УДК 517.956.223

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В.В. Карачик[1]

Рассматривается краевая задача для уравнения Гельмгольца в единичном шаре, имеющая нормальные производные высокого порядка в граничных условиях. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца; обобщенная задача Неймана; собственные значения; нормальные производные.

1. Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v+\lambda v=0,\quad x\in S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\},\tag{1}$$

$$P_m\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)u_{|\partial S}=f(s),\quad s\in\partial S,\tag{2}$$

где $P_m(t)$ – полином степени m над $\mathbb{C}$, $\partial/\partial\nu$ – производная по направлению внешней нормали к сфере радиуса $|x|$, а $f\in C(\partial S)$. Задачи такого вида были рассмотрены ранее в [1–6].

Рассмотрим функцию (см. [7])

$$g_m(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^k}{(2,2)_k\,(m,2)_k}.$$

Очевидно, что эта функция целая при $m\notin-2\mathbb{N}_0$. Используя разложение функции Бесселя первого рода $J_m(t)$ в ряд, нетрудно получить формулу, связывающую $g_m(t)$ и $J_m(t)$

$$J_m(t)=\frac{t^m}{2^m\Gamma(m+1)}g_{2m+2}(t^2).\tag{3}$$

Пусть область $\mathcal{D}\in\mathbb{R}^n$ ограничена и обладает свойством звездности $\forall x\in\mathcal{D},\forall\alpha\in[0,1],\alpha x\in\mathcal{D}$. Методом нормированных систем функций был получен следующий результат.

Теорема 1. [7, Теорема 3] Для всякой функции $v\in C^2(\mathcal{D})$, удовлетворяющей в $\mathcal{D}$ уравнению (1), найдется гармоническая в $\mathcal{D}$ функция $u(x)$ такая, что имеет место равенство

$$v(x)=u(x)-\lambda\frac{|x|^2}{4}\int_0^1 g_4\left(\lambda(1-\alpha)|x|^2\right)u(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha.\tag{4}$$

Нетрудно доказать следующее следствие из этой теоремы.

Следствие 1. Если $v(x)$ – решение уравнения (1) обладает свойством $|x|^k\dfrac{\partial^k v}{\partial\nu^k}\in C(\overline{\mathcal{D}})$ для $k=\overline{0,m}$, то этим же свойством обладает и функция $u(x)$, находимая из (4).

Идея представления (4) была также использована в [8, 9] для построения специальных полиномов. Перепишем формулу (4) в терминах функций Бесселя. Из (3) нетрудно получить, что $g_4(t^2)=\dfrac{2}{t}J_1(t)$, а поэтому формула (4) при $\lambda>0$ примет вид

$$v(x)=u(x)-\sqrt{\lambda}\frac{|x|}{2}\int_0^1 J_1\left(\sqrt{\lambda(1-\alpha)}\,|x|\right)u(\alpha x)\frac{\alpha^{n/2-1}}{\sqrt{1-\alpha}}d\alpha.$$

[1] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет,
E-mail: karachik@susu.ru

2. Основной результат

Исследуем разрешимость задачи (1)–(2). Решение будем искать из класса $v\in C^2(S)$ и $|x|^k \dfrac{\partial^k v}{\partial \nu^k}\in C(\overline{S})$ при $k=\overline{0,m}$. Рассмотрим полином $P_{[m]}(t)=\sum_{k=0}^{m} p_k t^{[k]}$, введенный ранее в [10] и зависящий от полинома $P_m(t)$. Здесь p_k – коэффициенты полинома $P_m(t)$, а $t^{[k]}=t(t-1)\cdots(t-k+1)$. Предположим, что коэффициент при старшей степени полинома $P_m(t)$ равен единице, т.е. $p_m=1$. Обозначим, как обычно, однородные гармонические полиномы k-й степени через $H_k(x)$ и введем функцию

$$F_k(t;P_m)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{P_{[m]}(2i+k)}{(2,2)_i(n+2k,2)_i}(-t)^i. \tag{5}$$

В этих обозначениях теорема о разрешимости задачи (1)–(2) имеет вид.

