

ИНВАРИАНТНАЯ ЗАВИХРЕННОСТЬ И ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЗУЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ПРОНИЦАЕМУЮ МЕМБРАНУ

О.Н. Шабловский¹

Представлен новый класс стационарных ползущих движений вязкой жидкости с учетом внешней силы сопротивления. Дан пример инвариантной завихренности течения жидкости сквозь проницаемую мембранно-капсульную систему. Изучено влияние морфологических свойств капсул на закономерности производства энтропии. Обнаружена важная роль корреляции «вихрь скорости – вязкая диссипация энергии» в формировании теплового поля жидкости.

Ключевые слова: ползущее течение; завихренность; вязкая диссипация энергии; производство энтропии; устойчивость.

Введение. Гидродинамика медленных («ползущих») течений вязкой жидкости имеет широкую область практических приложений [1]: химическая и мембранная технологии, фильтрация воды и нефти в грунтах, дисперсные системы и др. В теоретическом отношении наиболее полно изучены процессы медленного обтекания тел вращения, задачи о движении в жидкости групп из нескольких частиц, а также течение жидкости в пористой среде и вопросы гидродинамической теории смазки. Анализ современного состояния теории ползущих течений [2–5] показывает, что являются актуальными следующие вопросы: вихревые свойства течений при малых числах Рейнольдса, роль вязкой диссипации энергии в формировании структуры теплового поля жидкости, закономерности производства энтропии. Известно, что число Рейнольдса $Re = \rho u_b l / \mu$ представляет отношение сил инерции к силам вязкого трения и определяет интенсивность вынужденной конвекции. Здесь ρ – плотность жидкости; u_b – масштаб скорости; l – характерный линейный размер; μ – коэффициент динамической вязкости. Ползущее течение происходит при $Re \ll 1$, и это означает, что вязкость жидкости большая, а конвективное ускорение – малое. Следовательно, в уравнениях движения доминируют силы, зависящие от вязкости, и можно пренебречь инерционными членами. Движение жидкости мы рассматриваем с учетом внешней силы трения $\vec{F} = -\zeta \vec{V}$, которая моделирует сопротивление потоку на границах области течения (стенки трубы, дно кюветы, подстилающая поверхность и др.) [6]. Здесь ζ – коэффициент сопротивления; \vec{V} – вектор скорости жидкости. Следует отметить, что принятый в теории фильтрации закон Дарси можно интерпретировать как линейную зависимость силы сопротивления от скорости фильтрации [7]. Особенности влияния \vec{F} на структуру вязкого потока изложены в [8].

В настоящей статье изучаются гидродинамические и тепловые аспекты задачи о ползущем течении вязкой ньютоновской жидкости сквозь проницаемую мембрану. Цель работы: 1) получить новый класс двумерных стационарных ползущих течений вязкой жидкости с учетом внешней силы сопротивления; 2) построить в виде сильного гидродинамического разрыва математическую модель проницаемой мембранно-капсульной системы; 3) изучить вихревые, диссипативные и энтропийные свойства этого течения.

Точное решение. Стационарное ползущее течение жидкости определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \zeta u, \quad (2)$$

¹ Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра технической механики, Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого.
E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \zeta v, \quad (3)$$

$$c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \quad (4)$$

$$\Phi = \mu \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где x, y – прямоугольные декартовы координаты; p – давление жидкости; u, v – компоненты вектора скорости $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; $c = \rho c_p$ – объемная теплоемкость; Φ – диссипативная функция. Рассматриваем процессы, для которых $\rho, \mu, \zeta, \lambda, c = \text{const}$, и динамическую задачу решаем отдельно от тепловой. Производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов подсчитывается по формуле [9]:

$$\sigma = [(\vec{q} \cdot \vec{q}) / (\lambda T^2)] + (\Phi / T), \quad (6)$$

где \vec{q} – вектор удельного теплового потока, имеющий компоненты, $q_x = -\lambda \partial T / \partial x$, $q_y = -\lambda \partial T / \partial y$. Принцип минимума производства энтропии в стационарных состояниях (принцип Пригожина) выражается неравенством [10]:

$$\sigma_{stab} \leq \sigma_{instab}, \quad (7)$$

где левая/правая части неравенства соответствуют производству энтропии в устойчивом/неустойчивом состояниях. Для неравновесного перехода термодинамической системы из старого в новое состояние принцип (7) означает следующее: новому устойчивому состоянию отвечает меньшее значение производства энтропии, чем производство энтропии старого, но продолженного в неустойчивую область состояния системы. Подробное изложение этого вопроса и библиография проблемы даны в [10].

