УДК 517.544.8

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.А. Патрушев[1]

Предложен метод явного решения краевой задачи Маркушевича в постановке Л.И. Чибриковой, в классе кусочно-аналитических функций. Краевое условие задано на прямой. Получено решение в замкнутой форме при некотором ограничении, наложенном на коэффициент *b*(*t*) задачи.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, краевая задача Римана, краевая задача Гильберта, краевая задача Маркушевича.

Рассмотрим трехэлементную задачу Маркушевича

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + b(t)\overline{\psi_+(t)} + f(t) \tag{1}$$

на вещественной прямой $\Gamma: \operatorname{Im} z = 0$. Здесь $a(t), b(t), f(t) \in H(\Gamma)$ – гельдеровские функции, $a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$, бесконечно удаленная точка включается в Γ.

Требуется найти функции $\psi_+(z), \psi_-(z)$, аналитические соответственно в верхней полуплоскости S_+ и нижней полуплоскости S_-, непрерывно продолжимые на прямую Γ, если граничные значения этих функций связаны линейным соотношением (1). Решение будем искать в классе функций, исчезающих в точке $z = -i$, которые чаще всего требуются в приложениях.

Пусть $\kappa = Ind_\Gamma a(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\left[\ln a(t)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}$. Так как $a(t)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности бесконечно удаленной точки, то $a(+\infty) = a(-\infty) \neq 0$.

Для того, чтобы привести рассматриваемую задачу к случаю конечной граничной задачи для единичной окружности, рассмотренной в статье [3], применим следующее дробно-линейное преобразование:

$$z = -i\frac{\varsigma - i}{\varsigma + i},\ \varsigma = -i\frac{z - i}{z + i}. \tag{2}$$

При этом преобразовании прямая Γ плоскости z переходит в единичную окружность $L: |\tau| = 1$ плоскости ς. Если точка t пробегает в положительном направлении прямую R, то соответствующая ей точка τ плоскости ς, определяемая равенством

$$\tau = -i\frac{t - i}{t + i},$$

описывает окружность L в направлении, оставляющем слева ограниченный ею круг. Этот круг мы обозначим через D_+, а часть плоскости, внешнюю по отношению к D_+, − через D_-.

Дробно-линейное преобразование (2) конформно преобразует область S_+ в область D_+, а область S_- − в область D_-; при этом точке $z = \infty$ соответствует точка $\varsigma = -i$, а точке $\varsigma = \infty$ − точка $z = -i$ [2].

Для того, чтобы не усложнять внешнего вида формул, мы будем обозначать функцию

$$\psi(z) = \psi\left(-i\frac{\varsigma - i}{\varsigma + i}\right)$$

просто через $\psi(\varsigma)$; аналогично поступаем для функций $a(t), b(t)$ и $f(t)$, а также для других функций, которые нам встретятся в дальнейшем.

При этих обозначениях граничное условие (1) запишется в виде:

$$\psi_+(\tau) = a(\tau)\psi_-(\tau) + b(\tau)\overline{\psi_+(\tau)} + f(\tau),\ \tau \in L. \tag{3}$$

Наложим следующие дополнительные ограничения на коэффициент $b(t)$ краевой задачи (1):

[1] Патрушев Алексей Алексеевич – доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: patraleksej@yandex.ru

а) $b(t)\dfrac{\overline{a_+(t)}}{a_+(t)}+1\neq 0,\ t\in\Gamma;$

б) $b(t)\dfrac{\overline{a_+(t)}}{a_+(t)}+1$ – является краевым значением аналитической и отличной от нуля всюду в области S_- функции, за исключением, быть может, $z=-i$, в которой она имеет конечный порядок κ_1. Здесь $a(t)=a_+(t)t^{\kappa}a_-(t)$ – факторизация коэффициента $a(t)$ по формулам Гахова [1].

Очевидно, что в этом случае функция $b(\tau)$ краевой задачи (3) будет удовлетворять следующим условиям:

а) $b_1(\tau)+1\neq 0\left(b_1(\tau)=b(\tau)\dfrac{\overline{a_+(\tau)}}{a_+(\tau)}\right),\ \tau\in L;$

б) $b_1(\tau)+1$ – является краевым значением аналитической и отличной от нуля всюду в области D_- функции, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой она имеет конечный порядок κ_1.

