

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА

В.Ф. Мирасов<sup>1</sup>, А.И. Сидикова<sup>2</sup>

Приведено приближенное решение задачи теплообмена методом регуляризации А.Н. Тихонова 2-го порядка, а также получена оценка погрешности этого приближенного решения.

*Ключевые слова:* операторное уравнение, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

### Введение

Хорошо известно, что обратные задачи теплообмена обладают целым рядом характерных особенностей, а их решение и практическое использование сопряжено с определенными трудностями, обусловленными с одной стороны их некорректностью, а с другой – высокими требованиями, предъявляемыми к точности решения этих задач. Однако, при надлежащей разработке теории и создании эффективных алгоритмов, методы решения обратных задач теплообмена являются достаточно эффективными и открывают новые возможности в тепловых исследованиях. Широкое практическое распространение данные задачи получили в таких отраслях науки и техники, как машиностроение, авиационная и космическая техника, энергетика, металлургия.

Настоящая статья посвящена исследованию и решению обратной граничной задачи теплообмена [1, с. 33] методом регуляризации А.Н. Тихонова 2-ого порядка [2]. Получено приближенное решение данной задачи, а также оценка погрешности приближенного решения.

### Постановка прямой задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = h(t), \quad t \in [0, t_0], \quad (3)$$

где  $h(t) \in W_2^2[0, t_0]$ ,  $\|h(t)\|_{W_2^2}^2 = \int_0^{t_0} h^2(t) dt + \int_0^{t_0} |h''(t)|^2 dt$ ,

$$h(0) = h'(0) = h(t_0) = h'(t_0) = 0, \quad (4)$$

и

$$\int_0^{t_0} h^2(t) dt + \int_0^{t_0} |h''(t)|^2 dt \leq r_1^2, \quad (5)$$

где  $r_1$  – некоторое известное число,

$$u(1,t) = 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (6)$$

Рассмотрим классическое решение  $u(x,t)$  задачи (1)–(6), то есть  $u(x,t) \in C([0,1] \times [0, t_0]) \cap C^{2,1}((0,1) \times (0, t_0))$ .

Из теоремы, сформулированной в [3, с. 190], следует существование и единственность такого решения. Решение задачи (1)–(6) имеет вид

$$u(x,t) = (1-x)h(t) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \pi n x, \quad (7)$$

<sup>1</sup> Мирасов Вадим Фаритович – аспирант, кафедра Вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.  
E-mail: vadim.mirasov@yahoo.com

<sup>2</sup> Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

где

$$v_n(t) = -\frac{2}{\pi n} \int_0^t e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau. \quad (8)$$

## Исследование гладкости решения $u(x, t)$

Из (8) следует, что

$$v_n(t) = \frac{2}{(\pi n)^3} [1 - e^{-(\pi n)^2 t}] h'(t). \quad (9)$$

Из формул (7) и (9) следует, что

$$u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, t_0]). \quad (10)$$

Теперь перейдем к исследованию непрерывности функции  $u_t'(x, t)$ . Для этого продифференцируем общий член ряда (7) по  $t$

$$\left[ -\frac{2}{\pi n} \int_0^t e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau \right]'_t = 2h'(t) \frac{e^{-(\pi n)^2 t}}{\pi n} [1 - e^{-2(\pi n)^2 t}]. \quad (11)$$

Из (11) и признака Абеля следует, что для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  ряд из производных сходится равномерно на прямоугольнике  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon] \times [\varepsilon, t_0]$ .

Таким образом

$$u(x, t) \in C^{2,1}((0, 1) \times (0, t_0]), \quad (12)$$

а из (10) и (12) следует, что решение задачи (1)–(6), определяемое формулой (7), является классическим.

