

где относительная ошибка сходимости u^k к решению u следующая

$$\varepsilon\le q^k=\left((\gamma_2-\gamma_1)/(\gamma_2+\gamma_1)\right)^k=\left(a_2\big/(2\lambda_{1,1}^2+a_2)\right)^k,\ k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Введём оператор R из V в V: $\mathrm{M}(Ru,v)=\Lambda(u,v)$, $\forall u,v\in V$. Так как $\gamma_1\mathrm{M}(v,v)\le\Lambda(v,v)\le\gamma_2\mathrm{M}(v,v)$, то $\gamma_1\mathrm{M}(v,v)\le\mathrm{M}(Rv,v)\le\gamma_2\mathrm{M}(v,v)$, т.е. $\gamma_1 I\le R\le\gamma_2 I$. R – ограниченный и самосопряжённый оператор. Заметим, что $\Lambda(R^{-1}u,v)=\mathrm{M}(u,v)$. Пусть $u^k=u+\psi^k$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, тогда из итерационного процесса имеем

$$\mathrm{M}(\psi^k-\psi^{k-1},v)=-\tau_k\Lambda(\psi^{k-1},v)\ \text{ и }\ \Lambda(R^{-1}(\psi^k-\psi^{k-1}),v)=-\tau_k\Lambda(\psi^{k-1},v),$$

отсюда

$$R^{-1}(\psi^k-\psi^{k-1})=-\tau_k\psi^{k-1},\ \psi^k=(I-\tau_k R)\psi^{k-1}.$$

Пусть $T_k=I-\tau_k R$, тогда можно перейти к доказательству первого неравенства.

$$\Lambda(\psi^k,\psi^k)=\Lambda(T_k\psi^{k-1},T_k\psi^{k-1})\le\sup_{\psi\in V}\left(\Lambda(T_k\psi,T_k\psi)/\Lambda(\psi,\psi)\right)\Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1})=$$

так как оператор T_k самосопряжённый

$$=\left(\sup_{\psi\in V}\left(\frac{\Lambda(T_k\psi,\psi)}{\Lambda(\psi,\psi)}\right)\right)^2\Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1})=\left(\sup_{\psi\in V}\left(1-\tau_k\frac{\Lambda(R\psi,\psi)}{\Lambda(\psi,\psi)}\right)\right)^2\Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1})=$$

полагаем $v = R^{1/2}\psi$

$$= \left(\sup_{v \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(v,v)}{\Lambda(R^{-1}v,v)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1}) = \left(\sup_{v \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(v,v)}{\mathrm{M}(v,v)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1}) \le$$

$$\le \max\left\{ \left(1-\gamma_1\tau_k\right)^2,\ \left(1-\gamma_2\tau_k\right)^2 \right\} \Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1}),$$

отсюда

$$\Lambda(\psi^k,\psi^k) \le q^2 \Lambda(\psi^{k-1},\psi^{k-1}),\ \left\|u^k - u\right\|_V \le q \left\|u^{k-1} - u\right\|_V,\ \left\|u^k - u\right\|_V \le q^k \left\|u^0 - u\right\|_V .$$

Теперь можно рассмотреть получение второго неравенства.

$$\mathrm{M}(\psi^k,\psi^k) = \mathrm{M}(T_k\psi^{k-1},T_k\psi^{k-1}) \le \sup_{\psi \in V} \left(\mathrm{M}(T_k\psi,T_k\psi)/\mathrm{M}(\psi,\psi) \right) \mathrm{M}(\psi^{k-1},\psi^{k-1}) =$$

$$= \left(\sup_{\psi \in V} \left(\frac{\mathrm{M}(T_k\psi,\psi)}{(\mathrm{M}\psi,\psi)} \right) \right)^2 \mathrm{M}(\psi^{k-1},\psi^{k-1}) = \left(\sup_{\psi \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(\psi,\psi)}{\mathrm{M}(\psi,\psi)} \right) \right)^2 \mathrm{M}(\psi^{k-1},\psi^{k-1}) \le$$

$$\le max\left\{ \left(1-\gamma_1\tau_k\right)^2,\ \left(1-\gamma_2\tau_k\right)^2 \right\} \mathrm{M}(\psi^{k-1},\psi^{k-1}),$$