Теперь мы можем воспользоваться результатами статьи [3]. В этой статье краевая задача Маркушевича для единичного круга сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно $\mathrm{Re}\psi_+(\tau)$ с последующим решением задач Шварца и Гильберта в классе кусочно-аналитических функций. Общее решение неоднородной задачи Маркушевича для единичной окружности было получено в виде

$$\psi(\varsigma)=\begin{cases} a_+(\varsigma)\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-\varsigma}d\tau+G(\varsigma)+P_{\kappa_0-1}(\varsigma)\right],\ \varsigma\in D_+,\\ \dfrac{a_-(\varsigma)(b_1(\varsigma)+1)}{\varsigma^{\kappa}}\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-\varsigma}d\tau+G(\xi)+P_{\kappa_0-1}(\varsigma)\right],\ \xi\in D_-.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь $g(\tau)=b_1(\tau)\left[d+P_{\kappa_0-1}(\tau)\right]-\dfrac{ib_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\left[F_0^-(\tau)+Q_{\kappa_1-1}(\tau)+\overline{Q_{\kappa_1-1}(\tau)}\right]$, $G(\varsigma)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{g_1(\tau)}{\tau-\varsigma}d\tau$,

$g_1(\tau)=\dfrac{b_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\left[\dfrac{f(\tau)}{a_+(\tau)}-iF_1^-(\tau)\right]$, $F_0(\varsigma)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{c(\tau)(\tau+\varsigma)}{(\tau-\varsigma)\tau}d\tau$, $F_1(\varsigma)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\mathrm{Im}\left\{\frac{f(\tau)}{a_+(\tau)}\right\}\frac{\tau+\varsigma}{(\tau-\varsigma)\tau}d\tau$,

$c(\tau)=\mathrm{Im}\left\{(b_1(\tau)+1)[d+P_{\kappa_0-1}(\tau)]\right\}$, $\kappa_0=Ind_L\dfrac{\tau^{\kappa}}{b_1(\tau)+1}=\kappa-\kappa_1$, $\kappa_1=Ind_L(b_1(\tau)+1)$,

$P_{\kappa_0-1}(\varsigma),\ Q_{\kappa_1-1}(\xi)$ – произвольные многочлены степени не выше $\kappa_0-1,\ \kappa_1-1$ соответственно.

Если $\kappa_0<0$, то появляются условия разрешимости задачи

$$\int_L\left[\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\phi_+(\tau)}{(b_1(\tau)+1)}\right]\tau^{k-1}d\tau-\int_L\frac{f(\tau)}{a_+(\tau)(b_1(\tau)+1)}\tau^{k-1}d\tau=0,\ k=1,\cdots,-\kappa_0, \tag{5}$$

где

$$\mathrm{Re}\phi_+(\tau)=\frac{1}{2}(b_1(\tau)+1)[d+P_{\kappa_0-1}(\tau)-\varphi_1^-(\tau)]+\frac{f(\tau)}{2a_+(\tau)},$$

$$-i\varphi_1^-(\varsigma)=\frac{1}{b_1(\varsigma)+1}\left[F_0(\varsigma)+F_1(\varsigma)+Q_{\kappa_1-1}(\varsigma)+\overline{Q_{\kappa_1-1}(\varsigma^*)}\right].$$

При $\kappa_1\leq 0$ возникают следующие условия разрешимости

$$\int_L\frac{c(\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau=\alpha_k,\ \alpha_k=-\int_L\mathrm{Im}\left\{\frac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\frac{d\tau}{\tau^{k+1}},\ k=0,\cdots,-\kappa_1. \tag{6}$$

Если $f(\tau)\equiv 0$, то мы имеем однородную задачу Маркушевича. В этом случае $G(\varsigma)\equiv 0$.

Вернемся теперь к переменной z по формуле $\varsigma = -i\dfrac{z-i}{z+i}$.