Из (4), (7) и (9) следует, что для любого  $x$

$$u(x, t_0) = 0. \quad (13)$$

## Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в постановке прямой задачи (1)–(6) функция  $h(t)$ , определяющая граничное условие (3), неизвестна и подлежит определению, потому вводится дополнительное условие

$$u(x_0, t) = f(t), \quad x_0(0, 1), \quad t \in [0, t_0]. \quad (14)$$

Из (7) и (14) следует, что

$$f(t) = (1 - x_0)h(t) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \pi n x_0. \quad (15)$$

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$  удовлетворяющем (15) существует решение  $h_0(t) \in W_2^2[0, t_0]$ , удовлетворяющее (4) и (5), но  $f_0(t)$  нам не известна, а вместо нее даны  $f_\delta(t) \in L_2[0, t_0]$  и число  $\delta > 0$ , такие, что

$$\int_0^{t_0} |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \leq \delta^2. \quad (16)$$

Требуется по  $f_\delta(t)$  и  $\delta$  определить приближенное решение  $h_\delta(t)$  и получить оценку  $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2}$ .

Введем линейный оператор  $A$ , отображающий пространство  $L_2[0, t_0]$  в  $L_2[0, t_0]$  и определяемый формулой

$$Ah(t) = -2 \int_0^t K(t, \tau) h(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где

$$K(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} \sin \pi n x_0. \quad (18)$$

Заметим, что при условии  $h_0(t) \in W_2^2[0, t_0]$  и выполнении условия (4), обратная граничная задача (1)–(2), (5), (6), (14), (16) эквивалентна интегральному уравнению

$$Ah(t) = f(t); h(t), f(t) \in L_2[0, t_0]. \quad (19)$$

Известно, что задача решения уравнения Вольтерра первого рода в пространстве  $L_2[0, t]$  некорректна и потому для её решения используем метод регуляризации А.Н. Тихонова [2].

### Метод регуляризации А.Н. Тихонова 2-го порядка

Этот метод заключается в сведении уравнения (17)–(19) к вариационной задаче, зависящей от параметра  $\alpha > 0$ .

$$\inf\{\|Ah(t) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \int_0^{t_0} |h(t)|^2 dt + \alpha \int_0^{t_0} |h''(t)|^2 dt : h(t) \in W_2^2[0, t_0], h(0) = h(t_0) = 0\} \quad (20)$$

Задача (20) эквивалентна интегродифференциальному уравнению

$$A^* Ah(t) + \alpha h^{(IV)}(t) + \alpha h(t) = A^* f_\delta(t), \quad (21)$$

где  $A^*$  – оператор, сопряженный  $A$ ,  $h(t) \in W_2^4[0, t_0]$  и  $h(0) = h''(0) = h(t_0) = h''(t_0) = 0$ .

Известно (см. [2]), что для любых  $\alpha > 0$  и  $f_\delta(t) \in L_2[0, t_0]$  существует единственное решение  $h_\delta^\alpha(t)$  уравнения (21).

Значение параметра регуляризации  $\alpha = \alpha(f_\delta, \delta)$  определим из принципа невязки [4], которое определяется уравнением

$$\|Ah_\delta^\alpha(t) - f_\delta(t)\|_{L_2}^2 = \delta^2. \quad (22)$$

Известно, что при условии  $\|f_\delta(t)\|^2 > \delta^2$  уравнение (22) имеет единственное решение  $\alpha(f_\delta, \delta)$ .

Таким образом, приближенное решение  $h_\delta(t)$  уравнения (19) определим формулой

$$h_\delta(t) = h_\delta^{\alpha(f_\delta, \delta)}(t). \quad (23)$$

### Оценка погрешности $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2}$

Для оценки погрешности введем модуль непрерывности  $\omega(\delta, r_1)$

$$\omega(\delta, r_1) = \sup \left\{ \|h(t)\|_{L_2} : h(t) \in W_2^2[0, t_0], h(0) = h''(0) = h(t_0) = h''(t_0) = 0, \right. \\ \left. \int_0^{t_0} h(t)^2 dt + \int_0^{t_0} |h''(t)|^2 dt \leq r_1^2, \|Ah(t)\|_{L_2}^2 \leq \delta^2 \right\}. \quad (24)$$

В работе [5] приведено доказательство оценки

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq 2\omega(\delta, r_1), \quad (25)$$

где  $h_\delta(t)$  определена (23).