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнения гидродинамики (1)–(3) имеют следующее точное решение:

$$u = \psi \delta \eta, \quad v = -\psi \delta \xi, \quad (8)$$

$$\xi = E \sin \delta y, \quad \eta = E \cos \delta y, \quad E = \exp \delta x, \quad (9)$$

$$\dot{\psi} \equiv d\psi / d\xi = \psi_1 + 3\psi_3 \xi^2, \quad \psi_1, \psi_3 = \text{const},$$

где $\psi = \psi(\xi)$ – функция тока. Параметр решения δ удовлетворяет связи $\zeta = 8\delta^2 \nu$, $\nu = \mu / \rho$. Давление жидкости подсчитывается по формуле

$$\Pi \equiv p - p_0 = 2\mu \delta^2 E^2 \eta \psi_3 - \rho \zeta (\psi_1 \eta + \psi_3 \xi^2 \eta), \quad p_0 \equiv \text{const}. \quad (10)$$

Завихренность течения равна

$$\omega \equiv (1/2)[(\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)] = -\dot{\psi} \delta^2 E^2 / 2, \quad \dot{\psi} = 6\psi_3 \xi, \quad (11)$$

где ψ_3 – свободный параметр. Компоненты девиатора тензора напряжений такие: $\tau_{xx} = -\tau_{yy} = 2\mu \delta u / \partial x$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu[(\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y)]$. Диссипативная функция (5) имеет вид:

$$\Phi = 4\mu \delta^4 E^2 [9\psi_3^2 E^4 \sin^2 \delta y \cos^2 \delta y + (\psi_1 + 6\psi_3 E^2 \sin^2 \delta y)^2]. \quad (12)$$

Плоскость течения разделена на две области. Область 1 – это правая полуплоскость $x \geq 0$, $\delta^{(1)} = \delta < 0$. Область 2 – это левая полуплоскость $x \leq 0$, $\delta^{(2)} = -\delta^{(1)} = -\delta > 0$. Верхний индекс в скобках указывает номер области. Принимая во внимание структуру формул (8)–(10), берем $\psi_1^{(1)} = -\psi_1^{(2)} = \psi_1$, $\psi_3^{(1)} = -\psi_3^{(2)} = \psi_3$, $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$, $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$, $p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_0$, и тогда при одних и тех же значениях $|x|$ получаем:

$$\begin{aligned} u(x \leq 0, y) &= u(x \geq 0, y); \quad v(x \leq 0, y) = -v(x \geq 0, y); \\ \Pi(x \leq 0, y) &= -\Pi(x \geq 0, y); \quad \tau_{xx}(x \leq 0, y) = -\tau_{xx}(x \geq 0, y); \\ \tau_{xy}(x \leq 0, y) &= \tau_{xy}(x \geq 0, y); \quad \omega(x \leq 0, y) = \omega(x \geq 0, y), \end{aligned} \quad (13)$$

где $y \in (-\infty, \infty)$. Из дальнейшего решения тепловой задачи будет ясно, что надо также взять $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda$, $c^{(1)} = c^{(2)} = c$.

Гидродинамическая интерпретация решения заключается в том, что проницаемую мембрану [линию $x=0$] мы принимаем за неподвижный вдоль нормали \vec{n} сильный разрыв. На таком разрыве должны быть выполнены динамические условия совместности [11], являющиеся следствием интегральных законов сохранения массы, импульсов и энергии. В данном случае имеем при $x=0$ следующие условия:

$$\rho^{(1)}u_1 = \rho^{(2)}u_2 = \rho u; \quad (14)$$

$$\vec{R} + \vec{p}_n^{(1)} - \rho^{(1)}\vec{V}_1 u_1 = \vec{p}_n^{(2)} - \rho^{(2)}\vec{V}_2 u_2; \quad (15)$$

$$W + \vec{p}_n^{(1)} \cdot \vec{V}_1 - q_x^{(1)} - \rho^{(1)}u_1[(\vec{V}_1^2/2) + U_1] = \vec{p}_n^{(2)} \cdot \vec{V}_2 - q_x^{(2)} - \rho^{(2)}u_2[(\vec{V}_2^2/2) + U_2], \quad (16)$$

где \vec{p}_n – вектор поверхностных напряжений с компонентами $p_{nx} = -p + \tau_{xx}$, $p_{ny} = \tau_{xy}$; $\vec{R}(R_x, R_y)$ и W – поверхностные плотности распределения на разрыве внешних для жидкости возбуждающей силы и притока энергии. Индексами 1, 2 отмечены параметры течения справа ($x=+0$) и слева ($x=-0$) от разрыва. Далее все формулы записаны в терминах и обозначениях правой полуплоскости, $x \geq 0$.