Тогда общее решение неоднородной задачи Маркушевича для полуплоскости запишется в виде

$$\psi(z)=\begin{cases} a_+(z)\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{z+i}{t+i}\right)\dfrac{g(t)}{t-z}dt+G(z)+P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)\right],\ z\in S_+, \\ \left(-i\cdot\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa}a_-(z)(b_1(z)+1))\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{z+i}{t+i}\right)\dfrac{g(t)}{t-z}dt+G(z)+P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)\right],\ z\in S_-. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь
$$g(t)=b_1(t)\left[d+P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)\right]-\dfrac{ib_1(t)}{b_1(t)+1}\left[F_0^-(t)+Q_{\kappa_1-1}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)+\overline{Q_{\kappa_1-1}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)}\right],$$

$$G(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{z+i}{t+i}\right)\dfrac{g_1(t)}{t-z}dt,\quad g_1(t)=\dfrac{b_1(t)}{b_1(t)+1}\left[\dfrac{f(t)}{a_+(t)}-iF_1^-(t)\right],\quad F_0(z)=\dfrac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{c(t)dt}{t-z}-\dfrac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{c(t)tdt}{t^2+1},$$

$$F_1(z)=\dfrac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left\{\dfrac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\dfrac{dt}{t-z}-\dfrac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left\{\dfrac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\dfrac{tdt}{t^2+1},\ c(t)=\mathrm{Im}\left\{(b_1(t)+1)\left[d+P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)\right]\right\},$$

$P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$, $Q_{\kappa_1-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ – произвольные полиномы относительно $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ степени не выше κ_0-1, κ_1-1 соответственно.

Условия разрешимости (5), (6) запишутся, соответственно, в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{2b_1(t)\mathrm{Re}\,\phi_+(t)}{(b_1(t)+1)}\right]\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa-1}\dfrac{dt}{(t+i)^2}-\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(t)}{a_+(t)(b_1(t)+1)}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa-1}\dfrac{dt}{(t+i)^2}=0,\ k=1,\cdots,-\kappa_0, \quad (8)$$

где

$$\mathrm{Re}\,\phi_+(t)=\dfrac{1}{2}(b_1(t)+1)\left[d+P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)-\varphi_1^-(t)\right]+\dfrac{f(t)}{2a_+(t)},$$

$$-i\varphi_1^-(z)=\dfrac{1}{b_1(z)+1}\left[F_0(z)+F_1(z)+Q_{\kappa_1-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)+\overline{Q_{\kappa_1-1}\left(\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\right)}\right];$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa+1}\cdot\dfrac{c(t)dt}{(t+i)^2}=\alpha_k,\ \alpha_k=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa+1}\mathrm{Im}\left\{\dfrac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\dfrac{dt}{(t+i)^2},\ k=0,\cdots,-\kappa_1. \quad (9)$$

Результаты статьи [3] позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты однородной задачи Маркушевича* (1) ($f(t)\equiv 0$) $a(t),\ b(t)\in H(\Gamma)$, $a(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$, $\kappa=Ind_\Gamma a(t)$, *а также функция* $b_1(t)+1$ *является краевым значением функции на прямой* Γ, *аналитической и отличной от нуля всюду в области* $S_-\cup\Gamma$, *за исключением, быть может, точки* $z=-i$, *в которой она может иметь конечный порядок* κ_1, $\kappa_0=\kappa-\kappa_1$.

Тогда однородная задача (1) ($f(t)\equiv 0$) в классе кусочно-аналитических функций, исчезающих в точке $z=-i$:

1) при $\kappa_1>0$, $\kappa_0\geq 0$, имеет общее решение, определяемое формулой (7) ($G(z)\equiv 0$), которое линейно зависит от $2\kappa_0+2\kappa_1=2\kappa$ произвольных вещественных произвольных постоянных;

2) при $\kappa_1>0$, $\kappa_0<0$, общее решение задается формулой (7) $\left(G(z)\equiv 0,\ P_{\kappa_0-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)\equiv 0\right)$, которое содержит $2\kappa_1-r_1$ произвольных вещественных постоянных, r_1 – ранг матрицы коэффициентов однородной системы (8) (если $r_1=2\kappa_1$, то задача имеет только тривиальное решение);

3) *при* $\kappa_1 \le 0,\quad \kappa_0 \ge 0,$ *имеет общее решение, определяемое формулой* (7) $\left(G(z) \equiv 0,\, Q_{\kappa_1 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0 \right)$, *которое содержит* $2\kappa_0 - r$ *произвольных вещественных постоянных,* r – ранг *матрицы коэффициентов однородной системы (9) (если* $r = 2\kappa_0$ *то задача, отличного от тривиального, решения не имеет);*