Теорема 2. Решение задачи (1)–(2) существует тогда и только тогда, когда $\forall k\in\mathbb{N}_0$,

$$F_k(\lambda;P_m)=0\Rightarrow \forall H_k(x),\ \int_{\partial S} f(x)H_k(x)\,dx=0. \tag{6}$$

Решение задачи единственно с точностью до собственных функций вида

$$v_k^{(\lambda)}(x)=g_{n+2k}(\lambda|x|^2)H_k(x),$$

где числа $k\in\mathbb{N}_0$ такие, что λ удовлетворяет равенству $F_k(\lambda;P_m)=0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть решение задачи (1)–(2) существует. Поскольку область S обладает свойствами звездной области $\mathcal{D}$, то воспользуемся результатом следствия 1. Функция $u(x)$, находимая из (4), обладает свойством $|x|^k \dfrac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\in C(\overline{S}),\quad k=\overline{0,m}$. Поэтому, в $\overline{S}$ при $k=\overline{0,m}$ имеет место равенство

$$|x|^m \frac{\partial^m v}{\partial\nu^m}=|x|^m \frac{\partial^m u}{\partial\nu^m}-\lambda\frac{|x|^m}{4}\int_0^1\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial t^{m-i}}\left(t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)\right)\Big|_{t=|x|}\frac{\partial^i u}{\partial\nu^i}\alpha^{i+n/2-1}d\alpha.$$

Откуда

$$|x|^m P_m\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)v=|x|^m\times P_m\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)u-\lambda\frac{|x|^m}{4}\int_0^1\sum_{k=0}^{m}p_k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}\left(t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)\right)\Big|_{t=|x|}\frac{\partial^i u}{\partial\nu^i}\alpha^{i+n/2-1}d\alpha=$$

$$=|x|^m P_m\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)u-\frac{\lambda}{4}\int_0^1\sum_{i=0}^{m}P_m^{(i)}(|x|,\alpha)|\alpha x|^i\frac{\partial^i u}{\partial\nu^i}\alpha^{n/2-1}d\alpha, \tag{7}$$

где обозначено

$$P_m^{(i)}(|x|,\alpha)=|x|^{m-i}\sum_{k=i}^{m}p_k\binom{k}{i}\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}\left(t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)\right)\Big|_{t=|x|}.$$

Пусть $W(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\overline{S}$ функция, удовлетворяющая условию $W|_{\partial S}=f$. Выпишем два свойства оператора Λ. Во-первых, из гармоничности в S функции $u(x)$ следует гармоничность в S функции $\Lambda u(x)$. Во-вторых, $|x|^k \dfrac{\partial^k u}{\partial\nu^k}=\Lambda^{[k]}u$ [10] и значит, если $|x|^k \dfrac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\in C(\overline{S})$ для $k=\overline{0,m}$, то $\Lambda^k u\in C(\overline{S})$ и $\dfrac{\partial^k u}{\partial\nu^k}=\Lambda^{[k]}u$ на ∂S также для $k=\overline{0,m}$. Если, теперь, воспользоваться этими свойствами оператора Λ, то в силу единственности решения задачи Дирихле, из равенства (7) получим уравнение в гармонических функциях

$$W(x)=P_{[m]}(\Lambda)u(x)-\frac{\lambda}{4}\int_0^1\sum_{i=0}^{m}P_m^{(i)}(1,\alpha)\Lambda^{[i]}u(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha, \tag{8}$$

где $x\in\overline{S}$. Откуда, разлагая гармонические функции $W(x)$ и $u(x)$ в ряды в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D}_0\subset S$ и приравнивая полиномы с одинаковыми степенями, получим

$$W_s(x) = \Big(P_{[m]}(s) - \frac{\lambda}{4}\int_0^1 \sum_{i=0}^m P_m^{(i)}(1,\alpha) s^{[i]} \alpha^{s+n/2-1} d\alpha\Big) u_s(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^m s^{[i]} \Big(p_i - \frac{\lambda}{4}\int_0^1 \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} \Big(t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)\Big)_{|t=1} \alpha^{s+n/2-1} d\alpha\Big) u_s(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^m s^{[i]} \Big(p_i + \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} \Big(g_{2s+n}(\lambda t^2) - 1\Big)_{|t=1}\Big) u_s(x),$$

где учтено, что

$$1 - \frac{\lambda}{4}\int_0^1 t^2 g_4\Big(\lambda(1-\alpha)t^2\Big) \alpha^{m+n/2-1} d\alpha = g_{2m+n}\Big(\lambda t^2\Big), \tag{9}$$

$W_s(x)$ и $u_s(x)$ – однородные полиномы s-й степени из разложения гармонических функций $W(x)$ и $u(x)$ в ряд и $\Lambda^{[i]} u_s(x) = s^{[i]} u_s(x)$. Поэтому

$$W_s(x) = \sum_{i=0}^m s^{[i]} \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} g_{2s+n}(\lambda t^2)_{|t=1} u_s(x).$$

Вспоминая, что

$$g_{2s+n}(\lambda t^2) = \sum_{j=0}^\infty (-\lambda)^j \frac{t^{2j}}{(2,2)_j (2s+n,2)_j},$$

