УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

***В.И. Ухоботов*[1]*, И.В. Изместьев*[2]**

Построены оптимальные управления игроков в линейной дифференциальной игре с импульсным управлением.

Ключевые слова: дифференциальная игра; импульсное управление.

1. Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, в которых допускается мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью, сводятся к задачам с импульсным управлением [1, с. 85–87]. Наличие импульсных управлений может приводить к мгновенному изменению фазового состояния системы, поэтому при исследовании дифференциальных игр с импульсными управлениями возникают специфические особенности [2–6].

В данной статье рассмотрена игровая задача импульсной встречи, которая является модификацией игры «изотропные ракеты» [7, с. 139]. Преследователь управляет движением точки переменного состава, выбирая в каждый момент времени реактивную силу. В отдельные моменты времени конечное количество реактивной массы может отделяться с постоянной по величине скоростью. Убегающий движется с ограниченной по величине скоростью. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени сделать расстояние между собой и вторым игроком не больше одного заданного числа, но не меньше другого заданного числа. Это условие выделяет в фазовом пространстве игры терминальное множество, которое не является выпуклым. Цель второго игрока противоположна.

2. Постановка задачи

Первый игрок управляет движением точки переменного состава x в пространстве $\mathbb{R}^n$, выбирая в каждый момент времени реактивную силу [1]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad dx_2 = dU,$$

где U – управление первого игрока, которое является функцией с ограниченным изменением. Расход ресурсов, затраченных на формирование этого управления на произвольном отрезке $[t,\tau]$, задается формулой

$$\int_t^\tau \| dU(r) \| = \sup \sum \| U(r_{l+1}) - U(r_l) \|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям r_l отрезка $[t,\tau]$. В начальный момент времени t_0 зафиксирован запас ресурсов $\mu(t_0) \ge 0$, который не может быть перерасходован в процессе управления.

Второй игрок управляет движением точки, выбирая в каждый момент времени ее скорость, которая ограничена по величине заданным числом $b > 0$

$$\dot{y} = bv, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \le 1.$$

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени p осуществить неравенство $\varepsilon_1 \le \|x(p) - y(p)\| \le \varepsilon_2$. Здесь $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ – заданные числа. Цель второго игрока противоположна.

3. Формализация задачи

В переменных $z(t) = y(t) - x_1(t) - (p-t)x_2(t)$ рассматриваемая задача примет вид

$$dz = -(p-t)dU + bv, \qquad \varepsilon_1 \le \|z(p)\| \le \varepsilon_2. \tag{1}$$

[1] Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: ukh@csu.ru
[2] Изместьев Игорь Вячеславович – аспирант кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: j748e8@gmail.com

Условие не перерасхода запаса ресурсов запишем в виде неравенства $\mu(t)=\mu(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\| dU(r)\| \geq 0$.

Управлением второго игрока является произвольная функция $v:(-\infty,p]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению $\|v(t,z)\|\leq 1$.

Управлением первого игрока является функция вида $U(t,z)=\varphi(t)u(t,z)$, где $u:[t_0,p]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – произвольная функция, удовлетворяющая равенству $\| u(t,z)\| =1$. При выборе функции $\varphi(t)$ в отдельные моменты времени осуществляется её коррекция, которая проводится следующим образом. Первый игрок в начальный момент времени выбирает конечный набор моментов коррекций $t_0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_q<p$. В момент времени τ_i, зная реализовавшееся состояние $\| z(\tau_i)\|$, $\mu(\tau_i)$, он выбирает абсолютно-непрерывную, неубывающую и неотрицательную функцию $\varphi:[\tau_i,\tau_{i+1}]\to\mathbb{R}$ и число $\Delta_i\geq 0$ такие, что

$$\mu(t)=\mu(\tau_i)-\Delta_i-\int\limits_{\tau_i}^{t}\dot{\varphi}(r)dr\geq 0,\quad \tau_i<t\leq\tau_{i+1}. \tag{2}$$