отсюда

$$\mathrm{M}(\psi^k,\psi^k) \le q^2 \mathrm{M}(\psi^{k-1},\psi^{k-1}),\ \left\|u^k - u\right\|_{\mathrm{M}} \le q \left\|u^{k-1} - u\right\|_{\mathrm{M}},\ \left\|u^k - u\right\|_{\mathrm{M}} \le q^k \left\|u^0 - u\right\|_{\mathrm{M}} .$$

На каждом шаге итерационного процесса (3) возникает задача вида

$$u \in V : \mathrm{M}(u,v) = l(v)\ \forall v \in V,\ \ l \in V'. \tag{4}$$

Заметим, основываясь на утверждении 2, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty):\ c_1 \|v\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \mathrm{M}(v,v) \le c_2 \|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}\quad \forall v \in V,$$

а, следовательно, решение задачи (4) существует и единственно. Если f – заданная достаточно гладкая функция, как и в задаче(1) $l(v) = (f,v)$, то из задачи (4) получается неоднородное бигармоническое уравнение при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2 u = f,\ u\big|_{\Gamma_1} = \Delta u\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{5}$$

Видно, что задача (5) имеет факторизованный оператор и может быть записана как система эллиптических уравнений второго порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$-\Delta w = f,\ w\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$-\Delta u = w,\ u\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{6}$$

Замечание 1. Для собственных функций краевой задачи (1), когда $a_1 = a_2$, следующего вида

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{b_1 b_2(\lambda_{i,j}^2 + a_2)}} \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2b_1} \cos\frac{(2j-1)\pi y}{2b_2},\ i,j \in \mathbb{N}$$

устанавливается непосредственной проверкой первое и известно второе

1. $\left\|\varphi_{i,j}\right\|_V = 1,\ \Lambda(\varphi_{i,j},\varphi_{k,l}) = 0,\ (i,j) \ne (k,l),\ k,l \in \mathbb{N},$

2. $\forall \psi^k \in V\ \exists c_{i,j}^k \in \mathbb{R} : \psi^k = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} c_{i,j}^k \varphi_{i,j},\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$

При равенстве $a_1 = a_2$ в итерационном процессе (3) будет $\lambda_{i,j}^2 c_{i,j}^k = \lambda_{i,j}^2 c_{i,j}^{k-1} - \tau(\lambda_{i,j}^2 + a_2) c_{i,j}^{k-1}$, $c_{i,j}^k = \rho_{i,j} c_{i,j}^{k-1}$, где $\rho_{i,j} = 1 - \tau(\lambda_{i,j}^2 + a_2)\lambda_{i,j}^{-2}$. Таким образом $\psi^k = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^k c_{i,j}^0 \varphi_{i,j}$, т.к. $c_{i,j}^k = \rho_{i,j}^k c_{i,j}^0$.

Учитывая, что $\max\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\left|\rho_{i,j}\right| = \max\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\left|1-\tau(\lambda_{i,j}^2+a_2)\lambda_{i,j}^{-2}\right| \le a_2\left(2\lambda_{1,1}^2+a_2\right)^{-2}$, имеет место следующая оценка

$$\left\|u^k-u\right\|_V \Big/ \left\|u^0-u\right\|_V = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty}\rho_{i,j}^{2k}(c_{i,j}^0)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty}(c_{i,j}^0)^2} \le \left(\max_{i,j\in\mathbb{N}}\left|\rho_{i,j}\right|\right)^k \le \left(a_2\big/(2\lambda_{1,1}^2+a_2)\right)^k .$$