а это значит, что верно равенство

$$\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} g_{2s+n}(\lambda t^2)_{|t=1} = \sum_{j=0}^\infty (2j)^{[k-i]} \frac{(-\lambda)^j}{(2,2)_j (2s+n,2)_j},$$

и используя биномиальную теорему Вандермонда, найдем

$$W_s(x) = u_s(x) \sum_{i=0}^m s^{[i]} \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \sum_{j=0}^\infty (2j)^{[k-i]} \frac{(-\lambda)^j}{(2,2)_j (2s+n,2)_j} =$$

$$= u_s(x) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-\lambda)^j}{(2,2)_j (2s+n,2)_j} \sum_{k=0}^m p_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} s^{[i]} (2j)^{[k-i]} =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty \frac{u_s(x)(-\lambda)^j}{(2,2)_j (2s+n,2)_j} \sum_{k=0}^m p_k (2j+s)^{[k]} = u_s(x) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-\lambda)^j P_{[m]}(2j+s)}{(2,2)_j (2s+n,2)_j}.$$

Если теперь учесть определение функции $F_s(t; P_m)$ из (5), то будем иметь

$$W_s(x) = F_s(\lambda; P_m) u_s(x). \tag{10}$$

Отсюда, сразу следует, что если существует решение задачи (1)–(2), то

$$\exists s \in \mathbb{N}_0, F_s(\lambda; P_m) = 0 \Rightarrow W_s(x) = 0.$$

Равенство же $W_s(x) = 0$ в силу [11, Теорема 4] равносильно утверждению

$$\forall H_s(x), \int_{\partial S} f(x) H_s(x)\, dx = 0.$$

Необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность. Покажем, что при выполнении условий теоремы найдется такая гармоническая в S функция $u(x)$, для которой $\Lambda^k u \in C(\bar{S})$ при $k = \overline{0,m}$ и значит $|x|^k \dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \in C(\bar{S})$, при $k = \overline{0,m}$ и которая удовлетворяет в $\bar{S}$ уравнению (8). Если такую функцию $u(x)$ подставить в (4), то функция $v(x)$, найденная оттуда, будет обладать свойствами $|x|^k \dfrac{\partial^k v}{\partial \nu^k} \in C(\bar{S})$ для $k = \overline{0,m}$ и $v \in C^2(S)$, удовлетворять уравнению (1) и условиям (2), т.е. будет решением задачи (1)–(2).

Сделаем в уравнении (8) замену переменных по формуле $v = (\Lambda + 1)^m u$. При гармонической функции u функция v тоже гармоническая. Эта замена однозначно обратима по формуле

$$u(x)=\int_0^1 v(\alpha x)\ln^{m-1,!}(1/\alpha)\,d\alpha,$$

где несобственный интеграл сходится. Действительно, при $m>1$

$$\Lambda u(x)=\int_0^1 \alpha\ln^{m-1,!}(1/\alpha)\,dv(\alpha x)=\alpha v(\alpha x)\ln^{m-1,!}(1/\alpha)\Big|_0^1-\int_0^1 v(\alpha x)\big(\ln^{m-1,!}(1/\alpha)-\ln^{m-2,!}(1/\alpha)\big)\,d\alpha$$

и значит

$$(\Lambda+1)u(x)=\int_0^1 v(\alpha x)\ln^{m-2,!}(1/\alpha)\,d\alpha.$$

Поэтому

$$(\Lambda+1)^m u(x)=(\Lambda+1)\int_0^1 v(\alpha x)\,d\alpha=\alpha v(\alpha x)\Big|_0^1=v(x).$$

Однозначность замены следует из аналитичности функций $u(x)$ и $v(x)$ в S. Очевидно, что $\Lambda^k u\in C(\overline{S}), k=\overline{0,m}\Rightarrow v\in C(\overline{S})$ и, кроме того, в силу равенства

$$\Lambda u(x)=\int_0^1 v(\alpha x)\ln^{m-2,!}(1/\alpha)\,d\alpha-u(x)$$

и определения функции $v(x)$ верно и обратное утверждение $v\in C(\overline{S})\Rightarrow\Lambda^k u\in C(\overline{S}), k=\overline{0,m}$. Введем обозначения

$$\mathcal{R}_k(\alpha)=\sum_{j=0}^{k}\ln^{m-j-1,!}\alpha\sum_{i=j}^{k}(-1)^{m-i-1}\binom{i}{j}S_i^{(k)},\quad k=\overline{0,m-1}$$

$$\mathcal{R}_m(\alpha)=\sum_{j=0}^{m-1}\ln^{m-j-1,!}\alpha\sum_{i=j}^{m}(-1)^{m-i-1}\binom{i}{j}S_i^{(m)},$$