Рассмотрим расширение обратной задачи (1), (2), (5), (6), (14) на полупрямую  $[t_0, \infty)$ . Для этого введем функции  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{f}(t)$ , определяемые формулами

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t); 0 \leq x \leq 1, t \in [0, t_0] \\ 0; 0 \leq x \leq 1, t > t_0 \end{cases} \quad (26)$$

и

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t); t \in [0, t_0] \\ 0; t > t_0 \end{cases}. \quad (27)$$

Из (10) и (13) следует непрерывность функций  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{f}(t)$ , а из (26) следует, что функция  $\bar{u}(x, t)$  является решением задачи

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t, \quad (28)$$

$$\bar{u}(x, 0) = 0; 0 \leq x \leq 1, \quad (29)$$

$$\bar{u}(x_0, t) = \bar{f}(t), t \geq 0, \quad (30)$$

и

$$\bar{u}(1, t) = 0; t \geq 0. \quad (31)$$

А функцию  $\bar{h}(t)$  требуется определить, причем

$$\bar{u}(0, t) = \bar{h}(t). \quad (32)$$

Обозначим через  $\bar{H}$  линейное многообразие  $L_2[0, \infty)$  такое, что  $\bar{h}(t) \in \bar{H}$  тогда и только тогда, когда

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} h(t); 0 \leq t \leq t_0 \\ 0; t > t_0 \end{cases}, \quad (33)$$

где  $h(t)$  удовлетворяет условию (4).

Обозначим через  $\bar{A}$  линейный оператор, действующий из  $L_2[0, \infty)$  в  $L_2[0, \infty)$  и определенный на множестве  $\bar{H}$  формулой

$$\bar{A}\bar{h}(t) = \bar{f}(t), \quad (34)$$

где  $\bar{f}(t) = \bar{u}(x_0, t)$ , а  $\bar{u}(x, t)$  – решение задачи (28), (29), (31) и (32).

Для оператора  $\bar{A}$  введем модуль непрерывности  $\omega(\delta, r_1)$

$$\omega(\delta, r_1) = \sup \left\{ \|\bar{h}(t)\|_{L_2} : \bar{h}(t) \in \bar{H}, \int_0^\infty |\bar{h}(t)|^2 dt + \int_0^\infty |\bar{h}''(t)|^2 dt \leq r_1^2, \|\bar{A}\bar{h}(t)\|_{L_2}^2 \leq \delta^2 \right\} \quad (35)$$

Из (24), (33)–(35), (13) следует, что

$$\bar{\omega}(\delta, r_1) = \omega(\delta, r_1). \quad (36)$$

Для оценки сверху функций  $\bar{\omega}(\delta, r_1)$  решим задачу (28)–(31), используя преобразование Фурье по  $t$  на полупрямой  $[0, \infty)$ .

Обозначим это преобразование через  $F_t$ .

Таким образом, задачу (28)–(31) сведем к следующей

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x, \tau)}{\partial x^2} = i\tau \hat{u}(x, \tau); \quad 0 < x < 1, 0 < \tau, \quad (37)$$

где  $\hat{u}(x, \tau) = F_t[\bar{u}(x, t)]$ ,

$$\bar{u}(x, \tau) = F_t[\bar{u}(x, t)], \hat{u}(1, \tau) = 0; \quad \tau \geq 0 \quad (38)$$

$$\hat{u}(x_0, \tau) = \hat{f}(\tau); \quad \tau \geq 0, \hat{u}(x_0, \tau) = f(\tau); \quad \tau \geq 0 \quad (39)$$

где  $\hat{f}(\tau) = F_t[\bar{f}(t)]$ .