Дискретная задача в виде системы линейных алгебраических уравнений

Производится дискретизация задачи (1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях:

$$\tilde u\in\tilde V\subset V:\Lambda(\tilde u,\tilde v)=l(\tilde v)\ \forall\tilde v\in\tilde V\subset V. \qquad (7)$$

Рассматриваются система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче (7):

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^N:\ \Lambda\overline{u}=\overline{l},\ \overline{l}\in\mathbb{R}^N, \qquad (8)$$

где $\overline{v}\in\mathbb{R}^N:\ \overline{v}=(v_1,...,v_N)'$, $N=m\cdot n$, m, $n\in\mathbb{N}$, а $v_{n(i-1)+j}=v_{i,j}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента соответствующего узлам сетки $(x_i,y_j)=\left((i-0,5)h_1,(j-0,5)h_2\right)$, $i,j\in\mathbb{Z}$, шаги сетки $h_1=b_1/(m+0,5)$, $h_2=b_2/(n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N\times N$ определяются следующим образом:

$$\left\langle\Lambda\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\Lambda(\tilde u,\tilde v)\ \forall\tilde u,\tilde v\in\tilde V\subset V,$$

здесь $\left\langle .,.\right\rangle$ – скалярное произведение векторов такого вида $\left\langle\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\sum\limits_{k=1}^{N}u_kv_kh_1h_2\ \ \forall\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}^N$,

а подпространство $\tilde V\subset V$ определяется так, что

$$\tilde V=\left\{\tilde v:\tilde v=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x,y),v_{i,j}\in\mathbb{R},\right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y)=\Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y),\ \Psi_{1,i}(x)=\mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1-i+3)+\Psi(x/h_1-i+2)-\mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1-i),$$

$$\Psi_{2,j}(y)=\mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2-j+3)+\Psi(y/h_2-i+2)-\mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2-j),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}0,5z^2, & z\in[0;1],\\ -z^2+3z-1,5, & z\in[1;2],\\ 0,5z^2-3z+4,5, & z\in[2;3],\end{cases}$$

$\Psi(z)=0$, $z\notin[0;3]$, $E(.)$ – функция целая часть числа, компоненты вектора $\overline{l}$ определяются следующим образом

$$l_{n(i-1)+j}=l_{i,j}=h_1^{-1}h_2^{-1}l(\Phi^{i,j}(x,y)),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,\ \text{т.е.}\ \left\langle\overline{l},\overline{v}\right\rangle=l(\tilde v)\ \ \forall\tilde v\in\tilde V.$$

Отметим, что решение задачи (8), как и (7) существует, единственно и известны оценки типа

$$1.\ \left\|u-\tilde u\right\|_{W_2^k(\Omega)}\le c\left|h\right|^{s-k}\left\|u\right\|_{W_2^s(\Omega)},$$

$$2.\ \lim_{h\to0}\left\|u-\tilde u\right\|_{W_2^2(\Omega)}=0,\ h=(h_1,h_2),\ \left|h\right|=\max\left\{h_1,h_2\right\}.$$

Решение дискретной задачи при итерационной факторизации предобуславливателя

Определим матрицы ∇_x,∇_y размерности $N\times N$

$$\left\langle\nabla_x\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i+1,j}-u_{i,j})h_1^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ \ u_{m+1,j}=v_{m+1,j}=0,\ \ j=1,...,n,$$

$$\left\langle\nabla_y\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i,j+1}-u_{i,j})h_2^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ \ u_{i,n+1}=v_{i,n+1}=0,\ \ i=1,...,m.$$

Дополнительно введём матрицы ∇_1 и ∇_2 размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно

$$(\nabla_1\overline{u},\overline{v})=\sum_{i=1}^{m}(-(u_{i+1}-u_i)h_1^{-1})v_i\,,\ u_{m+1}=v_{m+1}=0\,,\ (\nabla_2\overline{u},\overline{v})=\sum_{j=1}^{n}(-(u_{j+1}-u_j)h_2^{-1})v_j\,,\ u_{n+1}=v_{n+1}=0\,.$$

Они связанны с предыдущими матрицами следующим образом $\nabla_x=\nabla_1\otimes E_n$, $\nabla_y=E_m\otimes\nabla_2$.

