УДК 532.529

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВЗВЕСИ С ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ[1]

Ю.М. Ковалев[2]

На основании анализа инвариантности относительно преобразования Галилея известной математической модели, описывающей течение двухфазной среды, было показано, что, несмотря на инвариантность уравнений сохранения компонентов, получающееся уравнение сохранения полной энергии смеси не является достоверным. Подробно исследованы и устранены причины данного несоответствия. Для полученной математической модели двухфазной среды была определена функциональная зависимость силы межфазного взаимодействия.

Ключевые слова: математическая модель; инвариантность; многокомпонентная смесь.

Введение

С течениями гетерогенных сред очень часто приходится сталкиваться в различных областях науки и техники. Это связано с тем, что в природе практически отсутствуют «чистые» вещества. Наличие даже небольшого объемного содержания примеси приводит к существенному изменению картины течения смеси. Все это требует активного развития математических моделей гетерогенных сред, достоверно описывающих изучаемые процессы. Данные математические модели находят широкое применение в различных отраслях науки и техники. Например, перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения эффективных мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). Правильное применение математических моделей многокомпонентных многофазных сред позволяет прогнозировать многие техногенные катастрофы и находить верные средства по их предотвращению. Показано, что перспективными средствами защиты могут быть перемычки, разрушающиеся при взаимодействии с УВ и образующие экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1].

В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов. Поэтому с особой остротой встает проблема разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

В настоящей статье с помощью анализа инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели аэровзвеси [7, 8], применяемой для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, попытаемся определить дефекты данной математической модели [9, 10] и найти способы их устранения.

1. Математическая модель газовзвеси

Рассмотрим одномерный плоский случай математической модели течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [8], и проведем оценку ее на инвариантности относительно преобразования Галилея.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13-01-00072.

[2] Ковалёв Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: yum_kov@mail.ru

Система уравнений сохранения двухфазной аэровзвеси [8] без химических превращений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x}=0,\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x}=0,\ \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n v_2}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\rho_1\frac{d_1 v_1}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}-nR,\ \rho_2\frac{d_2 v_2}{dt}=nR, \tag{2}$$

$$\rho_1\frac{d_1 e_1}{dt}=\frac{p\alpha_1}{\left(\overset{\circ}{\rho}_1\right)}\frac{d_1\overset{\circ}{\rho}_1}{dt}+nR\left(v_1-v_2\right)-nq, \tag{3}$$

$$\rho_2\frac{d_2 e_2}{dt}=\frac{p\alpha_2}{\left(\overset{\circ}{\rho}_2\right)}\frac{d_2\overset{\circ}{\rho}_2}{dt}+nq \tag{4}$$

$$p=p_1\left(\overset{\circ}{\rho}_1,T_1\right)=p_2\left(\overset{\circ}{\rho}_2,T_2\right),\ e_1=e_1\left(\overset{\circ}{\rho}_1,T_1\right),e_2=e_2\left(\overset{\circ}{\rho}_2,T_2\right),$$

$$\rho_1=\overset{\circ}{\rho}_1\alpha_1,\ \rho_2=\overset{\circ}{\rho}_2\alpha_2,E_i=e_i+\frac{v_i^2}{2}(i=1,2),\ \frac{d_i}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x},\quad \alpha_1+\alpha_2=1.$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; $\overset{\circ}{\rho}_i,\alpha_i$ (i = 1, 2) – истинные плотности и объемные содержания фаз; ρ_i,v_i,T_i,e_i,E_i – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i-й фазы; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси. Уравнения (1) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (2) – уравнения импульса газа и частиц; (3) и (4) – уравнения сохранения внутренней энергии газа и частиц соответственно.

Получим уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированной фаз.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы на v_1, а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы на v_2, получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно

$$v_1\left[\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x}\right]=-v_1\frac{\partial p}{\partial x}-nRv_1,$$

$$v_2\left[\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x}\right]=nRv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial x}=-v_1\frac{\partial p}{\partial x}-nRv_1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial x}=nRv_2. \tag{6}$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения (1), (2), (5) и (6).

Запишем уравнения (1), (2), (5) и (6) в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1н}=v_1+D, \tag{7}$$

$$v_{2н}=v_2+D. \tag{8}$$

Координата будет определяться из уравнения

$$x_н=x+Dt. \tag{9}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_н}, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_н}\right)D. \tag{11}$$

Легко показать [9, 10], что уравнения (1), (2), (5) и (6) инвариантны относительно преобразования Галилея.