Решение уравнения (37) имеет вид

$$\hat{u}(x, \tau) = B(\tau)e^{\mu_0 x \sqrt{\tau}} + C(\tau)e^{-\mu_0 x \sqrt{\tau}}; \quad \tau \geq 0, \quad (40)$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , а  $B(\tau)$  и  $C(\tau)$  подлежат определению.

Из (38) следует, что

$$B(\tau)e^{\mu_0 \sqrt{\tau}} + C(\tau)e^{-\mu_0 \sqrt{\tau}} = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (41)$$

Из (39) следует, что

$$B(\tau)e^{\mu_0 \sqrt{\tau}} + C(\tau)e^{-\mu_0 \sqrt{\tau}} = \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует, что

$$B(\tau) = -\frac{e^{-\mu_0 \sqrt{\tau}}}{2 \operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau); C(\tau) = \frac{e^{\mu_0 \sqrt{\tau}}}{2 \operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau); \quad (43)$$

Из (40)–(43) следует, что

$$\hat{A}\hat{h}(\tau) = \frac{\text{sh } \mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0\sqrt{\tau}} \hat{h}(\tau) = \hat{f}(\tau), \quad (44)$$

где  $\hat{h}(\tau) \in F_t[\overline{H}]$ , а  $\hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty)$ .

Из условий (4) и (5) следует, что

$$\int_0^{\infty} \sqrt{1+\tau^4} \hat{h}_0(\tau) d\tau \leq r_1^2. \quad (45)$$

Оператор  $\hat{A}$ , определенный (44), не меняя обозначения, продолжим на все пространство  $L_2[0, \infty)$ , т.е.

$$\hat{A}\hat{h}(\tau) = \frac{\text{sh } \mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0\sqrt{\tau}} \hat{h}(\tau) = \hat{f}(\tau), \quad (46)$$

где  $\hat{h}(\tau)$  и  $\hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty)$ .

Из (46) следует, что  $\hat{A}$  – инъективный линейный ограниченный оператор.

Соотношение (45) определяет оператор сложения  $D$ , отображающий пространство  $L_2[0, \infty)$  в  $L_2[0, \infty)$  и определяемый формулой

$$D\hat{g}(\tau) = \frac{\hat{g}(\tau)}{\sqrt{1+\tau^4}}, \quad \tau \geq 0, \quad (47)$$

и

$$\hat{h}(\tau) = D\hat{g}(\tau). \quad (48)$$

Введем класс корректности  $\hat{M}_{r_1}$

$$\hat{M}_{r_1} = D\hat{S}_{r_1}, \quad (49)$$

где  $\hat{S}_{r_1} = \hat{S}(0, r_1)$  – шар в пространстве  $L_2[0, \infty)$  с центром в нуле радиуса  $r_1$ .

Если через  $\overline{M}_r$  обозначить подмножество  $\overline{H}$ , такое, что  $\overline{h}(t) \in M_{r_1}$

$$\int_0^{t_0} |\overline{h}(t)|^2 dt + \int_0^{t_0} |\overline{h}''(t)|^2 dt \leq r_1^2. \quad (50)$$

Из (47)–(49) и (50) следует, что

$$\hat{M}_{r_1} \supset F_t[\overline{M}_{r_1}]. \quad (51)$$

Введем модуль непрерывности  $\hat{\omega}(\delta, r_1)$  оператора  $\hat{A}$  на множестве  $\hat{M}_{r_1}$ .

$$\hat{\omega}(\delta, r_1) = \left\{ \|\hat{h}(\tau)\|_{L_2} : \hat{h}(\tau) \in \hat{M}_{r_1}, \|\hat{A}\hat{h}(\tau)\| \leq \delta \right\}. \quad (52)$$

Из (50)–(52), (35) и изометричности преобразования  $F_t$  следует, что

$$\omega(\delta, r_1) \leq \hat{\omega}(\delta, r_1) \quad (53)$$

Таким образом, из (25), (36) и (53) следует оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq 2\hat{\omega}(\delta, r_1). \quad (54)$$

Теперь перейдем к оценке функций  $\hat{\omega}(\delta, r_1)$ . Для этого оценим функцию  $\frac{|\text{sh } \mu_0\sqrt{\tau}|}{|\text{sh } \mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}|}$ .

