УДК 515.124

h-ОДНОРОДНЫЕ λ-ПРОСТРАНСТВА

С.В. Медведев[1]

Пусть X – h-однородное сепарабельное метризуемое несчётное λ-пространство. Тогда: 1) X является CDH-пространством, 2) X гомеоморфно $X \setminus A$ для любого счётного множества A из X.

Ключевые слова: CDH-пространство; h-однородное пространство; λ-пространство; гомеоморфизм.

Все пространства предполагаются сепарабельными метризуемыми.

Сепарабельное топологическое пространство X называется *счётно плотно однородным*, если для любых двух счётных всюду плотных множеств A и B из пространства X существует такой гомеоморфизм $f: X \to X$, что $f(A) = B$. Кратко такое пространство X называется *CDH-пространством*. Это понятие применяется только для сепарабельных пространств. Термин «CDH-пространство» был введён Беннетом в 1972 г. Однако понятие CDH-пространства является классическим; оно фактически встречалось ещё в работах Кантора, Брауэра, Фреше и других математиков прошлого века. Важными примерами CDH-пространств служат евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и гильбертов куб $[0;1]^\omega$.

Теорема 1. *Любое абсолютно борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой.*

Напомним, что *абсолютно борелевским пространством* называется пространство, гомеоморфное борелевскому подмножеству полного метрического пространства. Теорема 1 доказана М. Хрусаком и Б. Авилес [1] в предположении выполнения аксиом теории **ZFC**. Отметим также [1], что из аксиомы детерминированности вытекает, что любое CDH-пространство метризуемо полной метрикой. В то же время, как известно, аксиома детерминированности противоречит аксиоме выбора.

Теорема 1 показывает, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди множеств, устроенных более сложно, чем борелевские множества в польских пространствах. Ниже в теореме 2 указан ещё один класс CDH-пространств. Теорема 2 доказана в системе аксиом **ZFC** и представляет собой основной результат заметки; она усиливает утверждение 4.9 из статьи [4].

Обозначения. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y гомеоморфны. Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω, также $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$.

Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно является T_1-пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Нульмерное пространство называется *h-однородным*, если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Пространство X называется *пространством первой категории*, если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств.

Куратовский [2, §40] ввёл так называемые λ-пространства. Сепарабельное пространство X называется *λ-пространством*, если любое счётное подмножество из X является G_δ-множеством в X. Можно доказать [2], что любое несчётное польское пространство содержит несчётное λ-множество.

Остальные обозначения и применяемые термины можно найти в монографиях [2] и [6].

Отметим следующие связи между λ-пространствами и пространствами первой категории.

Лемма 1 [2]. *Любое λ-пространство является пространством первой категории.*

Лемма 2 [3]. *Любое CDH-пространство первой категории является λ-пространством.*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

[1] Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Лемма 3 [5]. *Пусть в нульмерном метризуемом пространстве* X_i *дано замкнутое нигде не плотное множество* F_i, *где* $i \in \{1;2\}$. *Пусть дан гомеоморфизм* $f: F_1 \to F_2$.

Тогда существует покрытие $\mathcal{V}_i$ *множества* $X_i \setminus F_i$ *попарно не пересекающимися открыто-замкнутыми (в* X_i*) множествами для каждого* $i \in \{1;2\}$ *и биекция* $\psi: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ *такие, что для любых множеств* $D_1 \subset \bigcup \mathcal{V}_1$ *и* $D_2 \subset \bigcup \mathcal{V}_2$, *связанных произвольной биекцией* $g: D_1 \to D_2$ *и удовлетворяющих условию* $g(D_1 \cap V) = D_2 \cap \psi(V)$ *для любого* $V \in \mathcal{V}_1$, *комбинированное отображение* $f \nabla g: F_1 \bigcup D_1 \to F_2 \bigcup D_2$ *непрерывно в каждой точке множества* F_1, *а обратное отображение* $(f \nabla g)^{-1}$ *непрерывно в каждой точке множества* F_2.

В ситуации, описанной леммой 3, мы будем говорить, что:

1) покрытие $\mathcal{V}_i$ множества $X_i \setminus F_i$ образует *остаточное семейство множеств* относительно множества F_i для каждого $i \in \{1;2\}$;

2) биекция $\psi: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ согласована с гомеоморфизмом $f: F_1 \to F_2$;

3) тройка $\langle \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \psi \rangle$ образует *KR-покрытие* для $\langle X_1 \setminus F_1, X_2 \setminus F_2, f \rangle$.

