

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОНКОМ ЖИДКОМ СЛОЕ ПРИ ВОЛНООБРАЗОВАНИИ

Л.А. Прокудина<sup>1</sup>

Представлена математическая модель волнового течения неизоэнтальной жидкой пленки. Рассчитаны волновые характеристики течения: частота, инкремент, фазовая скорость при неоднородности поверхностного натяжения. Определены области существования волновых режимов вертикальной жидкой пленки. В рамках нелинейного параболического уравнения исследовано нелинейное развитие возмущений на свободной поверхности пленки. Показано, что в окрестности кривой нейтральной устойчивости проявляется эффект направленного переноса энергии к волнам в окрестности гармоники максимального инкремента.

*Ключевые слова:* жидкая пленка, неустойчивость, формы волн, нелинейное параболическое уравнение.

Изучение систем физико-химической гидродинамики с поверхностью раздела между жидкой и газовой фазами обусловлено, прежде всего, их прикладным значением [1, 2]. Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела, широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Тепломассообменные аппараты, в которых реализуется течение тонких жидких пленок под действием силы тяжести, весьма перспективны в химической, нефтехимической технологии. В жидких пленках обеспечиваются высокие скорости переноса тепла и массы в сочетании с малой толщиной пленки, но то же время приходится решать сложнейшие вопросы, связанные с межфазной неустойчивостью, влиянием на нее разнообразных физико-химических факторов, обусловленных, например, наличием градиентов температуры, концентрации вещества на межфазной поверхности, фазовыми переходами. Процессы течения жидких пленок, обдуваемых газовым потоком, также представляют значительный интерес для науки и проектирования современной пленочной аппаратуры.

Рассмотрим течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости (жидкой пленки) толщиной  $\delta$  под действием силы тяжести по твердой наклонной плоскости, сопровождающееся обдувом ее свободной поверхности парогазовым потоком. Введем прямоугольную систему координат  $OXYZ$ , плоскость  $OXZ$  связана с поверхностью, по которой движется пленка, ось  $OX$  направлена по течению пленки, ось  $OY$  – по нормали в пленку жидкости (рис. 1).

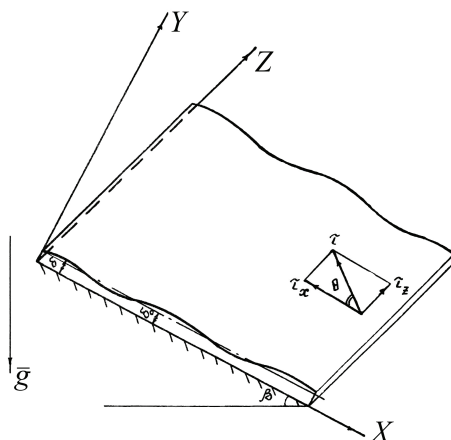


Рис. 1. Схема течения жидкой пленки

<sup>1</sup> Прокудина Людмила Александровна – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра прикладной математики, Механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.  
E-mail: prokudina-la@mail.ru

Математическая модель течения трехмерной жидкой пленки толщиной  $\delta$  по твердой наклонной поверхности под действием силы тяжести, сопровождающаяся обтеканием ее свободной поверхности парогазовым потоком произвольного направления, представляет собой систему уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающими влияние процессов тепломассопереноса, имеет вид [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial x_+} + F_x + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial v_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial v_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial y_+} + F_y + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial w_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial w_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial w_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial w_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial z_+} + F_z + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + \frac{\partial w_+}{\partial z_+} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$y = 0: \quad u_+ = w_+ = 0, \quad v_+ = V_0; \quad (2)$$

$$y = \delta: \quad \frac{1}{Re} \left[ 2 \frac{\partial u_+}{\partial x_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - \left( \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left( \frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} + N \left( \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_x = 0; \quad (3)$$

$$\frac{1}{Re} \left[ 2 \frac{\partial w_+}{\partial z_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - \left( \frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left( \frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} + N \left( \frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_z = 0; \quad (4)$$

$$P_+ = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left( \frac{\partial u_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial x_+} \right) - \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left( \frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) \right] - \sigma_+ \left( \frac{\partial^2 \delta_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 \delta_+}{\partial z_+^2} \right) + \\ + P_0 - \text{sign } \Delta T \frac{\rho_1 - 1}{\rho_2} \frac{1}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2 \delta^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_+} = v_+ - u_+ \frac{\partial \delta}{\partial x_+} - w_+ \frac{\partial \delta}{\partial z_+} + \frac{1}{Re \cdot Pr \cdot Ku} \frac{1}{\delta}. \quad (6)$$