где $S_i^{(k)}$ – числа Стирлинга первого рода. Тогда имеем

$$\Lambda^{[k]}u(x)=\sum_{i=0}^{k}S_i^{(k)}\Lambda^i u(x)=\sum_{i=0}^{k}S_i^{(k)}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}(\Lambda+1)^j u(x)=$$

$$=\int_0^1 v(\alpha x)\sum_{j=0}^{k}\ln^{m-j-1,!}(1/\alpha)\sum_{i=j}^{k}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}S_i^{(k)}\,d\alpha=\int_0^1\mathcal{R}_k(\alpha)v(\alpha x)\,d\alpha.$$

Аналогично вычислим

$$\Lambda^{[m]}u(x)=\sum_{j=0}^{m}(\Lambda+1)^j u(x)\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}S_i^{(m)}=v(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}(\Lambda+1)^j u(x)\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}S_i^{(m)}=v(x)+\int_0^1\mathcal{R}_m(\alpha)v(\alpha x)\,d\alpha.$$

Поэтому, с учетом $p_m=1$ правая часть уравнения (8) приводится к виду

$$P_{[m]}(\Lambda)u(x)-\frac{\lambda}{4}\int_0^1\sum_{k=0}^{m}P_m^{(k)}(1,\alpha)\Lambda^{[k]}u(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha=v(x)+\int_0^1\sum_{k=0}^{m}p_k\mathcal{R}_k(\alpha)v(\alpha x)\,d\alpha-$$

$$-\frac{\lambda}{4}\int_0^1\Big(P_m^{(m)}(1,\alpha)v(\alpha x)+\sum_{k=0}^{m}P_m^{(k)}(1,\alpha)\int_0^1\mathcal{R}_k(\beta)v(\alpha\beta x)\,d\beta\Big)\alpha^{n/2-1}d\alpha=v(x)+$$

$$+\int_0^1\sum_{k=0}^{m}\Big(p_k\mathcal{R}_k(\alpha)v(\alpha x)-\frac{\lambda}{4\alpha}P_m^{(k)}(1,\alpha)\int_0^\alpha\mathcal{R}_k(\beta/\alpha)v(\beta x)\,d\beta-\frac{\lambda}{4}P_m^{(m)}(1,\alpha)v(\alpha x)\Big)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Переставляя порядок суммирования в кратном интеграле и используя равенство $P_m^{(m)}(1,\alpha)=g_4(\lambda(1-\alpha))$, получим

$$v(x)+\int_0^1\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big(p_k\mathcal{R}_k(\alpha)\alpha^{n/2-1}-\frac{\lambda}{4}\int_\alpha^1 P_m^{(k)}(1,\beta)\mathcal{R}_k(\alpha/\beta)\beta^{n/2-2}d\beta\Big)-\frac{\lambda}{4}g_4(\lambda(1-\alpha))\alpha^{n/2-1}\Big]v(\alpha x)\,d\alpha.$$

Таким образом, уравнение (8) перепишется в виде

$$W(x)=v(x)+\int_0^1\mathcal{R}(\alpha,\lambda)v(\alpha x)\,d\alpha,\quad x\in\overline{S},\tag{11}$$

где обозначено

$$\mathcal{R}(\alpha,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\Big(p_k\mathcal{R}_k(\alpha)\alpha^{n/2-1}-\frac{\lambda}{4}\int_\alpha^1 P_m^{(k)}(1,\beta)\mathcal{R}_k(\alpha/\beta)\beta^{n/2-2}\,d\beta\Big)-\frac{\lambda}{4}g_4(\lambda(1-\alpha))\alpha^{n/2-1}. \quad (12)$$

Если в уравнении (11) разложить гармонические функции $W(x)$ и $v(x)$ в ряд по однородным полиномам, то получим равенство

$$W_s(x)=\Big(1+\int_0^1\mathcal{R}(\alpha,\lambda)\alpha^s\,d\alpha\Big)v_s(x),$$

а если применить к обеим частям равенства (10) оператор $(\Lambda+1)^m$, то будем иметь

$$(s+1)^m W_s(x)=F_s(\lambda;P_m)(\Lambda+1)^m u_s(x)=F_s(\lambda;P_m)v_s(x).$$

Сравнивая полученные равенства, заключаем: $\forall k\in\mathbb{N}_0$

$$\frac{F_k(\lambda;P_m)}{(k+1)^m}=1+\int_0^1\mathcal{R}(\alpha,\lambda)\alpha^k\,d\alpha. \quad (13)$$