Здесь E_m и E_n – единичные матрицы размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно, а (.,.) обычное скалярное произведение векторов. Определим матрицу

$$\left\langle A\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((u_{i+1,j}-u_{i,j})(v_{i+1,j}-v_{i,j})h_1^{-2}+(u_{i,j+1}-u_{i,j})(v_{i,j+1}-v_{i,j})h_2^{-2})h_1h_2\,,$$

$$u_{i,n+1}=v_{i,n+1}=0\,,\ i=1,...,m\,,\ u_{m+1,j}=v_{m+1,j}=0\,,\ j=1,...,n\,.$$

Заметим, что

$$A=\nabla_x{}'\nabla_x+\nabla_y{}'\nabla_y=(\nabla_1\otimes E_n)'(\nabla_1\otimes E_n)+(E_m\otimes\nabla_2)'(E_m\otimes\nabla_2)=(\nabla_1{}'\nabla_1)\otimes E_n+E_m\otimes(\nabla_2{}'\nabla_2)\,.$$

Дополнительно введём матрицы $\Delta_1=\nabla_1{}'\nabla_1$ и $\Delta_2=\nabla_2{}'\nabla_2$ размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно, тогда $A=\Delta_1\otimes E_n+E_m\otimes\Delta_2$. Определим матрицу $M=A^2$. Отметим, что

$$M=(\Delta_1\otimes E_n+E_m\otimes\Delta_2)^2=\Delta_1^2\otimes E_n+2\Delta_1\otimes\Delta_2+E_m\otimes\Delta_2^2\,.$$

Матрица Λ представляется в виде $\Lambda=\Lambda^{2,0}+2\Lambda^{1,1}+\Lambda^{0,2}+a\Lambda^{0,0}$, где матрицы $\Lambda^{p,q}$:

$$\left\langle\Lambda^{p,q}\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\int_\Omega\tilde{u}_{x^px^q}\tilde{v}_{x^px^q}d\Omega\ \ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}\,,\ (p,q)\in\{(2,0),(1,1),(0,2),(0,0)\}\,.$$

Дополнительно введём матрицы $\Lambda^{x,p}$, $\Lambda^{y,q}$, $p,q=0,1,2$ размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно, элементы которых следующие

$$\Lambda_{k,i}^{x,p}=h_1^{-1}\int_0^{b_1}\Psi_{1,k}^{(p)}(x)\Psi_{1,i}^{(p)}(x)dx\,,\ k,i=1,...,m\,,\ \Lambda_{l,j}^{y,q}=h_2^{-1}\int_0^{b_2}\Psi_{2,l}^{(q)}(y)\Psi_{2,j}^{(q)}(y)dy\,,\ l,j=1,...,n\,.$$

Утверждение 3. Имеют место формулы $\Lambda^{p,q}=\Lambda^{x,p}\otimes\Lambda^{y,q}$, $p,q=0,1,2$.

Доказательство. Заметим, что т.к.

$$\Lambda_{n(k-1)+l,n(i-1)+j}^{p,q}=h_1^{-1}h_2^{-1}\int_\Omega\Phi_{x^p,y^q}^{k,l}(x,y)\Phi_{x^p,y^q}^{i,j}(x,y)d\Omega=$$

$$=h_1^{-1}\int_0^{b_1}\Psi_{1,k}^{(p)}(x)\Psi_{1,i}^{(p)}(x)dx\,h_2^{-1}\int_0^{b_2}\Psi_{2,l}^{(q)}(y)\Psi_{2,j}^{(q)}(y)dy=\Lambda_{k,i}^{x,p}\Lambda_{l,j}^{y,q}\,.$$