Физические и физико-химические процессы на поверхности мембраны могут быть весьма разнообразными [12]. Источники импульсов \vec{R} и энергии W моделируют возбуждающее динамическое и тепловое воздействие мембраны $x=0$ на жидкость. Из выражений (8)–(10) [см. также группу формул (13)] ясно, что при $x=0$ u -компонента скорости непрерывна, а v -компонента меняет знак. Таким образом, при протекании через разрыв вектор скорости \vec{V} сохраняет свой модуль, но изменяет направление, т.к. поворачивается на некоторый угол. Вязкое касательное напряжение τ_{xy} и диссипативная функция Φ непрерывны при $x=0$. Отклонение давления $\Pi = p - p_0$ от его отсчетного значения p_0 имеет разные знаки по обе стороны ($x=\pm 0$) разрыва. Вся плоскость течения разделена на полосы линиями $\delta y = \pi n_0 [n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots - \text{любое целое число}]$, вдоль которых $v=0$, $u = \delta E \psi_1(-1)^{n_0}$. Значит, $\delta y = \pi n_0$ – это линии растекания потока (spread line), которые обладают еще и тем свойством, что вдоль них $\omega=0$, см. (11). При переходе через линию растекания v -компонента скорости и завихренность ω меняют знаки. Характерные точки гидродинамического поля – это точки пересечения линии разрыва и линий растекания:

$$x=0, \delta y = \pi n_0, v=0, u = \psi_1 \delta(-1)^{n_0}, \Pi = (-1)^{n_0} \rho \zeta [(\psi_3/4) - \psi_1].$$

Для краткости называем каждую такую точку s -точкой. В s -точке скорость непрерывна, а скачок давления $[\Pi^{(1)} = -\Pi^{(2)}]$ обусловлен действием возбуждающей силы \vec{R} . Группа линий поворота

$$\delta y = 2\pi n_0 \pm (\pi/2), u=0, v = -(\psi_1 + 3\psi_3 E^2) \delta(\pm E), p = p_0$$

представляет собой семейство изобар, и на каждой p_0 -изобаре происходит поворот вектора скорости, потому что u -компонента меняет знак при переходе через p_0 -изобару. Данное течение является периодическим по координате y , и наблюдается перемежаемость p_0 -изобар (линий поворота) и линий растекания потока. Обсудим два режима движения жидкости: безвихревое течение по обе стороны проницаемой мембраны и вихревое течение, содержащее мембранно-капсульную систему.

Безвихревое течение. При $\psi_3 = 0$ имеем нулевую завихренность $\omega \equiv 0$, см. (11). Схема расположения векторов скорости жидкости дана на рис. 1. В каждой полосе между линиями растекания доминирующее направление движения показано дуговыми стрелками. В центральной части рис. 1 (вблизи оси ординат δy) тонкими стрелками указано изменение направления вектора скорости, являющееся результатом натекания жидкости на сильный разрыв. Отдельный отрезок на разрыве, например $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ и т.д. является звеном всей цепочки $x=0$.

Из рис. 1 ясно, что каждое звено обтекается потоком жидкости и на краях звена, т.е. в s -точках, векторы скорости параллельны и противоположны друг другу. Из (15) находим:

$$x = 0, R_x = (9/4)\Pi, R_y = 2\rho uv, \quad (17)$$

где $\Pi(x=0, y) = -8\delta\mu u(x=0, y)$. Для случая $\psi_3 = 0$ гидродинамическое поле (8)–(10) есть результат действия двумерного источника импульсов (17). На разрыве скорость и давление жидкости выражаются через компоненты возбуждающей силы следующим образом: $\Pi = (4/9)R_x$, $u^2v^2 = R_y^2/(4\rho^2)$, $u^2 + v^2 = \delta^2\psi_1^2$. Давление Π пропорционально поперечной к разрыву R_x -компоненте. Продольная по отношению к разрыву R_y -компонента силы нелинейным образом проявляет себя при формировании двумерного гидродинамического поля, а именно: R_y мультипликативно связана со скоростями u, v .