Исследуем интегральное уравнение (11). Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=0}^{k}|S_i^{(k)}|\le|x(x-1)\cdots(x-k+1)|_{x=-1}=k!.$$

Поэтому, для функции $\mathcal{R}_k(\alpha)$ при $k=\overline{0,m-1}$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{R}_k(\alpha)|\le\sum_{i=0}^{k}|S_i^{(k)}|\,\Big|\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\ln^{m-j-1}(1/\alpha)=\sum_{i=0}^{k}|S_i^{(k)}|\ln^{m-i-1}(1/\alpha)\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\ln^{i-j}(1/\alpha)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}|S_i^{(k)}|\ln^{m-i-1}(1/\alpha)(1-\ln\alpha)^i\le(1-\ln\alpha)^{m-1}\sum_{i=0}^{k}|S_i^{(k)}|\le k!(1-\ln\alpha)^{m-1}<m!(2-\ln\alpha)^m.$$

Аналогично найдем

$$|\mathcal{R}_m(\alpha)|\le\sum_{j=0}^{m-1}\ln^{m-j-1}(1/\alpha)\sum_{i=j}^{m}\binom{i}{j}|S_i^{(m)}|\le\sum_{i=0}^{m}|S_i^{(m)}|(1-\ln\alpha)^{m-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(1-\ln\alpha)^{i-j}\le m!(2-\ln\alpha)^m.$$

В силу этих оценок из (12) следует, что найдутся такие числа $r(\lambda)$ и $p(\lambda)\ge 0$ при которых верна оценка

$$|\mathcal{R}(\alpha,\lambda)|\le r(\lambda)(2-\ln\alpha)^m+p(\lambda). \quad (14)$$

Действительно, если выбрать $r_1(\lambda)$, удовлетворяющим неравенствам $|p_k|$, $|P_m^{(k)}(1,\alpha)|\le r_1(\lambda)$ при $\alpha\in[0,1]$, то тогда

$$|\mathcal{R}(\alpha,\lambda)|\le m!r_1(\lambda)\sum_{k=0}^{m}\Big((2-\ln\alpha)^m+\frac{|\lambda|}{4}\int_\alpha^1(2-\ln\alpha+\ln\beta)^m\beta^{n/2-2}\,d\beta\Big)+$$

$$+\frac{|\lambda|}{4}g_4(-|\lambda|)\le(m+1)!\Big(1+\frac{|\lambda|}{2n-4}\Big)r_1(\lambda)(2-\ln\alpha)^m+\frac{|\lambda|}{4}g_4(-|\lambda|)$$

и значит константы $r(\lambda)$ и $p(\lambda)$ можно выбрать в виде

$$r(\lambda)=(m+1)!\Big(1+\frac{|\lambda|}{2n-4}\Big)r_1(\lambda),\quad p(\lambda)=\frac{|\lambda|}{4}g_4(-|\lambda|).$$

Предположим, что в уравнении (11) $x\in\partial S$ тогда, обозначая ядро интеграла Пуассона через

$$D(x,\xi)=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}$$

и учитывая, что $v(x)=\int_{\partial S}D(x,\xi)v(\xi)\,d\xi$ при $x\in\overline{S}$ будем иметь

$$f(s)=v(s)+\int_0^1\int_{\partial S}\mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)v(\xi)\,d\xi d\alpha. \quad (15)$$

Подинтегральная функция в полученном уравнении, в силу оценки (14), равенства $\int_0^1\ln^{k,!}(1/\alpha)\,d\alpha=1$ и положительности функции $D(x,\xi)$, при $x,\xi\in S$ является абсолютно интегрируемой. Поэтому, воспользовавшись теоремой Фубини [12], изменим порядок интегрирования в равенстве (15). Обозначая

$$Q(s,\xi;\lambda)=\int_0^1 \mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)\,d\alpha,$$

будем иметь

$$f(s)=v(s)+\int_{\partial S}Q(s,\xi;\lambda)v(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Итак, функция $v(s)$ – след решения $v(x)$ уравнения (11) на ∂S должна удовлетворять уравнению (16). Верно и обратное: если $v(s)$ – решение уравнения (16), то функция $v(x)=\int_{\partial S}D(x,s)v(s)\,ds$ является решением уравнения (11). Действительно, умножая обе части уравнения (16) на $D(x,s)$ и интегрируя по ∂S (обе части уравнения – непрерывные функции на ∂S), найдем

$$W(x)=v(x)+\int_{\partial S}D(x,s)\int_{\partial S}\int_0^1 \mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)v(\xi)\,d\alpha\,d\xi\,ds.$$

