УДК 517.977

# ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА С УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

***В.Л. Пасиков***[1]

**Изучаются некоторые игровые ситуации сближения-уклонения для управляемых динамических объектов, эволюция которых описывается собственно линейными интегро-дифференциальными и интегральными системами Вольтера с управляющими воздействиями под знаком интеграла, что наделяет управляемую систему новыми существенными особенностями по сравнению с управляемыми обыкновенными дифференциальными системами. Вводится новое определение позиции игры, для вычисления которой, в каждый момент прицеливания, требуется использовать полную память по управляющим воздействиям. Для решения этих задач используются предлагаемые автором некоторые модификации известных экстремальных конструкций академика Н.Н. Красовского.**

*Ключевые слова: интегро-дифференциальная система; задача наведения; управляющее воздействие; программный максимин; позиция игры.*

В предлагаемой работе исследованы задачи наведения в пространстве $R^n$ объектов, динамика которых описывается собственно линейными интегро-дифференциальными и интегральными системами типа Вольтера с управляющими воздействиями под знаком интеграла. Такие задачи здесь трактуются как динамические игры с полной памятью по управлениям при подходящем выборе пространства позиций. Приведен модельный пример. Работа примыкает к исследованиям [1–5].

**1.** Эволюция динамического объекта описывается собственно линейной интегро-дифференциальной системой Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла

$$\dot{x}(t) = \varphi(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \int_0^t B(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, u \in U \subset R^{r_1}, v \in V \subset R^{r_2}\,,$$

здесь $x$ – $n$-мерный фазовый вектор; $u, v$ – управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, их реализации $u[t]$, v[t] на $[0,\theta], \theta > 0$, измеримые по Лебегу вектор-функции, $U, V$ – компакты; $A(t)$ – матрица $n \times n$ с непрерывными элементами при $0 \le s \le t \le \theta$, $\varphi(t)$ – измеримая по Лебегу с ограниченной вариацией на $[0, \theta]$ функция – вектор внешних воздействий; $f(t,u(t),v(t))$ – $n$-мерная вектор-функция, непрерывная при каждом $t \in [0,\theta]$ по совокупности переменных $u$, $v$, а при фиксированных значениях $u, v$ – функция $f$ измерима по $t$, интегралы понимаются в смысле Лебега.

Согласно [6, с. 9] система (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $x(0) = x_0$.

Это можно показать и непосредственно. По плану доказательства теоремы 27 [7], проинтегрируем (1) по Лебегу по переменной $t$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t [\int_0^\tau K(\tau,s)x(s)ds]d\tau + \int_0^t [\int_0^\tau B(\tau,s)f(s,u(s),v(s))ds]d\tau\,,$$

меняем порядок интегрирования по формуле Дирихле [7, с. 38]

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t [A(s) + \int_0^\tau K(\tau,s)d\tau]x(s)ds + \int_0^t [\int_s^t B(\tau,s)d\tau]f(s,u(s),v(s))ds\,. \tag{2}$$

[1] Пасиков Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра естественно-математических дисциплин, Орский филиал Оренбургского государственного института менеджмента.
E-mail: pasikov_fmf&mail.ru

Обозначим $Q(t,s)=A(s)+\int\limits_s^t K(\tau,s)d\tau$, тогда (2) является линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода с непрерывным ядром $Q(t, s)$, которое согласно [8, с. 132] имеет единственное абсолютно-непрерывное решение, а, следовательно, система (1) имеет единственное абсолютно непрерывное решение, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$. Получим теперь по схеме из [7] формулу состояния системы (1) в момент $t\in[0,\theta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Положим $k(t)=\dot{x}(t)-A(t)x(t)$, тогда решение уравнения $\dot{x}(t)=k(t)+A(t)x(t), x(0)=x_0$ записывается по формуле Коши [1]

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int\limits_0^t X(t,s)k(s)ds\,. \tag{3}$$