Замечание 2. Имеет место $\Lambda=\Lambda^{x,2}\otimes\Lambda^{y,0}+2\Lambda^{x,1}\otimes\Lambda^{y,1}+\Lambda^{x,0}\otimes\Lambda^{y,2}+a\Lambda^{x,0}\otimes\Lambda^{y,0}$ и $\Lambda^{x,2}=\Delta_1^2$, $\Lambda^{y,2}=\Delta_2^2$, т.е. $\Lambda=\Delta_1^2\otimes\Lambda^{y,0}+2\Lambda^{x,1}\otimes\Lambda^{y,1}+\Lambda^{x,0}\otimes\Delta_2^2+a\Lambda^{x,0}\otimes\Lambda^{y,0}$.

Замечание 3. Для любых $\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$(\Lambda^{x,0}\overline{u},\overline{v})=(\Lambda_1^{x,0}(u_1,u_2)',(v_1,v_2)')+\sum_{i=2}^{m-1}(\Lambda_i^{x,0}(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})')_i+(\Lambda_m^{x,0}(u_{m-1},u_m)',(v_{m-1},v_m)')\,,$$

где используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda_1^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}86&14\\14&6\end{bmatrix},\ \Lambda_m^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}6&13\\13&59\end{bmatrix},\ \Lambda_i^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}6&13&1\\13&54&13\\1&13&6\end{bmatrix},\ i=2,...,m-1\,.$$

Утверждение 4. Видно $\lambda_1=1/16$, $\lambda_2=1/6$, $\lambda_3=1$, если

$$\lambda:\Lambda_i^{x,0}(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'=\lambda E_i^x(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\,,\ (v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\neq0\,,\ i=2,...,m-1\,,$$

E_i^x – диагональные матрицы, где на диагонали первый и последний элементы $1/6$, а средний $2/3$.

Утверждение 5 . Для спектральной задачи $\lambda: \Lambda_1^{x,0}(v_1,v_2)' = \lambda E_i^x(v_1,v_2)'$, $(v_1,v_2)' \neq 0$ собственные числа $\lambda_1 = 4/25$, $\lambda_2 = 1$, здесь E_1^x диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент $5/6$, а второй элемент, он же и последний $1/6$.

Утверждение 6. Для спектральной задачи $\lambda: \Lambda_m^{x,0}(v_{m-1},v_m)' = \lambda E_m(v_{m-1},v_m)'$, $(v_{m-1},v_m)' \neq 0$ собственные числа $0 < \lambda_{1,2} = (89 \pm 3\sqrt{469})/200 < 1$, здесь E_1^x диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент $1/6$, а второй элемент, он же и последний $5/6$.

Введём вспомогательные матрицы ∇_1^+, Δ_1^+ размерности $m \times m$: $\Delta_1^+ = (\nabla_1^+)'\nabla_1^+ > 0$,

$$(\nabla_1^+\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}(u_{i+1}+u_i)v_i\,,\ (\Delta_1^+\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}(u_{i+1}+u_i)(v_{i+1}+v_i)\,,\ u_{m+1} = v_{m+1} = 0$$

и матрицу δ^1 размерности $m \times m$ с элементами $\delta_{i,j}^1 = E(2/(i+j))$, $i,j = 1,...,m$.

Утверждение 7. Имеют место неравенства $2/15\,E_m \le \Lambda^{x,0} \le E_m \left(2/15\,E_n \le \Lambda^{x,0} \le E_n\right)$.

Доказательство. Правое неравенство следует из замечания 3 и утверждений 4,5,6, т.к.

$$(E_m\bar{u},\bar{v}) = (E_1^x(u_1,u_2)',(v_1,v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1}(E_i^x(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})') + (E_m^x(u_{m-1},u_m)',(v_{m-1},v_m)')\,.$$

Используя известный приём, имеем, что $120\Lambda^{x,0} \ge 120M^{x,0} - (\Delta_1^+ + 2\delta^1)^2 - 22(\Delta_1^+ + 2\delta^1) = 16E_m$.