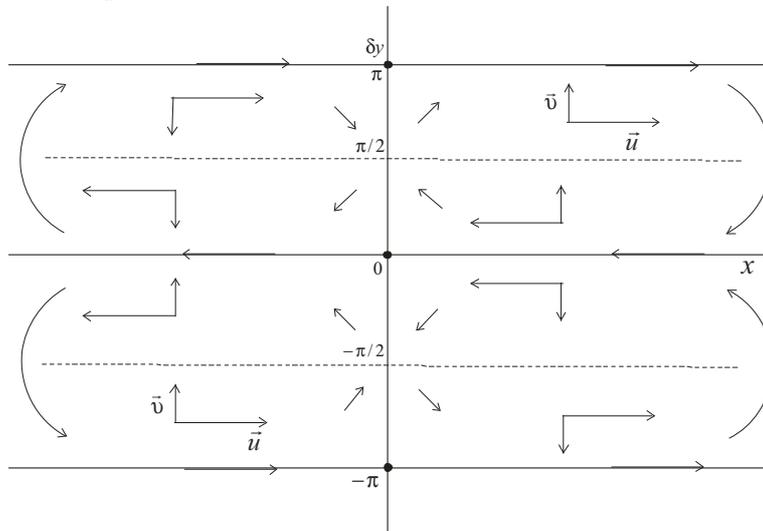


Рис. 1. Схема течения жидкости по обе стороны сильного разрыва. Толстые стрелки – компоненты вектора скорости; тонкие стрелки – направление вектора скорости вблизи разрыва. Линия растекания – сплошная; линия поворота – пунктирная. Дуговая стрелка указывает направление движения жидкости в полосе между линиями растекания. Темные кружки – s -точки

Уравнение энергии (4) имеет точное решение:

$$T - T_0 = \theta_1 \xi - (\mu_1^2 \xi^2 / 2), \mu_1^2 = (4\mu / \lambda) \delta^2 \psi_1^2, \psi_3 = 0, \quad (18)$$

где θ_1 – произвольная постоянная; T_0 – отсчетное значение температуры. Безразмерный критерий $\mu_1^2 / T_0 = 4Pr(u^2 + v^2) / (c_p T_0)$, $x=0$ несет информацию о числе Прандтля $Pr = c_p \mu / \lambda$ и об отношении двух характерных плотностей энергии: кинетической $\rho(u^2 + v^2) / 2$ и тепловой $\rho c_p T_0$. Своеобразие решения (18) в том, что для него сумма конвективных членов в уравнении (4) обращается в нуль тождественно. Взяв $T_0^{(1)} = T_0^{(2)} = T_0$, $\theta_1^{(1)} = -\theta_1^{(2)} = \theta_1 > 0$, получаем, что при $x=0$ непрерывны температура и касательная к разрыву составляющая теплового потока $q_y^{(1)} = q_y^{(2)}$; см. также (13). Нормальный к разрыву тепловой поток меняет знак при переходе через границу $x=0$: $q_x^{(1)} = -q_x^{(2)}$. На основе соотношения (16) получаем:

$$W = -2\lambda\delta(T - T_0) - [5u^2 / (u^2 + v^2)](\Phi / \delta), x = 0. \quad (19)$$

Это значит, что возбуждающий источник энергии W расщепляется аддитивно на два тепловых потока: первое слагаемое в правой части (19) ассоциируется с переносом энергии за счет теплопроводности, второе слагаемое относится к вязкой диссипации энергии. В s -точке имеем постоянную температуру $T = T_0$ и источник энергии $W = -5\lambda\delta\mu_1^2 > 0$; тепловой поток направлен вдоль линии разрыва: $q_x = 0$, $q_y = -\lambda\delta\theta_1(\pm 1)$; производство энтропии $\sigma = [\lambda\delta^2\theta_1^2 / T_0^2] + (4\mu\delta^2u^2 / T_0)$ экстремумов не имеет.