Меняя порядок интегрирования, вынося внутренний интеграл наружу, а внешний – внося вовнутрь и используя равенство

$$D(\alpha x,\xi)=\int_{\partial S}D(x,s)D(\alpha s,\xi)\,ds,\quad \xi\in\partial S,\alpha\in[0,1),$$

получим (11). Проведем аналогичные преобразования и с уравнением, союзным к (16) –

$$f(s)=v^*(s)+\int_{\partial S}Q^*(s,\xi;\lambda)v^*(\xi)\,d\xi, \tag{17}$$

ядро которого имеет вид

$$Q^*(s,\xi;\lambda)=\int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha,\lambda)}D(\alpha\xi,s)\,d\alpha.$$

Умножая обе части уравнения (17) на $D(x,s)$, интегрируя по ∂S и используя равенство

$$D(\alpha s,\xi)=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-\alpha^2}{|\alpha s-\xi|^n}=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-\alpha^2}{(\alpha^2-2\alpha(s,\xi)+1)^{n/2}}=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-\alpha^2}{|\alpha\xi-s|^n}=D(\alpha\xi,s),$$

в котором $s,\xi\in\partial S$ найдем

$$W(x)=v^*(x)+\int_{\partial S}D(x,s)\int_{\partial S}\int_0^1\overline{\mathcal{R}(\alpha,\lambda)}D(\alpha s,\xi)v^*(\xi)\,d\alpha\,d\xi\,ds=$$

$$=\int_0^1\overline{\mathcal{R}(\alpha,\lambda)}\int_{\partial S}\Big(\int_{\partial S}D(x,s)D(\alpha s,\xi)\,ds\Big)v^*(\xi)\,d\xi\,d\alpha=v^*(x)+\int_0^1\overline{\mathcal{R}(\alpha,\lambda)}\int_{\partial S}D(\alpha x,\xi)v^*(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

и значит

$$W(x)=v^*(x)+\int_0^1\overline{\mathcal{R}(\alpha,\lambda)}v^*(\alpha x)\,d\alpha. \tag{18}$$

Предположим, что ядро $Q(s,\xi;\lambda)$ – полярное. Тогда, для уравнения (16) имеют место альтернативы Фредгольма [12] и значит, его решение существует, если

$$\int_{\partial S}f(s)\overline{v}^*(s)\,ds=0, \tag{19}$$

где $v^*(x)$ – произвольное решение уравнения (17) при $f(x)=0$. Для нахождения $v^*(x)$ достаточно решить однородное уравнение (18), а затем взять его след на ∂S. Поскольку $v^*(x)$ – гармоническая в S функция, то она разложима в ряд в некоторой окрестности нуля – $\mathcal{D}_0$. Поэтому, используя равенство (13), приведем однородное уравнение (18) в $\mathcal{D}_0$ к виду

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(\lambda;P_m)\overline{v}_k^*(x)\,.$$

Отсюда сразу следует, что если при заданном λ выполняется неравенство $F_k(\lambda;P_m)\neq 0$, то тогда $v_k^*(x)=0$. Значит, функция $v^*(x)$ представляет собой сумму произвольных однородных гармонических полиномов, степени которых – k таковы, что выполняется равенство $F_k(\lambda;P_m)=0$.

Возьмем, найденную таким образом функцию $v^*(s)$. Подставляя ее в условие (18) существования решения уравнения (16), убеждаемся в его эквивалентности условию теоремы.

Итак, если выполнены условия теоремы, то выполнены условия альтернативы Фредгольма, а значит решение уравнения (16) существует. Из наличия же решения уравнения (16) вытекает существование решения уравнения (8), а следовательно, в силу формулы (4) и задачи (1)–(2).

Для окончательного доказательства существования решения остается показать полярность ядра $Q(s,\xi;\lambda)$, т.е. непрерывность функции $Q(s,\xi;\lambda)$ на $\partial S\times\partial S$ везде, кроме $s=\xi$, и справедливость неравенства

$$|Q(s,\xi;\lambda)|\le A|s-\xi|^{-\alpha},\alpha<n-1. \qquad (20)$$

Непрерывность ядра $Q(s,\xi;\lambda)$ по переменным $s,\xi\in\partial S$ при $s\ne\xi$ следует из непрерывности по этим переменным функции $D(\alpha s,\xi)$, где $\alpha\in[0,1]$, $s\ne\xi$ и неравенства $\int_0^1|\mathcal{R}(\alpha,\lambda)|\,d\alpha<\infty$.

