УДК 515.162.3

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕКОТОРЫХ КРУЖЕВНЫХ УЗЛОВ[1]

В.В. Таркаев[2], Е.А. Фоминых[3]

Находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

Ключевые слова: кружевной узел; сложность.

1. Введение

Пусть M – компактное трехмерное многообразие с непустым краем. Напомним [1], что подполиэдр $P(M)$ называется спайном многообразия M, если многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $(M \times (0,1])$. Спайн P называется почти простым, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4, называются истинными вершинами спайна P. Сложность $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Табулирование трехмерных многообразий заданной сложности и получение точных значений сложности для больших классов многообразий дают естественный подход к проблеме их классификации. Задача вычисления сложности многообразий является весьма трудной. К настоящему времени точные значения сложности известны только для конечного числа табулированных многообразий [2, 3], для нескольких бесконечных семейств многообразий с краем [4–7] и замкнутых многообразий [8, 9]. Оценки сложности дополнительных пространств торических узлов получены в [10].

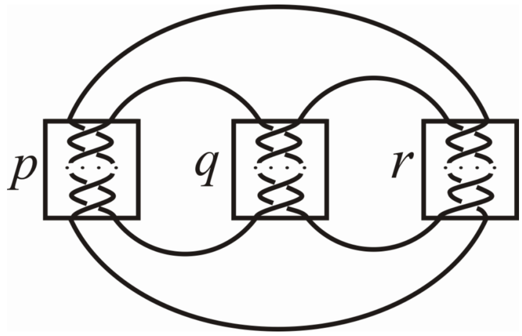
В работе находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

2. Основной результат

Кружевное зацепление (*pretzel link*) с тремя нитями $K(p,q,r)$ (см. рисунок), лежащее в трехмерной сфере, определяется тройкой (p,q,r) целых ненулевых чисел. Зацепление $K(p,q,r)$ не изменится при любой перестановке чисел p,q,r местами. Поэтому можно считать, что $p \le q \le r$. Хорошо известно, что зацепление $K(p,q,r)$ является узлом тогда и только тогда, когда среди чисел p,q,r как минимум два нечетны.

Следующая теорема устанавливает точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями вида $K(1,q,r)$. Здесь под дополнительным пространством узла понимается компактное подмногообразие трехмерной сферы S^3, получающееся вырезанием из S^3 открытой трубчатой окрестности узла. Для каждой пары натуральных чисел q,r, где $q \le r$, определим целое число $f(q,r)$ следующим образом:

$$f(q,r)=\begin{cases}0, & \text{если } q=r=1,\\ 2, & \text{если } q=1, r=2,\\ [r/2]+2, & \text{если } q=1, r>2,\\ [(q+r)/2]+3, & \text{если } q>1, r\ge q.\end{cases}$$



Кружевное зацепление с тремя нитями

---

[1] Исследования были поддержаны грантом РФФИ 14-01-00441, грантом НШ-1015.2014.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Т-1-1003/2 ОМН РАН

[2] Таркаев Владимир Викторович – научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.
E-mail: trk@csu.ru

[3] Фоминых Евгений Анатольевич – старший научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.
E-mail: fominykh@csu.ru

Теорема. Пусть $1 \le q \le r \le 15$ и зацепление $K(1,q,r)$ является узлом. Тогда сложность $c(q,r)$ дополнительного пространства узла $K(1,q,r)$ удовлетворяет условию $c(q,r) \le f(q,r)$. Более того, если $f(q,r) \le 8$, то $c(q,r) = f(q,r)$.

3. Доказательство теоремы

Опираясь на метод, описанный в доказательстве предложения 2.1.11 из [1], строим почти специальный спайн $P(1,q,r)$ дополнительного пространства узла $K(1,q,r)$. При помощи преобразований из [1, параграф 7.2] упрощаем спайн $P(1,q,r)$ до тех пор пока это возможно. Число истинных вершин полученного почти простого спайна $Q(1,q,r)$ и дает нам искомую верхнюю оценку сложности $f(q,r)$ дополнительного пространства узла.