Так как эта функция ограничена на любом отрезке, то существует число  $r_2$ , такое, что

$$\sup_{\tau \in [0, 2]} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \sqrt{\tau}|} \leq r_2, \quad (55)$$

а при  $\tau \geq 2$

$$\frac{|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \sqrt{\tau}|} \leq 8e^{x_0 \sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \quad (56)$$

Определим число  $\tau_0 \geq 2$  таким образом, чтобы при  $\tau \geq \tau_0$

$$e^{x_0 \sqrt{\frac{\tau}{2}}} \geq r_2. \quad (57)$$

Из (57) следует, что при  $\tau \geq \tau_0$

$$\frac{|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}|}{|\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \sqrt{\tau}|} \leq 9e^{x_0 \sqrt{\frac{\tau}{2}}}, \quad (58)$$

Так как тут  $\tau \geq \tau_0$

$$\frac{r_1}{\sqrt{2\tau^2}} \leq \frac{r_1}{\sqrt{1+\tau^4}}, \quad (59)$$

Если  $\tau_0^2 \leq e^{x_0 \sqrt{\frac{\tau_0}{2}}}$ , то из (58) и (59) следует, что если  $\bar{\tau}$  определить формулой

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2x_0^2} \ln^2 \left( \frac{r_1}{9\delta} \right), \quad (60)$$

то из (60) следует на основании теоремы, доказанной в [6, с. 15], что при  $\bar{\tau} \geq \tau_0$

$$\hat{\omega}(\delta, r_1) \leq \frac{r_1}{\sqrt{1+\bar{\tau}^4}}, \quad (61)$$

Или, что  $\hat{\omega}(\delta, r_1) \sim \left[ \ln \left( \frac{r_1}{9\delta} \right) \right]^{-4}$ .

Таким образом, из (60), (61) и (54) следует, что при достаточно малых значениях  $\delta$  справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq \frac{r_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{16x_0^2} \left[ \ln \left( \frac{r_1}{9\delta} \right) \right]^8}}.$$

### Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
2. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // ДАН СССР, 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // М.: Наука, 1966. – 725 с.
4. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // ЖВМиМФ, 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170–175.
5. Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач / В.П. Танана // ДАН СССР, 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1035–1037.
6. Танана, В.П. Оптимальные методы решения некорректно поставленных задач / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2012. – 162 с.

*Поступила в редакцию 6 сентября 2013 г.*

## APPROXIMATE SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT EXCHANGE BY A.N. TIKHONOV'S REGULARIZATION METHOD

V.F. Mirasov<sup>1</sup>, A.I. Sidikova<sup>2</sup>

The article shows approximate solution of the heat exchange problem by A.N. Tikhonov's regularization method and the error estimate of approximate solution is given.

*Keywords: operator equation, regularity, optimal method, error estimation, ill-posed problem.*

### References

1. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Extreme methods of ill-posed problems solution). Moscow: Nauka Publ., 1988. 287 p. (in Russ.).
2. Tikhonov A.N. *DAN SSSR*. 1963. Vol. 153, no. 1. pp. 49–52. (in Russ.).
3. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of mathematical physics). Moscow: Nauka Publ, 1966. 725 p. (in Russ.).
4. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1966. Vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russ.).
5. Tanana V.P. *DAN SSSR*. 1975. Vol. 220, no. 5. pp. 1035–1037. (in Russ.).
6. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Optimal'nye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach* (Optimal methods of ill-posed problems solution). Chelyabinsk: YuUrGU Publ., 2012. 162 p. (in Russ.).

*Received 6 September 2013*

<sup>1</sup> Mirasov Vadim Faritovich is Post-graduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.  
E-mail: vadim.mirasov@yahoo.com

<sup>2</sup> Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.