Замечание 4. Для любых $\bar{u},\bar{v} \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$(\Lambda^{x,1}\bar{u},\bar{v}) = (\Lambda_1^{x,1}(u_1,u_2)',(v_1,v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1}(\Lambda_i^{x,1}(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})')_i + (\Lambda_m^{x,1}(u_{m-1},u_m)',(v_{m-1},v_m)')\,,$$

где используемые выше матрицы следующие:

$$\Lambda_1^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \Lambda_m^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},\ \Lambda_i^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ i = 2,...,m-1\,.$$

Утверждение 8. Имеют место неравенства

$$\frac{1}{3}\Delta_i^x \le \Lambda_i^{x,1} \le \Delta_i^x\,,\ \text{где}\ \Delta_i^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ i = 2,...,m-1\,.$$

Доказательство. Имеем $6h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/3\Delta_i^x) \ge 0$, т.к. $(v_{i-1}^2 - 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2) = (v_{i-1} - v_{i+1})^2 \ge 0$. Видно, что $6h_1^2(\Delta_i^x - \Lambda_i^{x,1}) \ge 0$, т.к.

$$v_{i-1}^2 - 4v_{i-1}v_i + 4v_i^2 - 4v_iv_{i+1} + 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2 = (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})^2 \ge 0\,.$$

Замечание 5. Имеет место равенство $\frac{2}{3}\Delta_1^x = \Lambda_1^{x,1}$, где $\Delta_1^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Утверждение 9. Имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\Delta_m^x \le \Lambda_m^{x,1} \le \Delta_m^x\,,\ \text{где}\ \Delta_m^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Имеем $12h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/2\,\Delta_i^x) \ge 0$, т.к. $(v_{m-1}^2 - 2v_{m-1}v_m + v_m^2) = (v_{m-1} - v_m)^2 \ge 0$. Видно, что $6h_1^2(\Delta_m^x - \Lambda_m^{x,1}) \ge 0$, т.к. $(v_{m-1}^2 - 4v_{m-1}v_m + 4v_m^2) = (v_{m-1} - 2v_m)^2 \ge 0$.

Следствие 1. Имеют место неравенства $3^{-1}\Delta_1 \le \Lambda^{x,1} \le \Delta_1 \left(3^{-1}\Delta_2 \le \Lambda^{y,1} \le \Delta_2\right)$.

Доказательство. Следует из замечаний 4, 5 и утверждений 8, 9, т.к.

$$(\Delta_1\bar{u},\bar{v}) = (\Delta_1^x(u_1,u_2)',(v_1,v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1}(\Delta_i^x(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})') + (\Delta_m^x(u_{m-1},u_m)',(v_{m-1},v_m)')\,.$$

Утверждение 10. Имеют место следующие неравенства

$$1.\ 9^{-1}\Delta_1\otimes\Delta_2\le\Lambda^{x,1}\otimes\Lambda^{x,1}\le\Delta_1\otimes\Delta_2,$$
$$2.\ 2/15\Delta_1^2\otimes E_n\le\Delta_1^2\otimes\Lambda^{y,0}\le\Delta_1^2\otimes E_n,$$
$$3.\ 2/15E_m\otimes\Delta_2^2\le\Lambda^{x,0}\otimes\Delta_2^2\le E_m\otimes\Delta_2^2.$$

Доказательство. Если $\mu\in\mathbb{R}:\ \Lambda^{x,1}\overline{v}=\mu\Delta_1\overline{v}$, $\overline{v}\ne 0$, $\eta\in\mathbb{R}:\ \Lambda^{y,1}\overline{w}=\eta\Delta_2\overline{w}$, $\overline{w}\ne 0$, то, учитывая следствие 1, $\mu,\eta\in\left[3^{-1};1\right]$. Если $\lambda\in\mathbb{R}:\ \Lambda^{x,1}\otimes\Lambda^{y,1}\overline{u}=\lambda\Delta_1\otimes\Delta_2\overline{u}$, $\overline{u}\ne 0$, то $\overline{u}=\overline{v}\otimes\overline{w}$ и $\lambda=\mu\eta\in\left[9^{-1};1\right]$, а, следовательно, имеет место 1., т.к. все рассматриваемые матрицы симметричны и положительно определенны. Аналогично доказываются остальные неравенства.