Результат, аналогичный лемме 3, был также получен А.В. Островским и ван Энгеленом. Отметим, что термин «KR-покрытие» был предложен ван Энгеленом.

В доказательстве теоремы 2 используются некоторые идеи из статьи [4].

Теорема 2. *Любое h-однородное несчётное λ-пространство является CDH-пространством.*

Доказательство. В h-однородном несчётном λ-пространстве *X* зафиксируем счётные всюду плотные множества *A* и *B*.

Так как пространство *X* нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ дискретных открытых покрытий пространства *X*, что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства *X*, состоящую из открыто-замкнутых множеств, причём для любого *n* покрытие $\mathcal{U}_{n+1}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}_n$. По определению h-однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U: X \to U$.

Счётное множество $A \cup \bigcup\{\varphi_U(A): U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $A' = \{a_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $A' \setminus A$ было бы всюду плотно в *X*. Аналогично, счётное множество $B \cup \bigcup\{\varphi_U(B): U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $B' = \{b_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $B' \setminus B$ было бы всюду плотно в *X*.

Так как пространство *X* – несчётное, то $X' = X \setminus (A' \bigcup B')$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории *X*; следовательно, X' также является множеством первой категории в *X*. По определению λ-пространства, $A' \bigcup B'$ – множество типа G_δ в пространстве *X*. Тогда $X' = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$, где каждое множество X_n замкнуто и нигде не плотно в *X*. Так как пространство *X* нульмерно, то без ограничения общности можно считать, что множества $X_n, n \in \omega$, попарно не пересекаются. По построению, для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$ множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в *X*, причём $\varphi_U(X_n) \subset U$, $\varphi_U(X_n) \bigcap A = \varnothing$ и $\varphi_U(X_n) \bigcap B = \varnothing$.

Построим гомеоморфизм $f: X \to X$, для которого $f(A) = B$.

Для этого по индукции в пространстве *X* построим замкнутые нигде не плотные множества F_n и E_n, гомеоморфизм $f_n: F_n \to E_n$, KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \rangle$ для $\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \rangle$, удовлетворяющие следующим условиям для любого $n \in \omega$:

1) $X_n \bigcup F_n \bigcup \{a_n\} \subset F_{n+1}$;

2) $X_n \bigcup E_n \bigcup \{b_n\} \subset E_{n+1}$;

3) $f_n(A \bigcap F_n) = B \bigcap E_n$;

4) сужение $f_n|_{F_i} = f_i$ для любого $i < n$;

5) семейство $\mathcal{V}_{n+1}$ вписано в $\mathcal{V}_n$, а семейство $\mathcal{W}_{n+1}$ вписано в $\mathcal{W}_n$;

6) если $V \in \mathcal{V}_n$ и $V^* \in \mathcal{V}_m$ для $n < m$, то $V^* \subset V \quad \Leftrightarrow \quad \psi_m(V^*) \subset \psi_n(V)$.

База индукции. Для $n = 0$ положим $F_0 = E_0 = \varnothing$, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{W}_0 = \{X\}$, $\psi_0(X) = X$ и $f_0(\varnothing) = \varnothing$.

Индуктивный переход. Предположим, что множества F_n и E_n, гомеоморфизм $f_n : F_n \to E_n$ и KR-покрытие $\left\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \right\rangle$ для $\left\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \right\rangle$ построены согласно условиям (1)–(6).

Сделаем следующий шаг. Зафиксируем множества $V \in \mathcal{V}_n$ и $W = \psi_n(V) \in \mathcal{W}_n$.

Положим $Y = V \bigcap X_m$, где m – наименьший индекс, для которого множество $Y \neq \varnothing$. Аналогично, положим $Z = W \bigcap X_k$, где k – наименьший индекс, для которого множество $Z \neq \varnothing$.

Множество A' всюду плотно в X. Зафиксируем точку $a_i \in V \bigcap A'$ с наименьшим возможным индексом i. Выберем точку $b_j \in W \bigcap B'$ с наименьшим возможным индексом j по следующему правилу: $b_j \in B \Leftrightarrow a_i \in A$.