Поскольку узел $K(1,1,1)$ является трилистником, то сложность его дополнительного пространства равна 0 (см. [10]). Если спайн $Q(1,q,r)$ имеет не более 8 истинных вершин, то дополнительное пространство узла $K(1,q,r)$ содержится в списке многообразий из [11, 12], сложность которых известна.

Литература

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds / S. Matveev // Algorithms and Computation in Mathematics: сб. науч. тр. – Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. – Vol. 9. – 492 p.

2. Матвеев, С.В. Табулирование трехмерных многообразий / С.В. Матвеев // Успехи матем. наук. – 2005. – Т. 60, № 4. – С. 97–122.

3. Frigerio, R. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Experimental Mathematics. – 2004. – Vol. 13, No. 2. – P. 171–184.

4. Anisov, S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds / S. Anisov // Moscow Math. J. – 2005. – Vol. 5, No. 2. – P. 305–310.

5. Frigerio, R. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Pacific J. Math. – 2003. – Vol. 210, No. 2. – P. 283–297.

6. Веснин, А.Ю. Точные значения сложности многообразий Паолюци–Циммермана / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Докл. Акад. наук. – 2011. – Т. 439, № 6. – С. 727–729.

7. Веснин, А.Ю. О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 781–793.

8. Jaco, W. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, No. 1. – P. 157–180.

9. Jaco, W. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // Algebraic & Geometric Topology. – 2011. – Vol. 11, No. 3. – P. 1257–1265.

10. Fominykh, E. Upper bounds for the complexity of torus knot complements / E. Fominykh, B. Wiest // Journal of Knot Theory and its Ramifications. – 2013. – Vol. 22, No. 10. (article number 1350053).

11. Callahan, P. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement / P. Callahan, M. Hildebrand, J. Weeks // Math. Comp. – 1999. – Vol. 68, No. 225. – P. 321–332.

12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. – URL: http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/, (дата обращения: 11.03.2014).

Поступила в редакцию 6 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 50–52

UPPER BOUNDS FOR THE COMPLEXITY OF SOME PRETZEL KNOTS COMPLEMENTS

V.V. Tarkaev[1], *E.A. Fominykh*[2]

Exact values and upper bounds for the complexity of some 3-strand pretzel knot complements are established.

Keywords: pretzel knot; complexity.

References

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. *Algorithms and Computation in Mathematics.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. Vol. 9. 492 p.

2. Matveev, S.V. *Russian Mathematical Surveys*. 2005. Vol. 60, no. 4. pp. 673–698. DOI: 10.4213/rm1446

3. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary. *Experimental Mathematics.* 2004. Vol. 13, No. 2. pp. 171–184.

4. Anisov S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds. *Moscow Math. J.* 2005. Vol. 5, No. 2. pp. 305–310.

5. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds. *Pacific J. Math.* 2003. Vol. 210, No. 2. pp. 283–297.

6. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Doklady Akademii nauk.* 2011. Vol. 439, no. 6. pp. 727–729. (in Russ.).

7. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal.* 2012. Vol. 53, no. 4. pp. 781–793. (in Russ.).

8. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces. *J. Topology.* 2009. Vol. 2, no. 1. pp. 157–180.

9. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds. *Algebraic & Geometric Topology.* 2011. Vol. 11, no. 3. pp. 1257–1265.

10. Fominykh E., Wiest B. Upper bounds for the complexity of torus knot complements. *Journal of Knot Theory and its Ramifications.* 2013. Vol. 22, no. 10. (article number 1350053). DOI: 10.1142/S0218216513500533

11. Callahan P., Hildebrand M., Weeks J. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement. *Math. Comp.* 1999. Vol. 68, no. 225. pp. 321–332.

12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. URL: http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/ (date: 11.03.2014).

Received 6 June 2014

[1] Tarkaev Vladimir Viktorovich is Research Fellow, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Brunch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.
E-mail: trk@csu.ru

[2] Fominykh Evgeny Anatol'evich is Senior Staff Scientist, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Brunch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.
E-mail: fominykh@csu.ru