Следствие 2. Имеет место $k_1A^2\le\Lambda\le k_2A^2$, если $k_1=9^{-1}\gamma_1=9^{-1}$, $k_2=\gamma_2=(\lambda_{1,1}^2+a_2)/\lambda_{1,1}^2$.

Доказательство. Из утверждений 2, 10 и замечания 2 получаются требуемые неравенства
$$k_1\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle=k_1\left\langle M\overline{v},\overline{v}\right\rangle\le\left\langle\Lambda\overline{v},\overline{v}\right\rangle=\Lambda(\tilde{v},\tilde{v})\le k_2\mathrm{M}(\tilde{v},\tilde{v})=k_2\left\langle M\overline{v},\overline{v}\right\rangle=k_2\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle.$$

Введём нормы $\left\|\overline{v}\right\|_{A^2}=\sqrt{\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle}$, $\left\|\overline{v}\right\|_{\Lambda}=\sqrt{\left\langle\Lambda\ \overline{v},\overline{v}\right\rangle}$, $\forall\overline{v}\in\mathbb{R}^N$.

Рассматривается итерационный процесс:
$$\overline{u}^k\in\mathbb{R}^N:\ A^2(\overline{u}^k-\overline{u}^{k-1})=-\tau_k(\Lambda\overline{u}^{k-1}-\overline{f}),\ \tau_k=\tau=2/\left(k_1+k_2\right)>0,\ k\in\mathbb{N},\ \forall\overline{u}^0\in\mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Теорема 2. Для итерационного процесса (9) имеют место оценки:
$$1.\ \left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\Lambda},$$
$$2.\ \left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{A^2}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{A^2},$$
где относительная ошибка сходимости $\overline{u}^k$ к решению $\overline{u}$ следующая
$$\varepsilon\le q^k=\left((k_2-k_1)/(k_2+k_1)\right)^k=\left((8\lambda_{1,1}^2+9a_2)/(10\lambda_{1,1}^2+9a_2)\right)^k,\ k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\overline{u}^k=\overline{u}+\overline{\psi}^k$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, тогда из итерационного процесса
$$A^2(\overline{\psi}^k-\overline{\psi}^{k-1})=-\tau_k\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\ \overline{\psi}^k-\overline{\psi}^{k-1}=-\tau_kA^{-2}\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\ \overline{\psi}^k=(E-\tau_kA^{-2}\Lambda)\overline{\psi}^{k-1}.$$