Преобразуем левые части уравнений сохранения внутренней энергии газа и частиц. С учетом равенств (1) они могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial\rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=\frac{p\alpha_1}{\left(\overset{\circ}{\rho}_1\right)}\frac{d_1\overset{\circ}{\rho}_1}{dt}+nR\left(v_1-v_2\right)-nq, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=\frac{p\alpha_2}{\left(\overset{\circ}{\rho}_2\right)}\frac{d_2\overset{\circ}{\rho}_2}{dt}+nq \tag{13}$$

Из уравнений неразрывности газовой и конденсированной фаз (1) легко получить следующие равенства

$$\alpha_1\frac{d_1\overset{\circ}{\rho}_1}{dt}=-\overset{\circ}{\rho}_1\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1 v_1}{\partial x}\right),$$

$$\alpha_2\frac{d_2\overset{\circ}{\rho}_2}{dt}=-\overset{\circ}{\rho}_2\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_2 v_2}{\partial x}\right),$$

Подставляя данные выражения в уравнения (12) и (13) соответственно, получим

$$\frac{\partial\rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1 v_1}{\partial x}\right)+nR\left(v_1-v_2\right)-nq, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_2 v_2}{\partial x}\right)+nq. \tag{15}$$

Очевидно, что уравнения сохранения внутренней энергии газовой (3) и конденсированной (4) фаз, преобразованные к виду (14) и (15), инвариантны относительно преобразования Галилея

Получим уравнение сохранения полной энергии смеси. Для этого суммируем левые и правые части уравнений (5), (6), (14), (15). В результате получим

$$\frac{\partial\left(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+\left(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\right)p\right]=-\alpha_2\left(v_1-v_2\right)\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{16}$$

которое не совпадает с уравнением сохранения полной энергии смеси, полученным в работе [7, 8].

Для того, чтобы убрать это несоответствие, необходимо разделить силу взаимодействия между фазами на две части [11]: на составляющую из-за воздействия макроскопического поля давлений – $\alpha_2\dfrac{\partial p}{\partial x}$, которая не связана со скоростной неравновесностью между фазами, и составляющую f, которая связана с несовпадением скоростей:

$$nR=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf\ .$$

Подставляя полученное выражение в равенства (2) и преобразовывая левые части этих равенств к дивергентному виду, получим

$$\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1^2}{\partial x}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2^2}{\partial x}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf. \tag{18}$$

К системе уравнений (1), (17) и (18) добавляются уравнения сохранения внутренней и кинетической энергии

$$\frac{\partial\rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1 v_1}{\partial x}\right)+nf\left(v_1-v_2\right)-nq, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\right)+nq, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x}-nfv_1, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x}+nfv_2. \tag{22}$$

В этом случае уравнение сохранения полной энергии смеси будет иметь вид, совпадающий с предлагаемым в работе в [7, 8]

$$\frac{\partial\left(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+\left(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\right)p\right]=0. \tag{23}$$

Легко показать, что уравнения (17)–(23) инвариантны относительно преобразования относительно Галилея [9, 10].

2. Определение функциональной зависимости силы межфазного взаимодействия

При проведении анализа инвариантности относительно преобразования Галилея законов сохранения, описывающих поведение газовзвесей, предполагалось, что выражение для силы межфазного взаимодействия является инвариантным. Это возможно в том случае, когда силы межфазного взаимодействия являются функциями разности скоростей f_1 (сила Стокса) и функциями разности ускорений f_2 (сила присоединенных масс) [7, 8]. Явный учет выражения для силы присоединенных масс, проведенный в работе [7, 8], приводит к следующим уравнениям сохранения импульса газовой и конденсированной фаз [7, 8]:

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}=-nf_1, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}=nf_1. \tag{25}$$

Из уравнений (24) и (25) следует, что уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированных фаз имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x}+\alpha_1 v_1\frac{\partial p}{\partial x}=-nf_1 v_1, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha_2 v_2\frac{\partial p}{\partial x}=nf_1 v_2. \tag{27}$$

Легко показать, что уравнения (24)–(27) являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

Рассмотрим уравнение сохранения полной энергии смеси (24) и проведем его анализ на инвариантность относительно преобразования Галилея, используя уравнения сохранения (1), (24)–(27). Используя формулы перехода к новой системе координат (7)–(11), получим

$$\frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1+\frac{\left(v_{1н}-D\right)^2}{2}\right)+\rho_2\left(e_2+\frac{\left(v_{2н}-D\right)^2}{2}\right)\right)}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1+\frac{\left(v_{1н}-D\right)^2}{2}\right)+\rho_2\left(e_2+\frac{\left(v_{2н}-D\right)^2}{2}\right)\right)}{\partial x_н}D+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1\left(v_{1н}-D\right)\left(e_1+\frac{\left(v_{1н}-D\right)^2}{2}\right)+\rho_2\left(v_{2н}-D\right)\left(e_2+\frac{\left(v_{2н}-D\right)^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\alpha_1\left(v_{1н}-D\right)+\alpha_2\left(v_{2н}-D\right)\right)p\right]=0.$$