Множество $Y \cup \{a_i\}$ нигде не плотно в V, поэтому существует такое базисное множество $U \in \mathcal{U}$, что $U \subset V$ и $U \bigcap (Y \cup \{a_i\}) = \varnothing$. Положим $F_V = Y \cup \{a_i\} \cup \varphi_U(Z)$. Аналогично, найдётся базисное множество $U^* \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условиям $U^* \subset W$ и $U^* \bigcap (Z \cup \{b_j\}) = \varnothing$. Пусть $E_W = Z \cup \{b_j\} \cup \varphi_{U^*}(Y)$. Определим гомеоморфизм $f_V : F_V \to E_W$ по следующему правилу:

$$f_V(x) = \begin{cases} b_j, & \text{если} \quad x = a_i, \\ \varphi_{U^*}(x), & \text{если} \quad x \in Y, \\ \left(\varphi_U\right)^{-1}(x), & \text{если} \quad x \in \varphi_U(Z). \end{cases}$$

По лемме 3 существует KR-покрытие $\left\langle \mathcal{V}_V, \mathcal{W}_V, \psi_V \right\rangle$ для $\left\langle V \setminus F_V, W \setminus E_W, f_V \right\rangle$.

Несложно проверить, что $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup \left\{ F_V : V \in \mathcal{V}_n \right\}$ и $E_{n+1} = E_n \cup \bigcup \left\{ E_{\psi_n(V)} : V \in \mathcal{V}_n \right\}$ – замкнутые нигде не плотные множества в пространстве X. Зададим отображение $f_{n+1} : F_{n+1} \to E_{n+1}$ по следующему правилу:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_V(x), & \text{если } x \in F_V \text{ для некоторого } V \in \mathcal{V}_n, \\ f_n(x), & \text{если } x \in F_n. \end{cases}$$

Из построения вытекает, что отображение f_{n+1} является локальным гомеоморфизмом в точках множества $F_{n+1} \setminus F_n$, а из индуктивного предположения и леммы 3 следует, что отображение f_{n+1} является гомеоморфизмом в точках множества F_n.

Семейство $\mathcal{V}_{n+1} = \left\{ U \in V : V \in \mathcal{V}_n \right\}$ образует покрытие множества $X \setminus F_{n+1}$, а семейство $\mathcal{W}_{n+1} = \left\{ \psi_V(U) \in V : U \in \mathcal{V}_V, V \in \mathcal{V}_n \right\}$ образует покрытие множества $X \setminus E_{n+1}$. Биекция $\psi_{n+1} : \mathcal{V}_{n+1} \to \mathcal{W}_{n+1}$ определяется естественным образом: $\psi_{n+1}(U) = \psi_V(U)$, если $U \in \mathcal{V}_V$ для некоторого $V \in \mathcal{V}_n$. Несложно проверить, что биекция ψ_{n+1} согласована с гомеоморфизмом f_{n+1}. Итак, $\left\langle \mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{W}_{n+1}, \psi_{n+1} \right\rangle$ образует KR-покрытие для $\left\langle X \setminus F_{n+1}, X \setminus E_{n+1}, f_{n+1} \right\rangle$.

Ясно, что все условия (1)–(6) выполняются. Индуктивный переход завершён.

Из условий (1) и (2) следует, что $X = \bigcup \left\{ F_n : n \in \omega \right\} = \bigcup \left\{ E_n : n \in \omega \right\}$.

Зададим отображение $f : X \to X$ по правилу $f(x) = f_n(x)$, если $x \in F_n$ для некоторого n. Это определение корректно в силу условия (4). Более того, f – биекция. По построению, сужение $f|_{F_n}$ является гомеоморфизмом. Из леммы 3 вытекает, что f – гомеоморфизм.

Из условия (3) следует, что $f(A) = B$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2, леммы 1 и леммы 2 вытекает следующая неожиданная характеристика λ-пространств.

Следствие 1. *Пусть дано h-однородное несчётное пространство X. Тогда X является λ-пространством тогда и только тогда, когда X – CDH-пространство первой категории.*

Следствие 2. *Пусть* $X = \oplus\{X_n : n \in \omega\}$*, где каждое* X_n *является h-однородным несчётным λ-пространством. Тогда X – CDH-пространство.*

Установим ещё одно свойство h-однородных λ-пространств.

Теорема 3. *Пусть дано h-однородное несчётное λ-пространство X. Тогда X гомеоморфно своему подпространству* $X \setminus A$ *для любого счётного множества* $A \subset X$.