Безразмерные величины в (1–6):  $u_+ = \frac{u}{u_0}$ ,  $v_+ = \frac{v}{u_0}$ ,  $w_+ = \frac{w}{u_0}$  – проекции скорости на соответствующие оси координат;  $t_+ = \frac{t \cdot u_0}{\delta_0}$  – время;  $x_+ = \frac{x}{\delta_0}$ ,  $y_+ = \frac{y}{\delta_0}$ ,  $z_+ = \frac{z}{\delta_0}$  – переменные;  $\delta_+ = \frac{\delta}{\delta_0}$  –

толщина жидкой пленки;  $Re = \frac{u_0 \delta_0 \rho}{\mu}$  – число Рейнольдса;  $F_x = \frac{g_x \delta_0}{u_0^2}$ ,  $F_y = -\frac{g_y \delta_0}{u_0^2}$ ,  $F_z = \frac{g_z \delta_0}{u_0^2}$  –

проекция числа Фруда на соответствующие оси координат;  $P_+ = \frac{P}{\rho u_0^2}$  – давление;  $N = \frac{k + e}{\rho \delta_0^2 u_0}$  –

параметр поверхностной вязкости;  $\bar{\tau}_x = \frac{\tau_x}{\rho u_0^2}$ ,  $\bar{\tau}_z = \frac{\tau_z}{\rho u_0^2}$  – проекции касательного напряжения;

$M = M_T + M_K$  – параметр Марангони:  $M_T = \frac{\partial \sigma}{\partial T^0} \left( \frac{\partial T^0}{\partial y} \right)_{y=\delta} \frac{1}{\rho u_0^2}$ ,  $M_K = \frac{\partial \sigma}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \delta} \frac{1}{\rho u_0^2}$ ;  $Pr = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda}$  –

число Прандтля;  $Ku = \frac{r'}{c_p \Delta T}$  – число фазового перехода;  $\sigma_+ = \frac{\sigma}{\rho u_0^2 \delta_0}$  – параметр поверхностного

натяжения. Здесь  $u_0$  – средняя скорость основного течения жидкой пленки,  $\delta_0$  – толщина пленки в невозмущенном состоянии. В процессе конденсации  $\text{sign } \Delta T = 1$ , а в процессе испарения  $\text{sign } \Delta T = -1$ .

Рассмотрим развитие на поверхности жидкой пленки возмущений, принадлежащих непрерывной полосе волновых чисел:

$$\psi = \int_{k_{0x} - \Delta k_x}^{k_{0x} + \Delta k_x} \int_{k_{0z} - \Delta k_z}^{k_{0z} + \Delta k_z} F(k_\Sigma) \exp\{i(k_x x + k_z z - \omega t)\} dk_x dk_z = A \exp\{i(k_{0x} x + k_{0z} z - \omega(k_0) t)\}, \quad (7)$$

где  $k_0$  – центр волнового пакета;  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ;

$$A = \int_{-\Delta k_x}^{\Delta k_x} \int_{-\Delta k_z}^{\Delta k_z} F(k_{0\Sigma} + \delta k_\Sigma) \exp\left\{i\left(\delta k_x x + \delta k_z z - \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k_x}\right)_{k_0} \delta k_x t - \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k_z}\right)_{k_0} \delta k_z t - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2}\right)_{k_0} (\delta k_x)^2 t - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_z^2}\right)_{k_0} (\delta k_z)^2 t - \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x \partial k_z}\right)_{k_0} \delta k_x \delta k_z t - \varepsilon^2 \bar{\omega}_i t\right)\right\} d\delta k_x d\delta k_z + o(\varepsilon^3)$$

при следующих допущениях:  $\Delta k_\Sigma$  – ширина полосы волновых чисел  $\Delta k_\Sigma = o(\varepsilon)$ ; инкремент  $\omega_i = \varepsilon^2 \bar{\omega}_i = o(\varepsilon^2)$ .

Здесь  $F(k_\Sigma)$  – Фурье-компонента разложения,  $k_\Sigma$  – волновой вектор возмущений,  $k_x$  и  $k_z$  – его проекции на оси  $OX$  и  $OZ$  соответственно,  $\varepsilon$  – малый параметр.