После простых алгебраических преобразований получаем:

$$\frac{\partial\rho_1\left(e_1+\dfrac{v_{1н}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2\left(e_2+\dfrac{v_{2н}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}\right)+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial x_н}\right)-$$

$$-D\left(\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)-D\left(\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}^2}{\partial x_н}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)+$$

$$+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}\left(e_1+\dfrac{v_{1н}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}\left(e_2+\dfrac{v_{2н}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_н}\left[\left(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н}\right)p\right]=0.$$

Согласно (1) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (24) и (25) будут равны Df_1 и $-Df_1$. В результате получим:

$$\frac{\partial\left(\rho_1 E_{1н}+\rho_2 E_{2н}\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_{1н}E_{1н}+\rho_2 v_{2н}E_{2н}+\left(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н}\right)p\right]+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}=0. \qquad (28)$$

В новой системе координат в уравнении полной энергии смеси (28) появился дополнительный член

$$\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н},$$

который приводит к не инвариантности относительно преобразования Галилея уравнение полной энергии смеси. Появление дополнительного члена в уравнении сохранения полной энергии смеси связано с явным учетом силы присоединенных масс f_2, которая является функцией разности ускорений фаз. Следовательно, для того чтобы не нарушалась инвариантность законов сохранения, описывающих поведение газовзвесей, сила межфазного взаимодействия должна быть только функцией разности скоростей фаз $f=f_1\left(v_1-v_2\right)$.

Автор выражает свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток/ Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.

2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно- физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.

4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.

5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 69–73.

7. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматуллин // Известия АН СССР. Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

8. Ивандаев, А.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Р.И. Нигматулин // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ. – 1981. – Т. 16. – С. 209–287.

9. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея двухфазных математических моделей гетерогенных сред / Ю.М. Ковалев// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 30–35.

10. Ковалев, Ю.М. Математический анализ уравнения сохранения двухфазных смесей / Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.

11. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию 27 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 23–29

DETECTION OF A TYPE OF INTERPHASE INTERACTION FORCE FOR MATHEMATICAL MODELS OF GAS SUSPENSION WITH PAIR INTERACTION

Y.M. Kovalev[1]

Based on the analysis of invariance under Galilean transformations of a known mathematical model describing a two-phase medium flow, it was shown that despite the invariance of the equations for conservation of components, the resulting equation for conservation of total energy of the mixture is not reliable. The reasons for this discrepancy are thoroughly examined and eliminated. Functional dependence of the interphase interaction was determined for the obtained mathematical model of a two-phase medium.

Keywords: mathematical model; invariance; multi-component mixture.

References

1. Kovalev Yu.M. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov"*. 1997. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

2. Kuropatenko V.F. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal.* 2011. Vol. 84, no. 1. pp. 74–92. (in Russ.).

3. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Doklady Akademii nauk.* 1989. Vol. 308, no. 5. pp. 1074–1078. (in Russ.).

4. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Fizika goreniya i vzryva.* 1989. Vol. 25, no. 6. pp. 72–79. (in Russ.).

5. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analysis of the invariance some mathematical models of multicomponent media (Analiz invariantnosti nekotorykh matematicheskikh modeley mnogokomponentnykh sred). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2012. Issue 6. no. 11(270). pp. 4–7. (in Russ.).

[1] Kovalev Yury Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: yum_kov@mail.ru

6. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti otnositel'no preobrazovaniya Galileya nekotorykh modeley matematicheskikh mnogokomponentnykh sred. (Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multicomponent Media). *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2012. no. 27. pp. 69–73. (in Russ.).

7. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatullin Kh.A. *Izvestiya AN SSSR. Seriya “Mekhanika zhidkosti i gaza”.* 1981. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

8. Ivandaev A.I., Kutushev A.G., Nigmatulin R.I. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika zhidkosti i gaza.* Moscow, VINITI Publ. 1981. Vol. 16. pp. 209–287. (in Russ.).

9. Kovalev Yu.M. Analysis of invariance under Galilean transformation of two-phase mathematical models of heterogeneous media. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”.* 2014. Vol. 6, no. 1, pp. 30–35. (in Russ.).

10. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. Matematicheskiy analiz uravneniya sokhraneniya dvukhfaznykh smesey (A Mathematical Study of the Conservation Equation for Two-Phase Mixtures). *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2014. Vol. 7, no. 2. pp. 29–37. (in Russ.).

11. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* (The fundamentals of the mechanics of heterogeneous media). Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p. (in Russ.).

Received 27 May 2014