Доказательство. Так как пространство X нигде не счётно, то дополнение $X \setminus A$ является всюду плотным подмножеством в X. Согласно лемме 1, X – пространство первой категории. Тогда [2] дополнение $X \setminus A$ также будет пространством первой категории относительно себя.

Так как пространство X нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ дискретных открытых счётных покрытий пространства X, что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X, причём для любого n покрытие $\mathcal{U}_{n+1}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}_n$. По определению h-однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U : X \to U$.

Рассмотрим счётное множество $A^* = A \cup \bigcup\{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$. Из определения λ-множества следует, что A^* – множество типа G_δ в пространстве X. Несложно проверить, что $X^* = X \setminus A^*$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории X; следовательно, X^* также является множеством первой категории в X. Более того, X^* – множество типа F_σ в пространстве X. Поэтому множество X^* можно представить в виде счётного объединения $X^* = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$ замкнутых (в X) нигде не плотных множеств X_n. Из построения вытекает, что множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X, причём $\varphi_U(X_n) \subset U \setminus A$ для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$.

Применяя лемму 4 из [5], делаем вывод, что любое открытое множество из пространства $X \setminus A$ содержит нигде не плотное замкнутое (относительно $X \setminus A$) подмножество, гомеоморфное пространству X. Тогда по теореме 3 из [5] пространство $X \setminus A$ гомеоморфно h-однородному расширению $h(X, \omega)$ пространства X относительно пространств первой категории. В [5] было показано, что для любого сепарабельного h-однородного пространства X первой категории расширение $h(X, \omega)$ гомеоморфно самому пространству X.

Теорема 3 доказана.

Замечание. Интересно выяснить, останутся ли теоремы 2 и 3 верными для (нульмерных) однородных пространств.

Литература

1. Hrusak, M. Countable dense homogeneity of definable spaces / M. Hrusak, B. Zamora Aviles // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 133. – Issue 11. – P. 3429–3435.

2. Куратовский, K. Топология: моногр: в 2 т. / K. Куратовский; пер. с англ. М.Я. Антоновского. – М.: Мир, 1966. – Т.1. – 595 с.

3. Fitzpatric, Jr. B. Countable dense homogeneity and the Baire property / B. Fitzpatric Jr., H-X. Zhou // Topology Applic. – 1992. – Vol. 43. – P. 1–14.

4. Hernandez-Gutierrez, R. Countable dense homogeneity and λ-sets / R. Hernandez-Gutierrez, M. Hrusak, J. van Mill // Fund. Math. – 2014. – Vol. 266. – Issue 2. – P. 157–172.

5. Medvedev, S.V. About closed subsets of spaces of first category / S.V. Medvedev // Topology Applic. – 2012. – Vol. 159. – P. 2187–2192.

6. Engelking, R. General Topology / R. Engelking. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 529 p.

Поступила в редакцию 5 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2014, vol. 6, no. 3, pp. 37–41

h-HOMOGENEOUS λ-SPACES

S.V. Medvedev[1]

Let X be an h-homogeneous separable metrizable uncountable λ-space. Then: 1) X is a CDH-space, 2) X is homeomorphic to $X \setminus A$ for any countable subset A of X.

Keywords: CDH-space; h-homogeneous space; λ-space; homeomorphism.

References

1. Hrusak M., Zamora Aviles B. Countable dense homogeneity of definable spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2005. Vol. 133. Issue 11. pp. 3429–3435.

2. Kuratowskiy K. *Topologiya: monografiya* (Topology: the monograph). Moscow, Mir Publ., 1966. Vol. 1. 595 pp. (in Russ.). [Kuratowski K. Topology. New York and London, Academic Press, 1966. Vol. 1. 560 pp. (in Eng.).]

3. Fitzpatric Jr.B., Zhou H-X. *Topology Applic.* 1992. Vol. 43. pp. 1–14.

4. Hernandez-Gutierrez R., Hrusak M., van Mill J. Countable dense homogeneity and λ-sets. *Fund. Math*. 2014. Vol. 266. Issue 2. pp. 157–172.

5. Medvedev S.V. About closed subsets of spaces of first category. *Topology Applic.* 2012. Vol. 159. pp. 2187–2192.

6. Engelking R. General Topology. Berlin, Heldermann Verlag, 1989. 529 pp.

Received 5 June 2014

[1] Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: medv@math.susu.ac.ru