Точку пересечения линии разрыва $x=0$ и изобары $p=p_0$ назовем p_0 -точкой. Здесь имеем два варианта: p_0^+ и p_0^- различаются знаками $\sin \delta y = \pm 1$. Тепловое состояние этих точек определяется выражениями:

$$T - T_0 = \pm \theta_1 - (\mu_1^2 / 2), \quad W = -2\lambda \delta(T - T_0),$$

и так же, как в s -точке, производство энтропии обладает свойствами монотонности $\partial \sigma / \partial (\mu_1^2) > 0$, $\partial \sigma / \partial (\delta^2) > 0$. Для $\theta_1 > 0$ и $\theta_1 < 0$ решение имеет одно и то же физическое содержание. При $T = T_0 + \mu_1^2 + (\mu_1^4 / 4T_0)$ производство энтропии $\sigma = \sigma(\theta_1)$ достигает минимального значения $\sigma_{\min}(\theta_1)$. При положительном/отрицательном θ_1 этот минимум наблюдается в p_0^+ / p_0^- точке. Режим функционирования p_0^\pm -точки, соответствующий $\sigma_{\min}(\theta_1)$, осуществляется при $\varphi \equiv \lambda(T - T_0)\delta^2 / \Phi = 1 + (\mu_1^2 / 4T_0)$, т.е. в значительной степени зависит от числа Pr . Согласно (7), это значение φ определяет нижнюю границу производства энтропии для устойчивых течений.

Мембранно-капсульная система. Рассмотрим решение (8) – (10) при $\psi_3 > 0$, $\psi_1 < 0$ [напомним, что в левой полуплоскости нужно брать $\psi_3 < 0$, $\psi_1 > 0$]. В этом случае существует неподвижная непроницаемая граница $\xi_w^2 = -\psi_1 / (3\psi_3) > 0$; $\xi_w^{(1)} = -\xi_w^{(2)} = \xi_w$. Линия $\xi = \xi_w$ определяет плоский двумерный контур капсулы $\exp \delta x = \xi_w / \sin \delta y$, причем в каждой полосе, ограниченной линиями растекания $\xi = 0$, следует брать ξ_w с тем же знаком, что и $\sin \delta y$. Будем различать «большие» [$\xi_w^2 = \varepsilon \in (0, 1)$] и «малые» [$\xi_w^2 = 1 - \varepsilon > 0$] капсулы, где ε – малый положительный параметр. На линии поворота $\delta y = 2\pi n_0 \pm (\pi / 2)$ имеем $\exp \delta x = |\xi_w|$, и поэтому малым, но конечным значениям ξ_w^2 соответствует «большая» капсула, вершина которой находится на большом, но конечном расстоянии от мембраны $x=0$. Вместе с тем, чем меньше ξ_w^2 , тем ближе основание капсулы ($x=0$) к линиям растекания. Если $\xi_w^2 = 1 - \varepsilon$, то непроницаемая граница «малой» капсулы локализована в конечной окрестности p_0 -точки. Стыковка при $x=0$ решений для левой и правой полуплоскостей дает излом линии контура капсулы (рис. 2). Точки излома – это точки соединения основания капсулы с мембраной. В итоге имеем мембранно-капсульную систему ($0 < \xi_w^2 < 1$), в которой отдельные проницаемые участки мембраны соединены неподвижными непроницаемыми капсулами. Решение (8)–(10) имеет физический смысл во внешней для капсул плоской двумерной области: $0 \leq \xi^2 \leq \xi_w^2$. Схема течения показана на рис. 2. На стенках капсулы выполнены условия прилипания и непротекания.

Завихренность течения определяется формулой (11) и не зависит от константы ψ_1 , являющейся параметром формы капсулы. Значит, конечные возмущения скорости и давления, которые характеризуются слагаемыми, содержащими ψ_1 [см. (8)–(10)], оставляют без изменения вихрь скорости. Таким образом, в данном классе решений для данного типа конечных возмущений наблюдается инвариантная завихренность ползущего течения вязкой жидкости. Кривизна вершины капсулы равна $K = |\delta|$, т.е. коэффициент сопротивления можно записать в виде $\zeta = 8K^2 \nu$. На вершине капсулы [$\sin \delta y = 1$, $E = \xi_w$] имеем зависимости

$$\omega^2 = 9K^4 \psi_3^2 \xi_w^6, \quad \Phi = 4\mu \omega^2, \quad (20)$$

которые указывают на важную роль кривизны K в формировании вихревого поля.