Здесь $X(t, s)$ – матрица Коши однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$; подставляем $k(t)$ и $x(t)$ из (3) в (1) и меняем порядок интегрирования:

$$k(t)=\varphi(t)+\int\limits_0^t K(t,\tau)X(\tau,0)d\tau\cdot x_0+\int\limits_0^t[\int\limits_s^t K(t,\tau)X(\tau,s)d\tau]k(s)ds+\int\limits_0^t B(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\,. \tag{4}$$

Теперь обозначим $\psi(t)=\varphi(t)+\Phi(t,0)x_0$, $\psi(0)=\varphi(0)$ и подставим в (4)

$$k(t)=\psi(t)+\int\limits_0^t B(t,s)f(s,u(s),v(s))ds+\int\limits_0^t \Phi(t,s)k(s)ds\,. \tag{5}$$

Равенство (5) относительно $k(t)$ является линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода, пусть $R(t, s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t, s)$ и $\Psi(t,s)=E+\int\limits_s^t R(t,\tau)d\tau$, $E$ – единичная матрица, тогда согласно [8, с. 133] получаем решение (5) в следующей форме

$$k(t)=\Psi(t,0)\varphi(0)+\int\limits_0^t \Psi(t,s)d[\psi(s)+\int\limits_0^s B(s,\tau)f(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau],$$

меняя здесь порядок интегрирования имеем

$$k(t)=\Psi(t,0)\varphi(0)+\int\limits_0^t \Psi(t,s)d\psi(s)+\int\limits_0^s[\Psi(t,s)B(s,s)+\int\limits_s^t \Psi(t,\tau)\frac{\partial B(\tau,s)}{\partial\tau}d\tau]f(s,u(s),v(s))ds\,, \tag{6}$$

обозначим $\chi(t,s)=\Psi(t,s)B(s,s)+\int\limits_s^t\frac{\partial B(\tau,s)}{\partial\tau}d\tau$, подставляем в (6) и для $k(t)$ получаем формулу $k(t)=\Psi(t,0)\varphi(0)+\int\limits_0^t\Psi(t,s)d\psi(s)+\int\limits_0^t\chi(\tau,s)f(s,u(s),v(s))ds$, подставляем $k(t)$ в (3), тогда

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int\limits_0^t X(t,s)\Psi(s,0)ds\cdot\varphi(0)+\int\limits_0^t[\int\limits_s^t X(\tau,s)\Psi(\tau,s)d\tau]d\psi(s)+$$

$$+\int\limits_0^t[\int\limits_s^t X(t,\tau)\chi(\tau,s)d\tau]f(s,u(s),v(s))ds\,. \tag{7}$$

В (7) положим

$$x(\theta,t_0)=X(t_0,0)x_0+\int\limits_0^\theta X(\theta,s)\Psi(s,0)ds\cdot\varphi(0)+\int\limits_0^\theta[\int\limits_s^\theta X(\theta,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau]d\psi(s)+$$

$$+\int\limits_0^{t_0}[\int\limits_s^\theta X(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau]f(s,u(s),v(s))ds\,,$$

тогда состояние системы (1) в момент $t$ согласно (6), (7) определяем формулой

$$x(\theta,t)=x(\theta,t_0)+\int\limits_{t_0}^t[\int\limits_s^\theta X(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau]f(s,u(s),v(s))ds,$$

т.е. полагаем, что после момента $t$ $f(t,u(t),v(t)) \equiv 0$.

**2.** Игра будет рассматриваться на отрезке [0, $\theta$] и плата $\gamma$ будет изображаться равенством

$$\gamma = \| x(\theta) \|, \tag{8}$$

где $\|\bullet\|$ – символ нормы в евклидовом пространстве. Программный максимин [1] записывается в следующей форме, согласно (8):

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0)) = \max_{|l|=1}\{l'x(\theta,t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u\in U} \max_{v\in V}[\int_s^{\theta}(l'X(\theta,\tau))\chi(\tau,s)d\tau]f(s,u(s))ds\}. \tag{9}$$