Для амплитуды  $A$  огибающей волнового пакета получено нелинейное параболическое уравнения, коэффициенты которого в явном виде выражаются через параметры волнового течения трехмерной жидкой пленки: инкремент, частоту и их производные первого и второго порядков, –

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_z} \frac{\partial A}{\partial z_1} - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_z^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_z^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial z_1^2} - i \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x \partial k_z} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x \partial k_z} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial z_1} = \bar{\omega}_i A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A. \quad (8)$$

Нелинейное параболическое уравнение (8) для амплитуды  $A$  огибающей волнового пакета, развивающегося по времени на поверхности неизотермической жидкой пленки, относится к одной из базовых моделей нелинейных сред (типа модели Гинзбурга–Ландау). Коэффициенты уравнения учитывают фазовые переходы (конденсация, испарение) на поверхности трехмерной жидкой пленки и включают такие физико-химические факторы, как поверхностную вязкость, неоднородность поверхностного натяжения, силу тяжести, касательное напряжение на поверхности раздела газ-жидкость.

Вычислительные эксперименты, связанные с неустойчивостью жидкой пленки по отношению к возмущениям, волновой вектор которых  $k_\Sigma$  направлен под углом  $\alpha$  к оси  $OX$ :

$$k_\Sigma = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{k_z}{k_x},$$

проведены для диапазона чисел Рейнольдса  $Re \leq 20$ . Необходимость таких исследований связана с интенсификацией процессов тепло- и массообмена в жидких пленках, повышения эффективности, экологической безопасности и надежности пленочных аппаратов.

Дисперсионное уравнение

$$\omega(a_7 k_x + a_9 k_z + i) + a_1 k_x^4 + a_2 k_x^2 k_z^2 + a_3 k_z^4 - a_4 i k_x^3 - a_5 i k_z^3 - a_6 k_x^2 - a_8 k_x k_z - a_{10} k_z^2 + a_{11} i k_x + a_{12} i k_z - \frac{1}{Re \cdot Pr \cdot Ku} = 0, \quad (9)$$

где  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , позволяет рассчитать волновые характеристики:  $\omega_r$  – частоту,  $\omega_i$  – инкремент, фазовую скорость  $c_r = \frac{\omega_r}{k}$ , а также производные, входящие в уравнение (8).

Коэффициенты дисперсионного уравнения (9) имеют вид:

$$a_1 = -\frac{Re \cdot \sigma}{3}, a_2 = 2a_1, a_3 = a_1, a_4 = -\frac{Re^2 F_x N}{2}, a_5 = -\frac{Re^2 F_z N}{2}, a_6 = a_6^* + a_6^1,$$

$$a_6^* = -\frac{Re \cdot F_y}{3} - \frac{Re \cdot M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x), a_6^1 = \frac{2}{3} Re \cdot \text{sign } \Delta T \frac{C}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2}, a_7 = \frac{5}{24} Re^2 F_x,$$

$$a_8 = \frac{3}{20} Re^3 F_x F_z + \frac{3}{40} Re^3 (F_z \tau_x + F_x \tau_z), a_9 = \frac{5}{24} Re^2 F_z, a_{10} = a_{10}^* + a_{10}^1,$$

$$a_{10}^* = -\frac{Re \cdot F_y}{3} - \frac{Re \cdot M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_z (\tau_z + F_z), a_{10}^1 = \frac{2}{3} Re \cdot \text{sign } \Delta T \frac{C}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2}, a_{11} = -Re \cdot (F_x + \tau_x),$$

$$a_{12} = -Re \cdot (F_z + \tau_z).$$

Волновые характеристики (инкремент  $\omega_i$  и фазовая скорость  $c_r$ ) возмущений изображены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

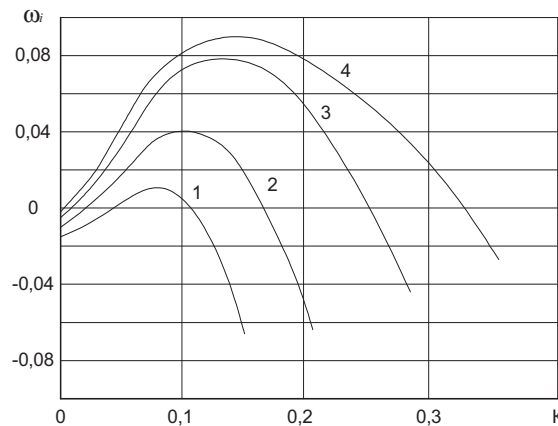


Рис. 2. Зависимость инкремента от волнового числа:  
1 –  $Re = 7$ ; 2 –  $Re = 10$ ; 3 –  $Re = 15$ ; 4 –  $Re = 20$

На каждой кривой инкремента (рис. 2) можно отметить наличие характерных точек:

- перегиба, которому соответствует значение волнового числа  $k_n$ ;
- максимального значения инкремента, который обозначим  $k_{\omega_i \max}$ ;
- соответствующих нейтральной устойчивости ( $\omega_i = 0$ ), волновые числа которых обозначим  $k_{\omega_i=0}$ .