При решении тепловой задачи учитываем вязкую диссипацию энергии, а конвективными членами в левой части уравнения энергии (4) пренебрегаем, полагая, что $Pe = \text{Re Pr} \ll 1$, где $Pe = lu_b / (\lambda / c)$ – число Пекле. Тепловое состояние жидкости определяется следующим выражением:

$$T - T_0 = \theta_0(\xi) + E^2 \theta_2(\xi), \\ \theta_0(\xi) = (\xi / \xi_w)(\theta_w + \mu_4^2) - (\mu_1^2 \xi^2 / 2) + \mu_{13} \xi^4 - \mu_3^2 \xi^3 [\xi_w^3 + (2\xi^3 / 5)],$$

$$\theta_2(\xi) = (3\mu_3^2 \xi / 4)(\xi_w^3 - \xi^3), \quad \mu_1^2 = 4\mu\delta^2 \psi_1^2 / \lambda, \quad \mu_3^2 = 4\mu\delta^2 \psi_3^2 / \lambda, \\ \mu_{13} = -4\mu\delta^2 \psi_1 \psi_3 / \lambda, \quad \mu_4^2 = -58\mu\delta^2 \psi_1^3 / (135\lambda \psi_3).$$

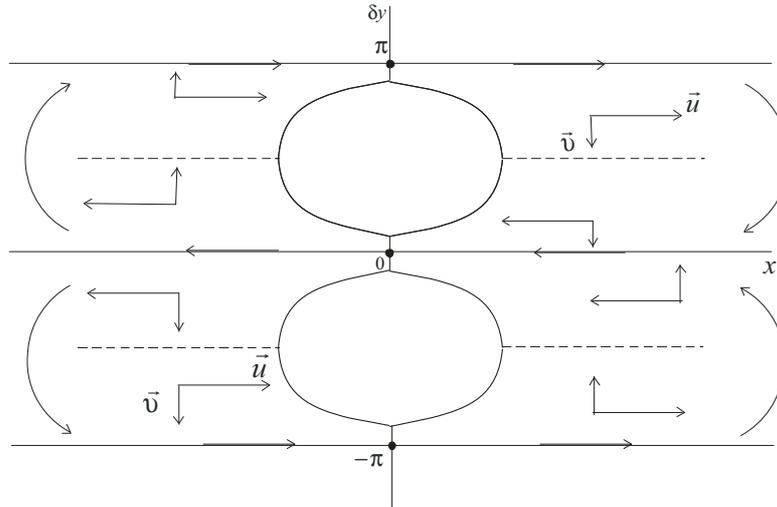


Рис. 2. Схема течения жидкости сквозь мембранно-капсульную систему. Обозначения такие же, как на рис. 1

Линия растекания $\xi = 0$ имеет температуру $T = T_0 > 0$. Стенки капсул тоже изотермические: $\xi = \xi_w, T_w = T_0 + \theta_w > 0$. Выбор произвольной постоянной θ_w определяет температуру капсулы. Если $\theta_w > 0$, то $T_w > T_0$, и называем капсулу «горячей». Если $\theta_w < 0$, то $0 < T_w < T_0$, и называем капсулу «холодной». При протекании через мембрану температура жидкости непрерывна, а вектор теплового потока сохраняет свой модуль и поворачивается на некоторый угол, потому что меняет знак компонента $q_x = q_x^{(1)} = -q_x^{(2)}$. Вдоль линии растекания $q_x = 0$, и вектор \vec{q} ортогонален этой линии. На вершине капсулы тепловой поток ортогонален мембране: $q_y = 0$. На мембране возбуждающие источники импульсов и энергии имеют вид:

$$x = 0, \quad R_x = D\Pi, \quad R_y = 2\rho uv, \\ D = (2 + 27\xi_w^2 - 26\sin^2 \delta y) / (1 + 12\xi_w^2 - 4\sin^2 \delta y), \\ W = 2(\Pi u - \tau_{xx}u - \tau_{xy}v + q_x). \quad (21)$$