Отметим, что здесь $l_0'X(\theta,t)$ – решение дифференциальной системы $\dot{\alpha} = -A(t)\alpha$ с краевым условием $l_0$, где $l_0$ – решение задачи (9) [1]; обозначим $l_0'X(\theta,t) = \alpha^e(t)$, штрих означает транспонирование. Далее обозначим $x^e(t) = \int_t^{\theta}\alpha^e(\tau)\chi(\tau,t)d\tau$, тогда (9) переписывается в следующей форме:

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0)) = \max_{\|l\|=1}\{l'x(\theta,t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u\in U} \max_{v\in V} x^e(s) f(s,u(s),v(s))ds.$$

Пусть $t_0$ – начало процесса управления, $t_0 \in [0,\theta)$.

**Определение 2.1.** Позицией игры называется пара $p = \{t, x(\theta,t)\}$ в каждый момент $t$ прицеливания, $p_0 = \{t_0, x(\theta,t_0)\}$ – начальная позиция.

**Определение 2.2.** Допустимой стратегией первого (второго игрока) называется правило, по которому каждой реализовавшейся позиции $p = \{t, x(\theta,t)\}, t \in [t_0,\theta)$ ставится в соответствие ограниченное, замкнутое, полунепрерывное сверху по включению при изменении $t$ и $x$ множество $U(t,x) \subset U(V(t,x) \subset V)$, эти множества также называются стратегиями.

Аналогично [1, с. 83] можно сформулировать три игровые задачи наведения.

**Задача 2.1.** Среди допустимых стратегий $U(t, x)$первого игрока требуется найти оптимальную минимаксную (экстремальную) стратегию $U^e(t,x)$, которая удовлетворяет условию $\|x(\theta)\| \le \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$ при любой допустимой стратегии второго игрока.

**Задача 2.2.** Среди допустимых стратегий $V(t,$ x) второго игрока найти оптимальную максиминную (экстремальную) стратегию $V^e(t, x)$, которое удовлетворяет условию $\|x(\theta)\| \ge \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$ при любой допустимой стратегии первого игрока.

**Задача 2.3.** Среди допустимых стратегий $U(t, x)$ и $V(t, x)$ требуется найти пару оптимальных (экстремальных) стратегий $U^e(t, x)$ и $V^e(t, x)$, которые определяют седловую точку игры $\|x(\theta)\| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$.

Определим экстремальные стратегии обоих игроков.

Для того, чтобы рассматриваемые задачи решались в чистых стратегиях, будем предполагать, что функция $f(t,u(t),v(t))$ удовлетворяет условию седловой точки в «маленькой игре» [2] на $[0,\theta]$ $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V} l'f(t,u,v) = \max\limits_{v\in V}\min\limits_{u\in U} l'f(t,u,v)$, $l$ – произвольный $n$-мерный вектор.

**Определение 2.3.** Пусть $n$-мерный вектор $l_0$ в каждый момент $t \in [t_0,\theta)$, $t_0 \in [0,\theta)$ доставляет наибольшее значение правой части (9), тогда, если позиция $p = \{t, x(\theta,t)\}$ такова, что $\varepsilon_0(t, x(\theta,t)) > 0$, то с этой позиции будем сопоставлять множество всех векторов $U^e(t, x(\theta,t)) \subset U(V^e(t, x(\theta,t)) \subset V)$, которые удовлетворяют условию

$$x^e(t)f(t,u^e(t),v^e(t)) = \min_{u\in U} x^e(t)f(t,u,v^e(t)),\ (x^e(t)f(t,u^e(t),v^e(t)) = \max_{v\in V} x^e(t)f(t,u^e(t),v).$$

В работе рассматривается регулярный случай, т.е. в (9) наибольшее значение достигается на единственном векторе $l_0$.