Для доказательства оценки (20) возьмем некоторое $\varepsilon\in(0,1)$ и выпишем равенство

$$Q(s,\xi;\lambda)=\int_0^\varepsilon\mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)\,d\alpha+\int_\varepsilon^1\mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)\,d\alpha.$$

Оценим первый интеграл. В силу неравенства (14), при $s,\xi\in\partial S$ получим

$$\left|\int_0^\varepsilon\mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)\,d\alpha\right|\le\max_{\alpha\in[0,\varepsilon]}D(\alpha s,\xi)\int_0^1|\mathcal{R}(\alpha,\lambda)|\,d\alpha\le C_1,$$

где $\varepsilon\in(0,1)$. Далее, нетрудно видеть, что

$$\omega_n D(\alpha s,\xi)=\frac{1-\alpha^2}{|\alpha s-\xi|^n}\le 2\frac{|\xi|-|\alpha s|}{|\alpha s-\xi|^n}\le 2\frac{|\xi-\alpha s|}{|\xi-\alpha s|^n}=\frac{2}{|\xi-\alpha s|^{n-1}}$$

и значит при $C_3=2/\omega_n$ имеем $D(\alpha s,\xi)\le C_3|\alpha s-\xi|^{1-n}$. Теперь, учитывая, что $\sup\limits_{\alpha\in[\varepsilon,1]}|\mathcal{R}(\alpha,\lambda)|\le C_2(\varepsilon)$, а также пользуясь неравенством

$$\int_0^1\frac{d\alpha}{|\alpha s-\xi|^k}\le\frac{C_4}{|s-\xi|^{k-1}}, \qquad (21)$$

где $s,\xi\in\partial S$ и $k\ge 2$ оценим второй интеграл. Имеем

$$\left|\int_\varepsilon^1\mathcal{R}(\alpha,\lambda)D(\alpha s,\xi)\,d\alpha\right|\le C_3C_2(\varepsilon)\int_\varepsilon^1\frac{d\alpha}{|\alpha s-\xi|^{n-1}}\le\frac{C_2(\varepsilon)C_3C_4}{|\xi-s|^{n-2}}.$$

Таким образом, при $n\ge 2$ будем иметь

$$|Q(s,\xi;\lambda)|\le\frac{C_1|\xi-s|^{n-2}+C_2(\varepsilon)C_3C_4}{|\xi-s|^{n-2}}\le\frac{C_1 2^{n-2}+C_2(\varepsilon)C_3C_4}{|\xi-s|^{n-2}}.$$

Отсюда, полагая $A=C_1 2^{n-2}+C_2(\varepsilon)C_3C_4$, получим оценку (20) при $\alpha=n-2$. Осталось доказать справедливость неравенства (21). Пусть $k\ge 2$. Обозначим $\omega=(s,\xi)$ и будем считать, что $s\ne\xi$, а значит $\omega<1$. Предположим сначала, что $\omega\ge 0$. Тогда

$$\int_0^1\frac{d\alpha}{|\alpha s-\xi|^k}=\int_0^1\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2-2\omega\alpha)^{k/2}}=\int_0^1\frac{d\alpha}{((\alpha-\omega)^2+1-\omega^2)^{k/2}}=$$

$$=\frac{1}{(1-\omega^2)^{k/2}}\int_0^1\frac{d\alpha}{\left(1+\frac{(\alpha-\omega)^2}{1-\omega^2}\right)^{k/2}}=\frac{1}{(1-\omega^2)^{(k-1)/2}}\int_a^b\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{k/2}},$$

где $a=-\omega/\sqrt{1-\omega^2}$, $b=\sqrt{(1-\omega)/(1+\omega)}$ Так как $|s-\xi|=\left(2(1-\omega)\right)^{1/2}$, то

$$1-\omega^2=2^{-1}|s-\xi|^2(1+\omega)\ge 2^{-1}|s-\xi|^2$$

и значит, будем иметь

$$\int_0^1\frac{d\alpha}{|\alpha s-\xi|^k}\le\frac{2^{(k-1)/2}}{|s-\xi|^{k-1}}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{k/2}}.$$

Если $\omega \le 0$, то тогда $|\alpha s - \xi|^2 = 1 + \alpha^2 - 2\omega\alpha \ge 1 + \alpha^2$ и поэтому

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{k/2}}.$$

Поскольку $|s - \xi| \le 2$, то $2/|s-\xi| \ge 1$ и значит можно записать

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \le \frac{2^{k-1}}{|s-\xi|^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{k/2}}.$$

Объединяя два полученных выше неравенства в одно выбором большей константы, получим (21) при

$$C_4 = 2^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{k/2}}.$$

Существование решения задачи (1)–(2) полностью доказано.