Для «большой» капсулы получаем простую формулу $D \cong 2$, т.е. нормальной к разрыву компоненте $R_x \cong 2\Pi$ соответствует удвоенный перепад давления $\Pi = p - p_0$. Для «малой» капсулы вблизи ее основания $D \cong 1/3$, а в s -точках $D \cong 29/13 > 2$. Развернутая запись выражения $W(y)$ не приводится. Отметим только, что у основания «большой» капсулы, т.е. вблизи s -точки, источник энергии генерирует завихренность: $W = [-\mu\omega^2 / (3\delta)] + O(\varepsilon)$. Для системы «малых» капсул источник энергии в s -точке генерирует кинетическую энергию на линии растекания: $W = (-64/3)\mu\delta^2 u^2 + O(\varepsilon)$. Стенки «малой» капсулы располагаются в ε -окрестности p_0 -точки, и здесь источник энергии $W \cong 2q_x$ определяет нормальный к разрыву тепловой поток, а остальные слагаемые в (21) имеют по отношению к ε порядок малости не ниже первого.

Обсудим экстремальные свойства производства энтропии. Сначала рассмотрим σ_s -режим, который характеризуется тем, что в s -точке зависимость $\sigma(\xi_w^2)$ имеет минимум при условии, что

$$\varphi_w \equiv \frac{\lambda(T_w - T_0)\delta^2}{\Phi} = \frac{1}{12} + \frac{29\xi_w^2}{45} \mp \left[\frac{1}{36} \left(1 + \frac{29\xi_w^2}{5} \right)^2 + 2z\varphi_0 \right]^{1/2}, \quad (22)$$

где $\Phi = 9\lambda\delta^2 \xi_w^4 \mu_3^2$, $\varphi_0 = \lambda T_0 \delta^2 / \Phi$, $T_w - T_0 = \theta_w$. Здесь учтено, что в s -точке

$$\vec{q} \cdot \vec{q} = \lambda^2 \delta^2 (A_1 + B_1)^2, \quad A_1 \xi_w = \theta_w + \mu_4^2, \quad B_1 = 3\mu_3^2 \xi_w^3 / 4. \quad (23)$$

Знаки $-/+$ в (22) относятся к «холодной»/«горячей» капсулам. Для «горячей» капсулы σ_s -режим существует при всех $T_0 > 0$, а для «холодной» стенки имеем ограничение $\varphi_0 > (12/5)$, $\xi_w^2 \in (0, 1)$. Если капсула «большая», то допустимы меньшие значения φ_0 . Например, при $\xi_w^2 = 1/100$ достаточно взять $\varphi_0 > 1/10$. Связь (22) определяет нижнюю границу производства энтропии в σ_s -режиме для устойчивых течений сквозь мембранно-капсульную систему.

Теплоизолированная s -точка ($\bar{q} = 0$) существует в режиме «холодной» стенки $\theta_w < 0$ (23) и при этом на вершине капсулы получаем $\partial(\omega^2)/\partial(\xi_w^2) > 0$. Значит, с ростом размера «холодной» капсулы [$\partial(\xi_w^2) < 0$] модуль завихренности на вершине убывает. Чем больше кривизна вершины, тем больше вязкая диссипация энергии $\Phi \sim \omega^2 \sim K^4$ (20).

Далее рассмотрим σ_K -режим, для которого на вершине «горячей» капсулы зависимость $\sigma = \sigma(K)$ имеет экстремум при условии, что

$$(\chi - 7)(21 - \chi) = 72\chi(T_w / \theta_w), \quad 7 < \chi < 21. \quad (24)$$

Безразмерный критерий $\chi = \lambda\theta_w / (\mu\psi_3^2 \xi_w^6 K^2)$ содержит параметр завихренности ψ_3^2 , а также параметры ξ_w^2 и K , определяющие морфологические свойства капсулы (размер и кривизну). Ясно, что $\chi = 36\varphi_w$, где $\varphi_w = \lambda(T_w - T_0)\delta^2 / \Phi$ вычисляется на вершине капсулы. Расчеты показывают, что существует пороговое значение $\chi_* = \sqrt{147}$, разделяющее интервал (7, 21) на две части, для которых σ_K -режим (24) обладает двумя типами экстремумов производства энтропии. Если $7 < \chi < \chi_*$, то существует нижняя граница $\sigma_{\min}(K)$. Если $\chi_* < \chi < 21$, то существует максимум $\sigma_{\max}(K)$ – верхняя граница производства энтропии для устойчивых течений. Нетрудно видеть, что в пороговом состоянии $\chi_* = \chi$ при заострении вершины капсулы нужно повышать температуру стенки T_w .