**Теорема 2.1.** В регулярном случае, при выборе первым игроком своей экстремальной стратегии $V^e = V^e(t, x(\theta,t), t \in [t_0,\theta), t \in [0,\theta)$, ему будет гарантирован результат игры $\|x(\theta)\| \le \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$ при любом допустимом способе управления второго игрока.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t, x(\theta,t)) = l_0' x(\theta,t_0) + \int_{t_0}^{t} \max_{v \in V} x^e(s) f(s, u^e(s), v(s)) ds + \int_{t}^{\theta} x^e(s) f(s, u^e(s), v(s)) ds . \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon(t_0, x(\theta,t_0)) = \|x(\theta)\|$ в случае, когда первый игрок применяет свою экстремальную стратегию, а второй произвольную допустимую; $\varepsilon(\theta, x(\theta,\theta))$ – значение программного максимина (9). Вычисляем в (10) производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \max_{v \in V} x^e(t) f(t, u^e(t), v) - x^e(t) f(t, u^e(t), v(t)) \ge 0 ,$$

и, таким образом, при замене в (10) произвольной стратегии второго игрока на экстремальную, значение $\varepsilon(t, x(\theta,t))$ может только увеличится, отсюда $\varepsilon(t_0, x(\theta,t_0)) \le \varepsilon(t_0, x(\theta,\theta)) = \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$.

Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** В регулярном случае, при выборе вторым игроком своей экстремальной стратегии $V^e = V^e(t, x(\theta,t), t \in [t_0,\theta), t \in [0,\theta)$, ему будет гарантирован результат игры $\| x(\theta) \| \ge \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$ при любом допустимом способе управления первого игрока.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t, x(\theta,t)) = l_0' x(\theta,t_0) + \int_{t_0}^{t} \min_{u \in U} x^e(s) f(s, u(s), v^e(s)) ds + \int_{t}^{\theta} x^e(s) f(s, u(s), v^e(s)) ds . \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0)) = \|x(\theta)\|$ – в случае, когда второй игрок применяет свою стратегию, а первый произвольную допустимую; $\varepsilon(\theta, x(\theta,\theta))$ – значение программного максимина (9). Вычисляем в (11) производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \min_{u \in U} x^e(t) f(t, u, v^e(t)) - x^e(t) f(t, u(t), v^e(t) \le 0 ,$$

и, таким образом, при замене в (11) произвольной допустимой стратегии первого игрока на экстремальную значение $\varepsilon(\theta, x(\theta,t))$ может только уменьшаться, тогда $\varepsilon(t_0, x(\theta,t_0)) \ge \varepsilon(t_0, x(\theta,\theta)) = \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$.

Теорема доказана.

Прямым следствием теорем 2.1 и 2.2 является теорема о седловой точке игры.

**Теорема 2.3.** Если в регулярном случае игры функция $f(t,u,v)$ удовлетворяет условию седловой точки, то экстремальные стратегии игроков $U^e(t, x(\theta,t)$ и $V^e(t, x(\theta,t), t \in [t_0,\theta)$, $t \in [0,\theta)$ доставляют седловую точку игры, причем $\| x(\theta) \| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta,t_0))$.

**Пример.** Пусть движение объекта описывается скалярным уравнением,

$$\dot{z}(t) = e^t + \int_0^t z(s) ds + \int_0^t [u^2(s) + (-v^2(s))] ds, z(0) = 1 .$$

Здесь $\varphi(t) = e^t$, $K(t,s) = 1$, $B(t,s) = 1$, $A(t) = 0$, $|u| \le 1$, $|v| \le 1$, $f(t, u(t), v(t)) = u^2(t) + (-v^2(t))$. Соответствующая однородная дифференциальная система имеет вид $\dot{z} = 0$, в качестве фундаментальной матрицы выбираем $Z(t) = 1$, матрица Коши имеет вид $Z(t,s) = Z(t) Z^{-1}(s) = 1$, $Z(t,0) = 1$.