Совокупность точек  $k_{\omega_i=0}$  для исследуемого диапазона чисел Рейнольдса образует кривую нейтральной устойчивости (рис. 4, кривая  $\omega_i = 0$ ), а точек  $k_{\omega_i \max}$  – образует кривую максимального роста возмущений (рис. 4, кривая  $\omega_i \max$ ).

Фазовая скорость (рис. 3) в области неустойчивости жидкой пленки для каждого числа Рейнольдса имеет минимальное значение ( $c_{r \min}$ ), которое соответствует волновому числу  $k_{\omega_i \max}$ . Фазовая скорость  $c_{r \min}$  падает с ростом числа Рейнольдса.

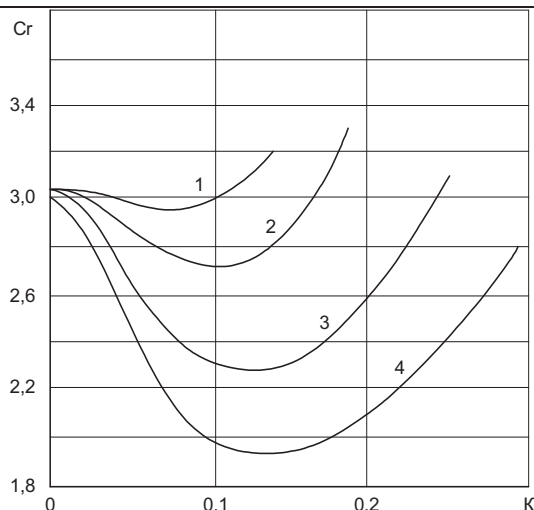


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от волнового числа:  
1 –  $Re = 7$ ; 2 –  $Re = 10$ ; 3 –  $Re = 15$ ; 4 –  $Re = 20$

В ходе вычислительных экспериментов найдены области существования волновых режимов жидкой пленки при свободном стекании, конденсации, испарении, а также при воздействии физико-химических факторов модели (1)–(6). На рис. 4 представлена область существования волновых режимов вертикальной жидкой пленки в процессе испарения. Для чисел Рейнольдса  $Re > 10$  вблизи нейтральной кривой существует область, в которой проявляется эффект направленного переноса энергии по спектру волнового пакета и его смещение в направлении гармоники максимального инкремента. В окрестности  $\omega_{i \max}$  существуют стационарные монохроматические режимы волновых течений жидких пленок, что также отмечалось и в экспериментах [1, 2].

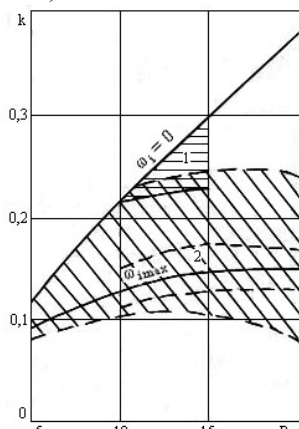


Рис. 4. Области существования волновых режимов вертикальной пленки

Расчет коэффициентов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  при нелинейном члене уравнения (8), характеризующих нелинейное затухание возмущений ( $\beta_1$ ) и зависимость фазы от амплитуды ( $\beta_2$ ), позволил определить:

- нелинейное взаимодействие возмущений в окрестности  $\omega_{i \max}$  (рис. 4, область 2) таково, что наблюдаются незначительные изменения коэффициентов  $\beta_1, \beta_2$ , они практически сохраняют свое значение в области 2;
- линейную зависимость фазы от амплитуды для чисел Рейнольдса  $Re < 8$  и нелинейную для  $Re \geq 8$ .

Для волновых пакетов в окрестности гармоники максимального инкремента свойственна самая высокая степень неустойчивости системы. В рассматриваемой окрестности повышена интенсивность формирования структуры течения в приповерхностных слоях, степень ее развитости. Формы волн вертикальной жидкой пленки воды при неоднородности поверхностного натяжения представлены на рис. 5, кривая 1.