Для исследования единственности решения задачи (1)–(2) следует исследовать единственность решения уравнения (8), а следовательно и уравнения (11). Последнее же имеет единственное решение с точностью до однородных гармонических полиномов $H_k(x)$, степени которых – k удовлетворяют уравнению $F_k(\lambda; P_m) = 0$. Подставляя их в формулу (4) и учитывая равенство (9), получим

$$v(x) = \left(1 - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(\lambda(1-\alpha)|x|^2\right) \alpha^{k+n/2-1} d\alpha\right) H_k(x) = g_{n+2k}\left(\lambda |x|^2\right) H_k(x),$$

т.е. $v(x) = v_k^{(\lambda)}(x)$. Итак, если решение задачи (1)–(2) существует, то оно единственно с точностью до функций $v_k^{(\lambda)}(x)$, где числа $k \in \mathbb{N}_0$ такие, что $F_k(\lambda; P_m) = 0$. Теорема полностью доказана.

Литература

1. Соколовский, В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана / В.Б. Соколовский // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 714–716.

2. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // Докл. АН СССР, 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.

3. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.

4. Карачик, В.В. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 907–909.

5. Карачик, В.В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 1501–1503.

6. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами II / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5. – № 32(249). – С. 27–38.

7. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – V. 287, № 2. – P. 577–592.

8. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, № 4. – P. 1049–1058.

9. Карачик, В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.

10. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

11. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, № 12. – P. 3513–3519.

12. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

13. Менихес, Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач / Л.Д. Менихес // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 242–246.

14. Реконструкция поступления долгоживущих радионуклидов жителям прибрежных сёл реки Теча. Сообщение 1. Стронций-90 / Е.И. Толстых, М.О. Дегтева, Л.М. Перемыслова и др. // Вопросы радиационной безопасности. – 2006. – № S1. – С. 45-67.

Поступила в редакцию 21 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 14–22

ON A NONCLASSICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

V.V. Karachik[1]

A boundary value problem for the Helmholtz equation in the unit ball, having high-order normal derivatives in the boundary conditions is considered. The theorem of necessary and sufficient solvability conditions of this problem is proved.

Keywords: Helmholtz equation; generalized Neumann problem; eigenvalues; normal derivatives.

References

1. Sokolovskiy V.B. *Differentsial'nye uravneniya.* 1988. Vol. 24, no. 4. pp. 714–716.

2. Bitsadze A.V. *Dokl. AN SSSR.* 1990. Vol. 311, no. 1. pp. 11–13.

3. Karachik V.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal.* 1991. Vol. 32, no. 5. pp. 51–58.

4. Karachik, V.V. *Differentsialnye uravneniya.* 1992. Vol. 28, no. 5. pp. 907–909.

5. Karachik, V.V. *Differentsialnye uravneniya.* 1996. Vol. 32, no. 3. pp. 1501–1503.

6. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniya differencialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefficientami I [Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients II]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika».* 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 27–38. (in Russ.).

7. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.

8. Karachik V.V. On some special polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society.* 2004. Vol. 132, no. 4. pp. 1049–1058.

9. Karachik V.V. O nekotorykh spetsial'nykh polinomakh i funktsiyakh (On Some Special Polynomials and Functions). *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya.* 2013. Vol. 10. pp. 205–226. (in Russ.).

10. Karachik V.V. Postroenie polinomial'nykh resheniy nekotorykh zadach dlya uravneniya Puassona (Construction of Polynomial Solutions to Some Boundary Value Problems to Poisson's Equation). *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1674–1694. (in Russ.).

11. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1998. Vol. 126, no. 12. pp. 3513–3519.

12. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (in Russ.).

13. Menikhes L.D. *Matematicheskie zametki.* 2007. Vol. 82, no. 2. pp. 242–246. (in Russ.).

14. Tolstykh E.I., Degteva M.O., Peremyslova L.M., Shagina N.B., Zalyapin V.I., Krivoshchapov V.A., Anspo L.R., Nap'e B.A. Rekonstruktsiya postupleniya dolgozhivushchikh radionuklidov zhitelyam pribrezhnykh syel reki Techa. Soobshchenie 1. Strontsiy-90 (Reconstruction of long-lived radionuclide intakes for Techa riverside residents. Part 1: Strontium-90). *Voprosy radiatsionnoy bezopasnosti*. 2006. no. S1. pp. 45–67. (in Russ.).

Received 21 May 2014

[1] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: karachik@susu.ru