Движение, порожденное выбранными управлениями на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, определим с помощью ломаных. Для этого зафиксируем разбиение:

$$\omega:\tau_i=t^{(0)}<t^{(1)}<...<t^{(k+1)}=\tau_{i+1}$$

с диаметром разбиения $d(\omega)=\max\limits_{0\leq j\leq k}\left(t^{(j+1)}-t^{(j)}\right)$ и построим ломаную [6, с. 75]

$$z_\omega(t)=z_\omega(\tau_i)-(\Delta_i+\int\limits_{\tau_i}^{t}(p-r)\dot{\varphi}(r)dr)u(\tau_i,z_\omega(\tau_i))+b(t-\tau_i)v(\tau_i,z_\omega(\tau_i)),\text{ при }\tau_i<t\leq t^{(1)}$$

и

$$z_\omega(t)=z_\omega(t^{(j)})-\int\limits_{t^{(j)}}^{t}(p-r)\dot{\varphi}(r)dr\,u(t^{(j)},z_\omega(t^{(j)}))+b(t-t^{(j)})v(t^{(j)},z_\omega(t^{(j)})),\text{ при }t^{(j)}\leq t\leq t^{(j+1)}. \tag{3}$$

Можно показать, что все ломаные $z_\omega(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [8, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения $d(\omega_k)\to 0$.

4. Формулировка результатов

Определим для $t<p$, $\mu\geq 0$ следующие функции:

$$\mathrm{g}(t,\mu)=\begin{cases}\varepsilon_1-(\mu-b)(p-t),\text{ при }\mu<\xi(t),t_1\leq t<p,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-(p-t)\left(\mu-b\ln\dfrac{p-t}{p-t_1}\right),\text{ при }\mu<\xi(t),t<t_1,\\ 0,\text{ при }\mu\geq\xi(t),\forall t,\end{cases},$$

$$\mathrm{G}(t,\mu)=\begin{cases}\varepsilon_2+(\mu-b)(p-t),\text{ при }t_1\leq t<p,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+(p-t)\left(\mu-b\ln\dfrac{p-t}{p-t_1}\right),\text{ при }t_2\leq t<t_1,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+(p-t)(\mu-c)-b(t_2-t),\text{ при }t_3\leq t<t_2,\\ (p-t)\left(\mu-c-b\ln\dfrac{p-t}{p-t_3}\right),\text{ при }t<t_3,\end{cases},$$

$$\xi(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1}{p-t}+b, \text{ при } t_1\le t<p,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2(p-t)}+b\ln\dfrac{p-t}{p-t_1}, \text{ при } t_c\le t<t_1,\\ c, \text{ при } t<t_c,\end{cases}\quad,\qquad M(t)=\begin{cases}0, \text{ при } t_1\le t<p,\\ b\ln\dfrac{p-t}{p-t_1}, \text{ при } t_2\le t<t_1,\\ c, \text{ при } t_3\le t<t_2,\\ c+b\ln\dfrac{p-t}{p-t_3}, \text{ при } t<t_3.\end{cases}.$$

Здесь $t_1=p-\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2b}, t_c=p-\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2b}, t_2=p-\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2b}e, t_3=p-\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2b}(e+1), c=b\left(1+\ln\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\right).$

Обозначим $\mathbb{R}_+=\{s\in\mathbb{R}:s\ge 0\}$. Покажем, что из любого начального состояния $(z(t_0),\mu(t_0))$ первый игрок сможет осуществить неравенства (1) тогда и только тогда, когда $(z(t_0),\mu(t_0))\in W(t)$, где

$$W(t)=\{(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ : g(t,\mu)\le\|z\|\le G(t,\mu),\ \mu\ge M(t)\}. \tag{4}$$

5. Задача преследования

Обозначим

$$w(z)=\frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\|>0 \text{ и } w(z)=\forall w:\|w\|=1 \text{ при } \|z\|=0. \tag{5}$$

Теорема 5.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1\le t_0<p$, $\left(z(t_0),\mu(t_0)\right)\in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение неравенств (1) при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z_0\|>\varepsilon_2-b(p-t_0)$. Первый игрок берет $u(t,z)=w(z)$, $\tau_0=t_0$ и $\phi(t)=0$ при $t_0\le t\le p$; $\Delta_0=\dfrac{\|z_0\|-\varepsilon_2}{p-t_0}+b.$