Функция $f(t,u,v) = [u^2(t) + (-v^2(t))]$ имеет седловую точку $u = 0, v = 0$; $\min_{u \in U} \max_{v \in V} f = \max_{v \in V} \min_{u \in U} f = 0$. Вычисляем матрицу

$$\Phi(t,s) = \int_s^t K(t,\tau) X(\tau,s) d\tau = \int_s^t d\tau = t - s , \ \Phi(t,0) = t ,$$

резольвента этой матрицы определяется формулой $R(t,s) = \mathrm{sh}(t-s)$ [9, с. 22], тогда

$$\psi(t,s)=1+\int_s^t \mathrm{sh}(t-\tau)d\tau=\left(1-\mathrm{ch}(t-\tau)\right)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}=\mathrm{ch}(t-s)\,.$$

Отсюда $\chi(t,s)=\mathrm{ch}(t-s)$, далее записываем $z(t)$,

$$z(t)=1+\int_0^1 \mathrm{ch}\, s ds+\int_0^t[\int_s^t \mathrm{ch}(\tau-s)d\tau]e^s ds+\int_0^t[\int_s^t \mathrm{ch}(\tau-s)d\tau][u^2(s)+(-v^2(s)]ds\,.$$

Вычисляем интегралы $\int_s^t \mathrm{ch}\, s ds+\mathrm{sh}\, s\Big|_0^t=\mathrm{sh}\, t,$

$$\int_s^t \mathrm{ch}(\tau-s)d\tau=\mathrm{sh}(\tau-s)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}=\mathrm{sh}(t-s),\ \int_0^t \mathrm{sh}(t-s)e^s ds=\int_0^t \frac{e^{t-s}-e^{-t+s}}{2}e^s ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t (e^t-e^{-t+2s})ds=\frac{1}{2}\left(e^t s\Big|_{s=0}^{s=t}-\frac{1}{2}e^{-t+2s}\Big|_{s=0}^{s=t}\right)=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}=\frac{1}{2}te^t-\mathrm{sh}\, t\,,$$

тогда

$$z(t)=1+\mathrm{sh}\, t+\frac{1}{2}te^t-\mathrm{sh}\, t+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\left[u^2(s)+(-v^2(s))\right]ds, \qquad (12)$$

или $z(t)=1+\frac{1}{2}te^t+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\left[u^2(s)+(-v^2(s))\right]ds,$ здесь $z(0)=1,$ обозначим

$$z(\theta,t_0)=1+\frac{1}{2}\theta e^0+\int_0^{t_0} \mathrm{sh}(\theta-s)\left[u^2(s)+(-v^2(s))\right]ds,$$

это позиция игры, далее определяем программный максимин:

$$\varepsilon_0(t_0,z(\theta,t_0))=\max_{\|l\|=1}\{l'z(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{\theta}\min_{u\in U}\max_{v\in V} l'\,\mathrm{sh}(\theta-t)[u^2(t)+(-v^2(t))]dt\}\,.$$

Теперь рассматривается система двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=e^t+\int_0^t x(s)ds+\int_0^t[u^2(s)+(-v^2(s))]ds, x(0)=1,\\ \dot{y}(t)=e^t+\int_0^t y(s)ds+\int_0^t[u^2(s)+(-v^2(s))]ds, y(0)=1.\end{cases}$$

Из формулы (12) получаем начальное положение системы – точку (1,1), экстремальный вектор $l_0$ направлен по прямой $y=x$ от начала координат, движение осуществляется от точки (1,1) к началу координат прямой $y=x$, что иллюстрирует доказанные теоремы.

**3.** Пусть теперь динамика объекта описывается интегральным векторным уравнением Вольтерра

$$x(t)=\varphi(t)+\int_0^t A(t,s)x(s)ds+\int_0^t B(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\,. \qquad (13)$$

Здесь $x$ – $n$-мерный вектор; $A(t, s)$ – матрица $n\times n$, $B(t, s)$ – матрица $n\times r$, непрерывно дифференцируемые по первому аргументу и непрерывные по второму при $0\le s\le t\le\theta$; $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывная на $[0, \theta]$ функция; $f(t,u,v)$ – $n$-мерная вектор-функция, непрерывная при каждом $t\in[0,\theta]$ по совокупности переменных $u$, $v$, а при фиксированных $u$, $v$ функция измерима по $t$, интегралы понимаются в смысле Лебега.