4) *при* $\kappa_1 \le 0,\ \kappa_0 < 0,$ *если функция* $b_1(t)+1$ *удовлетворяет условиям* (9) ($f(t) \equiv 0$) и *условиям* (8) ($f(t) \equiv 0$), *имеет одномерное пространство решений, определяемое формулой* (7) $\left(G(z) \equiv 0,\, P_{\kappa_0 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0,\, Q_{\kappa_1 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0 \right)$; *в противном случае имеет только тривиальное решение.*

Теорема 2. *Пусть коэффициенты неоднородной задачи Маркушевича* $a(t), b(t) \in H(\Gamma)$, *функция* $f(t) \in H(\Gamma)$, $a(t) \ne 0$, $t \in \Gamma$, *а также функция* $b_1(t)+1$ *является краевым значением на прямой* Γ *функции, аналитической и отличной от нуля всюду в области* $S_- \cup \Gamma$, *за исключением, быть может, точки* $z = -i$, *в которой она может иметь конечный порядок.* κ_1.

Тогда неоднородная задача в классе кусочно-аналитических функций, исчезающих в точке $z = -i$:

1) при $\kappa_1 > 0,\, \kappa_0 \ge 0$ *имеет общее решение, определяемое формулой (7), которое линейно зависит от* 2κ *произвольных вещественных постоянных;*

2) при $\kappa_1 > 0,\ \kappa_0 < 0$ *общее решение задается формулой (7)* $\left(P_{\kappa_0 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0 \right)$, *если выполняются* $-\kappa_0 - r_1$ *условий разрешимости, выписанных явно (*r_1 *– ранг матрицы коэффициентов системы (8)), которое содержит* $2\kappa_1 - 2r_1$ *произвольных вещественных постоянных (если* $r_1 = \kappa_1$, *решение будет единственным);*

3) при $\kappa_1 \le 0,\, \kappa_0 \ge 0$ *имеет общее решение, определяемое формулой (7)* $\left(Q_{\kappa_1 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0 \right)$, *если выполняются* $-\kappa_1 + 1 - r$ *условий разрешимости, выписанных явно (*r *– ранг матрицы коэффициентов системы (9)), которое линейно зависит от* $2\kappa_0 - 2r$ *произвольных вещественных постоянных (при* $r = \kappa_0$ *решение будет единственным);*

4) при $\kappa_1 \le 0,\, \kappa_0 < 0$ *имеет единственное решение, определяемое формулой (7)* $\left(P_{\kappa_0 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0,\, Q_{\kappa_1 - 1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv 0 \right)$, *тогда и только тогда, когда выполняются* $-\kappa_1 + 1$ *условий разрешимости (9), и* $-\kappa_0$ *условий разрешимости (8).*

Литература

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

2. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 542 с.

3. Патрушев, А.А. Один из случаев решения задачи Маркушевича в замкнутой форме / А.А. Патрушев, Е.В. Патрушева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 63–69.

Поступила в редакцию 8 декабря 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2014, vol. 6, no. 2, pp. 12–16

ONE CASE OF SOLUTION IN A CLOSED FORM OF MARKUSHEVICH BOUNDARY PROBLEM FOR SEMIPLANE

A.A. Patrushev[1]

In the article an explicit method for the solution of Markushevich boundary value problem directed by L.I. Chibrikova in the class of piecewise analytic functions is given. Boundary condition of the problem is given on the line. The problem is found in a closed form under certain constratints on the coefficient $b(t)$ of the problem.

Keywords: boundary problems for analytic functions, Riemann boundary problem, Hilbert boundary problem, Markushevich boundary problem.

References

1. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963. 640 p. (in Russ.).

2. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations). Moscow: Nauka, 1968. 542 p.

3. Patrushev A.A., Patrusheva E.V. Odin iz sluchaev resheniya zadachi Markushevicha v zamknutoy forme (A variant of the solution of Markushevich boundary problem). *Vestnik YuUrGU. Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”.* 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 63–69. (in Russ.).

Received 8 December 2013

[1] Patrushev Alexey Alexeevich is Associate Professor, Department of General Mathematics, South Ural State University.
E-mail: patraleksej@yandex.ru