Пусть $T_k=E-\tau_kA^{-2}\Lambda$, тогда $\overline{\psi}^k=T_k\overline{\psi}^{k-1}$, где $T_k=T_k'>0$ и можно доказать первое неравенство.
$$\left\langle\Lambda\overline{\psi}^k,\overline{\psi}^k\right\rangle=\left\langle\Lambda T_k\overline{\psi}^{k-1},T_k\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle\le\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\left\langle\Lambda T_k\overline{\psi},T_k\overline{\psi}\right\rangle/\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle\right)\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle=$$
$$=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{\left\langle\Lambda T_k\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_k\frac{\left\langle\Lambda A^{-2}\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$
полагаем $\overline{v}=A^{-1}\Lambda^{1/2}\overline{\psi}$,
$$=\sup_{\overline{v}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_k\left\langle\Lambda\overline{v},\overline{v}\right\rangle/\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle\right)^2\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle\le\max\left\{\left(1-k_1\tau_k\right)^2,\ \left(1-k_2\tau_k\right)^2\right\}\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle$$
отсюда
$$\left\langle\Lambda\overline{\psi}^k,\overline{\psi}^k\right\rangle=q^2\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle,\ \left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\le q\left\|\overline{u}^{k-1}-\overline{u}\right\|_{\Lambda},\ \left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\le q^k\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\Lambda}.$$
Далее можно привести вывод второго неравенства.
$$\left\langle A^2\overline{\psi}^k,\overline{\psi}^k\right\rangle=\left\langle A^2T_k\overline{\psi}^{k-1},T_k\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle\le\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\left\langle A^2T_k\overline{\psi},T_k\overline{\psi}\right\rangle/\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle\right)\left\langle A^2\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$
$$=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{\left\langle A^2T_k\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_k\frac{\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle\le$$
$$\le\max\left\{\left(1-k_1\tau_k\right)^2,\ \left(1-k_2\tau_k\right)^2\right\}\left\langle A^2\overline{\psi}^{k-1},\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle$$

тогда

$$\left\langle A^2\overline{\psi}^k, \overline{\psi}^k \right\rangle = q^2 \left\langle A^2\overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle,\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{A^2} \le q\left\|\overline{u}^{k-1} - \overline{u}\right\|_{A^2},\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{A^2} \le q^k\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{A^2}.$$

На каждом шаге итерационного процесса (9) возникает задача вида:

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N:\ A^2\overline{u} = \overline{l},\ \overline{l} \in \mathbb{R}^N, \tag{10}$$

для которой возможно расщепление на две однотипные задачи

$$\overline{w} \in \mathbb{R}^N:\ A\overline{u} = \overline{l},\ \overline{l} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N:\ A\overline{u} = \overline{w},\ \overline{w} \in \mathbb{R}^N. \tag{11}$$

Для решения (11) можно применять варианты эффективного по количеству арифметических операций метода предложенного и изучаемого в работе [1]. В этом случае предполагается использование двухступенчатых итерационных процессов, где итерационные параметры могут выбираться с помощью наиболее подходящих в каждом случае вариационных методов для достижения необходимой точности в решениях вспомогательных и рассматриваемой задач.

Вывод. Учитывая всё ранее изложенное, можно отметить, что для решения рассматриваемой задачи (8) с N неизвестными на основании теоремы 2 предложенным итерационным процессом (9) с относительной погрешностью ε, требуется не более чем $\mathrm{O}(N\ln^2\varepsilon^{-1})$ арифметических операций.

Литература

1. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 88–93.

2. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 33–36.

Поступила в редакцию 13 ноября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 42–49

ITERATIVE FACTORIZATION FOR NUMERICAL SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER IN RECTANGULAR AREA

A.L. Ushakov[1]

The elliptic equation of the fourth order in rectangular area is considered under mixed boundary conditions. The solution is based on iterative factorization of the operator that is energetically equivalent to the operator of the solved solution. Discretization of initial task is made on the basis of method of final elements, and the precondition is selected on the basis of final differences method, thus the speed of convergence of iterative process doesn't depend on discretization parameters.

Keywords: iterative factorization, precondition.

References

1. Ushakov A.L. Modifikatsiya iteratsionnoy faktorizatsii dlya chislennogo resheniya dvukh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka v pryamougol'noy oblasti (Updating iterative factorization for the numerical solution of two elliptic equations of the second order in rectangular area). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2013. Vol. 5, no. 2. pp. 88–93. (in Russ.).

2. Ushakov A.L. *Izvestiya chelyabinskogo nauchnogo tsentra.* 2007. Issue 1 (35). pp. 33–36. (in Russ.).

Received 13 November 2013

[1] Ushakov Andrei Leonidovich is Senior Lecturer, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University.
E-mail: ushakov_al@inbox.ru