Согласно [10] состояние системы (13) в момент $t\in[0,\theta]$ определяется формулой

$$x(t)=\Phi(t,0)\varphi(0)+\int_0^t \Phi(t,s)d\varphi(s)+\int_0^{t_0} X(t,s)f(s,u[s],v[s])ds+\int_{t_0}^t X(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\,. \qquad (14)$$

Здесь $u[t]$, $v[t]$ – реализация допустимых управлений на $[0,t_0]$; $u(t)$, $v(t)$ – пока не определенные управления при $t>t_0$ после момента $t$ полагаем $u\equiv 0$, $v\equiv 0$.

В (14), аналогично [10],

$$\Phi(t,s)=E+\int_s^t R(t,\tau)d\tau,\ \ \Phi(\theta,t)=E+\int_t^\theta \Phi(\theta,s)*A(s,t)ds,\ \ *A(s,t)=A(s,s)+\int_t^s \frac{\partial A(s,\sigma)}{\partial s}d\sigma,$$

$E$ – единичная матрица, умножив теперь $\Phi(\theta,t)$ вектор $l$, получаем, как и в [10], интегральное уравнение

$$z(t)=l'+\int_t^\theta z(s)*A(s,t)ds,\ \ z(t)=l'\Phi(\theta,t),$$

сопряженное с уравнением

$$x(t)=\varphi(t)+\int_0^t A(t,s)x(s)ds,$$

решая которое можно получить $z(t)$, причем $z(\theta)=l'$,

$$X(\theta,t)=\Phi(\theta,t)B(t,t)+\int_t^\theta \Phi(\theta,s)\frac{\partial B(s,t)}{\partial s}ds.$$

Записываем величину

$$x(\theta,t_0)=\Phi(\theta,0)\varphi(0)+\int_0^\theta \Phi(\theta,s)d\varphi(s)+\int_0^{t_0} X(\theta,s)f(s,u[s],v[s])ds.$$

Для системы (13) решаем задачи аналогичные (8)–(10). Позиция игры определяется аналогично , $p=\{t,x(\theta,t)\}$, $p_0=\{t_0,x(\theta,t_0)\}$. В каждый момент прицеливания позиция является начальной.

Программный максимин для начальной позиции определяется равенством

$$\varepsilon_0(t_0,x(\theta,t_0))=\max_{\|l\|=1}[l'x(\theta,t_0)+\int_{t_0}^\theta \min_{u\in U}\max_{v\in V}\{l'X(\theta,s)f(s,u(s),v(s))ds\}. \tag{15}$$

Обозначим $l_0'X(\theta,t)=x^e(t)$, где $l_0$ – единственное решение задачи (15) в каждый момент $t\in[t_0,\theta)$, $t_0\in[0,\theta)$.

**Определение 3.1.** Пусть $n$-мерный вектор $l_0$ в каждый момент $t\in[t_0,\theta)$, $t_0\in[0,\theta)$ доставляет наибольшее значение правой части (15), тогда, если позиция игры $p_0\{t,x(\theta,t_0)\}$ такова, что $\varepsilon_0(t_0,x(\theta,t_0))>0$, то этой позиции поставим в соответствие множество $U^e(t_0,x(\theta,t_0))$, $(V^e(t_0,x(\theta,t_0)))$ всех векторов $u^e\in U(v^e\in V)$, которые удовлетворяют условию

$$\max_{v\in V}x^e(t_0)f(t_0,u^e,v)=\min_{u\in U}\max_{v\in V}x^e(t_0)f(t_0,u,v),\ (\min_{u\in U}x^e(t_0)f(t_0,u,v^e)=\max_{v\in V}\min_{u\in U}x^e(t_0)f(t_0,u,v)).$$

Множества $U^e(V^e)$ называются экстремальными стратегиями первого (второго) игроков аналогично [1, 2] можно показать, что стратегии $U^e(V^e)$ допустимы.