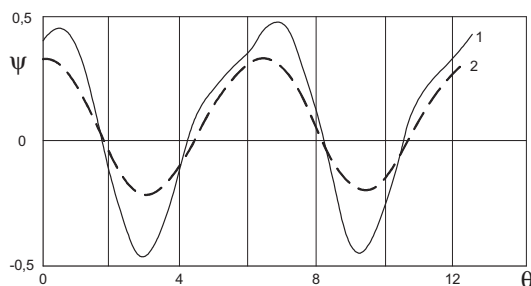


Рис. 5. Форма волны при  $Re=15$ :  
1 –  $M=1, N=0$ ; 2 –  $M=1, N=1$

Наличие в жидкой пленке нерастворимых поверхностно-активных веществ, таких как масла, жиры (параметр  $N$ ), вязкость которых больше вязкости воды и возрастает с увеличением их молекулярной массы, при движении жидкого слоя приводит к возникновению сил поверхностной вязкости, качественно влияющих на волновые характеристики течения трехмерной жидкой пленки, границу устойчивости. Пленки нерастворимых поверхностно-активных веществ, обладавая большим внутренним трением, при движении тонкого слоя вязкой жидкости забирают значительную часть его энергии, что ведет к уменьшению скорости возмущенного течения и сглаживанию профиля волн (рис. 5, кривая 2).

Представим комплексную амплитуду  $A$  в виде суммы амплитуд мод

$$A = a_0 \exp i\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n1} \exp i\theta_{n1} \exp ink_1 x + a_{n2} \exp i\theta_{n2} \exp(-ink_1 x)). \quad (10)$$

Амплитуды гармоник (10) для исследуемой диспергирующей системы с зависимостью фазы от амплитуды в условиях формирования монохроматической волны изображены на рис. 6.

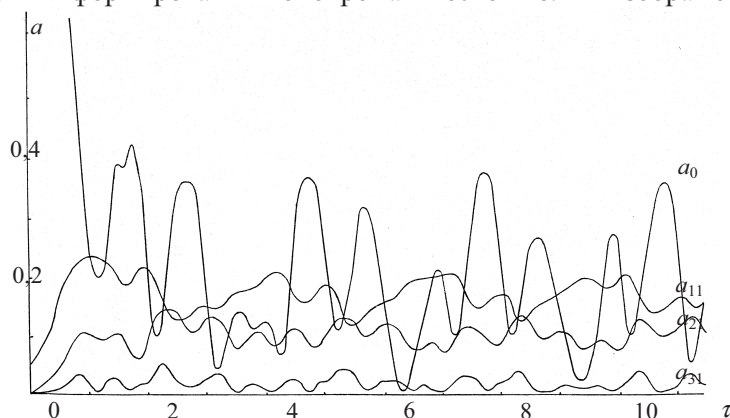


Рис. 6. Амплитуды мод (10)

Представленная нелинейная теория волнового течения жидкой пленки позволяет исследовать характер нелинейного взаимодействия возмущений, учитывая различные условия: изменение угла наклона поверхности стекания, неоднородность поверхностного натяжения.

### Литература

1. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М.: Наука, 1990. – 271 с.
2. Алексеенко, С.В. Волновое течение пленок жидкости / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. – М.: Наука, 1992. – 256 с.
3. Прокудина, Л.А. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки / Л.А. Прокудина, Г.П. Вяткин // Доклады РАН, 1998. – Т. 362, № 6. – С. 770–772.

Поступила в редакцию 7 июня 2013 г.

**MODELLING OF NONLINEAR DEVELOPMENT OF PERTURBATIONS  
IN A THIN LIQUID LAYER AT WAVEFORMATION****L.A. Prokudina<sup>1</sup>**

The mathematical model of the wave flow of a non-isothermal liquid film is shown. Wave characteristics (frequency, increment, phase velocity) are calculated under inhomogeneity of surface tension. The areas of wave modes of liquid film are determined. Within nonlinear parabolic equation nonlinear development of perturbances is analyzed. It is shown that there is a phenomenon of directed transfer of energy to the wave in the region of maximum increment.

*Keywords: liquid film, instability, wave shapes, nonlinear parabolic equation.*

**References**

1. Kholpanov L.P., Shkadov V.Ya. *Gidrodinamika i teplomassoobmen s poverkhnost'yu razdela* (Hydrodynamics and heat and mass exchange with the surface of the part). Moscow, Nauka Publ., 1990. 271 p. (in Russ.).
2. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G. *Volnovoe techenie plenok zhidkosti* (Wave flow of liquid films). Moscow, Nauka Publ., 1992. 256 p. (in Russ.).
3. Prokudina L.A., Vyatkin G.P. *Doklady RAN*. 1998. Vol. 362, no. 6. pp. 770–772. (in Russ.).

*Received 7 June 2013*

---

<sup>1</sup> Prokudina Lyudmila Alexandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.

E-mail: prokudina-la@mail.ru