Заключение. Установлено, что существует класс стационарных ползущих течений, обладающих инвариантной завихренностью. А именно: указан определенный тип конечных возмущений скорости и давления, которые оставляют без изменения вихрь скорости. Обнаружена важная роль вязкой диссипации энергии при течении жидкости сквозь проникаемую мембранно-капсульную систему. Изучение σ_s и σ_K режимов [см. (22) и (24)] показало, что морфологические свойства капсулы оказывают значительное влияние на условия существования экстремумов производства энтропии.

Литература

1. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
2. Аристов, С.Н. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – № 5. – С. 547–566.
3. Чернявский, В.М. Течение Стокса поршневого типа в прямоугольной области / В.М. Чернявский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 425, № 3. – С. 334–337.
4. Любимова, Т.П. Течения, индуцируемые колебаниями нагретой сферы / Т.П. Любимова, А.А. Черепанова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.
5. Пономарева, М.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость / М.А. Пономарева, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенко // Механика жидкости и газа. – 2011. – Т. 46, № 1. – С. 53–61.
6. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
7. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
8. Шабловский, О.Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О.Н. Шабловский // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5. – № 32(249). – С. 77–82.

9. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
10. Климонтович, Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса / Ю.Л. Климонтович. – М.: КомКнига, 2007. – 328 с.
11. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
12. Baker, R.W. Membrane Technology and Applications / R.W. Baker. – Wiley, 2004. – 538 p.

Поступила в редакцию 21 января 2013 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 59–66*

INVARIANT VORTICITY AND THERMAL STATE OF THE CREEPING FLOW OF A FLUID THROUGH A PERMEABLE MEMBRANE

O.N. Shablovsky¹

A new class of stationary creeping flows of a viscous fluid is presented in compliance of external resistance force. An example of an invariant vorticity of a fluid flow is studied through the permeable membrane and capsular system. The influence of capsular morphology on the entropy production is mastered. An important role of the correlation “velocity vortex – viscous dissipation of energy” in forming the thermal field of a fluid is discovered.

Keywords: creeping flow, vorticity, viscosity dissipation of energy, entropy production, stability.

References

1. Khappel' Dzh., Brenner G. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynol'dsa* (Hydrodynamics at Reynolds small numbers). Moscow: Mir, 1976. 630 p. (in Russ.). [Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. New Jersey: Prentice Hall, 1965. 553 p.]
2. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*. 2009. no. 5. pp. 547–566. (in Russ.).
3. Chernyavskiy V.M. *Doklady RAN*. 2009. Vol. 425, no. 3. pp. 334–337. (in Russ.).
4. Lyubimova T.P., Cherepanova A.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*. 2011. Vol. 4, no. 3. pp. 74–82. (in Russ.).
5. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2011. Vol. 46, no. 1. pp. 53–61. (in Russ.).
6. Gledzer E.B., Dolzhanskiy F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primeneniye* (Systems of hydrodynamic type and their application). Moscow: Nauka, 1981. 368 p. (in Russ.).
7. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (Theory of ground water movement). Moscow: Nauka, 1977. 664 p. (in Russ.).
8. Shablovskiy O.N. Trigonometricheskii profil' skorosti sdvigovogo techeniya vyzkoy zhidkosti (Trigonometrical profile of the velocity of the shear flow of the viscous fluid). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 5. no. 32(249). pp. 77–82. (in Russ.).
9. Zhou D., Casas-Baskes Kh., Lebon Dzh. *Rasshirennaya neobratimaya termodinamika* (Extended irreversible thermodynamics). Moskva–Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2006. 528 p. (in Russ.). [Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer Verlag, 2012. 478 p.]
10. Klimontovich Yu.L. *Turbulentnoe dvizhenie i struktura khaosa* (Turbulent motion and the structure of chaos). Moscow: KomKniga, 2007. 328 p. (in Russ.).
11. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* (Continuum Mechanics). Moscow: Nauka, 1973. Vol. 1. 536 p. (in Russ.).
12. Baker R.W. *Membrane Technology and Applications*. Wiley, 2004. 538 p.

Received 21 January 2013

¹ Shablovsky Oleg Nikiphorovich is Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Technical Mechanics Department, Machine Building Faculty, Gornostan State Technical University.
E-mail: shablovsky-on@yandex.ru