По плану доказательств аналогичных теорем из [1, 2], а также теорем настоящей работы можно проверить справедливость следующих утверждений.

**Теорема 3.1.** В регулярном случае при выборе первым (вторым) игроком стратегии $U^e(V^e)$ ему будет гарантирован результат игры $\|x(\theta)\|\le\varepsilon_0(t_0,x(\theta,t_0))\left(\|x(\theta)\|\ge\varepsilon_0(t_0,x(\theta,t_0))\right)$ $U^e(V^e)$ при любой допустимой стратегии управления второго(первого) игрока.

**Теорема 3.2.** В регулярном случае, при выборе обоими игроками своих экстремальных стратегий $U^e$ и $V^e$ или будет гарантирован результат игр $\|x(\theta)\|=\varepsilon_0(t_0,x(\theta,t_0))$.

**Литература**

1. Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.

2. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

3. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.

4. Осипов, Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.

5. Субботин, А.И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью / А.И. Субботин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 206, № 3 – С. 211–213.

6. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – С. 224.

7. Ландо, Ю.К. Элементы математической теории управления движением: учебное пособие / Ю.К. Ландо. – М.: Просвещение, 1984. – 88 с.

8. Цалюк, З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1977. – Т. 15. – С. 199–266.

9. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1976. – 216 с.

10. Пасиков, В.Л. Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтера / В.Л. Пасиков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. XXII, № 5. – С. 907–909.


***Поступила в редакцию 27 марта 2014 г.***

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series “Mathematics. Mechanics. Physics”***
***2014, vol. 6, no. 3, pp. 42–49***

## GUIDANCE GAME PROBLEMS FOR LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS OF VOLTERRA TYPE WITH CONTROL ACTION UNDER THE INTEGRAL SIGN

***V.L. Pasikov***[1]

The paper is focused on pursuit-evasion game situations for controlled dynamic objects, the development of which is described by linear integro-differential and integral systems of Volterra type with control action under the integral sign. As a result, the control system has new essential features that are not obtained by traditional controlled differential systems. The author formulates a new definition of game position, the calculation of which requires the total memory of control action in a moment of aiming. Well-known extreme constructions by an academician N.N. Krasovsky modified by the author are used to solve these problems.

*Keywords: integro-differential system; guidance problem; control action; program maximin; game position.*


**References**

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Motion game problems). Moscow, Nauka Publ., 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Position differential games). Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (in Russ.).

3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiia garantii v zadachakh upravleniia* (Guarantee optimization in control problems). Moscow, Nauka, 1981. 287 p. (in Russ.).

4. Osipov Yu.S. *DAN SSSR.* 1971. Vol. 196, no. 4. pp. 779–782. (in Russ.).

5. Subbotin A.I. *DAN SSSR.* 1972. Vol. 206, no. 3. pp. 211–213. (in Russ.).


[1] Pasikov Vladimir Leonidovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Natural and Mathematical Disciplines, Orsk branch of the Orenburg State Institute of Management.
E-mail: pasikov_fmf@mail.ru

6. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential equations with diffuse right member). Moscow, Nauka Publ., 1985. 224 p. (in Russ.).

7. Lando Yu.K. *Elementy matematicheskoi teorii upravleniia dvizheniem: uchebnoe posobie* (Elements of a mathematical motion control theory: study guide). Moscow, Prosveshchenie Publ., 1984. 88 p. (in Russ.).

8. Tsaliuk Z.B. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskii analiz.* Moscow, VINITI Publ., 1977. Vol. 15. pp. 199–266.

9. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Integral'nye uravneniya. Zadachi i uprazhneniya* (Integral equations. Tasks and exercises). Moscow, Nauka Publ., 1976. 216 p. (in Russ.).

10. Pasikov V.L. *Differentsial'nye uravneniia.* 1986. Vol. 22. no. 5. pp. 907–909. (in Russ.).

***Received 27 March 2014***