Тогда, согласно (4), $\mu(p)=\mu(t_0)-\Delta_0\ge 0$, т.е. верно условие (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1, можно показать, что для любой ломаной (3) выполнено неравенство

$$\varepsilon_1\le\left\|z_\omega(p)\right\|\le\varepsilon_2. \tag{6}$$

Случай 2. Пусть $\varepsilon_1+b(p-t_0)\le\|z_0\|\le\varepsilon_2-b(p-t_0)$. Первый игрок берет $\tau_0=t_0$, $\Delta_0=0$ и $\phi(t)=0$ при $t_0\le t\le p$. Тогда $\mu(p)=\mu(t_0)\ge 0$ и для любой ломаной (3) выполнено неравенство (6).

Случай 3. Пусть $\|z_0\|<\varepsilon_1+b(p-t_0)$. Первый игрок берет $u(t,z)=-w(z)$, $\tau_0=t_0$ и $\phi(t)=0$ при $t_0\le t\le p$; $\Delta_0=\dfrac{\varepsilon_1-\|z_0\|}{p-t_0}+b.$

Как и в случае 1 число Δ_0 удовлетворяет условию (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1, можно показать, что это управление обеспечивает неравенства (6).

Из (6) следует, что для любого движения $z(t)$ выполнено условие (1).

Лемма 5.1. Пусть заданы моменты времени $t_*<t^*<p$ такие, что $\|z(t_*)\|=\alpha\ge 0$ и $\mu(t_*)\ge b\ln\dfrac{p-t_*}{p-t^*}+\gamma$, где $\gamma\ge 0$, тогда на отрезке $[t_*,t^*]$ существует управление первого игрока, которое обеспечивает выполнение условий $\|z(t^*)\|=\alpha,\ \mu(t^*)\ge\gamma$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\alpha=0$. Доказательство следует из [6, с. 82–84].

Случай 2. Пусть $\alpha>0$. Тогда первый игрок выбирает управление

$$u(t,z)=\begin{cases}w(z), \text{ при } \|z\|\ge\alpha,\\ -w(z), \text{ при } \|z\|<\alpha,\end{cases}\qquad \varphi(t)=b\ln\frac{p-t_*}{p-t}=b\int_{t_*}^{t}\frac{1}{p-r}dr. \tag{7}$$

Далее, возьмем разбиение $\Omega: t_* = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(m+1)} = t^*$ такое, что диаметр разбиения $d(\Omega) < \dfrac{\alpha}{2b}$, и покажем, что для каждой ломаной (3) выполнены неравенства

$$\alpha - 2b\, d(\Omega) \le \| z_\Omega(t) \| \le \alpha + 2b\, d(\Omega) \text{ при } t_* < t \le t^*.$$

Из (5) и (7) следует, что для ломаной (3) выполнены соотношения

$$z_\Omega(t^{(1)}) = \alpha \frac{z(t_0)}{\| z(t_0) \|} - b(t^{(1)} - t^{(0)})(w(z(t_0)) - v(t_0, z(t_0))),$$

$$\alpha - 2b(t^{(1)} - t^{(0)}) \le \| z_\Omega(t^{(1)}) \| \le \alpha \le \alpha + 2b(t^{(1)} - t^{(0)}).$$

Поэтому, при $j = 1$ верны неравенства

$$\alpha - 2b \max_{1 \le k \le j}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) \le \| z_\Omega(t^{(j)}) \| \le \alpha + 2b \max_{1 \le k \le j}(t^{(k)} - t^{(k-1)}). \tag{8}$$

Предположим, что они выполнены для некоторого $j \le l$. Покажем, что эти неравенства выполнены и для $j+1$. Обозначим

$$\delta = 2b \max_{1 \le k \le j}(t^{(k)} - t^{(k-1)}).$$

Тогда (8) примет вид

$$\alpha - \delta \le \| z(t_\Omega{}^{(j)}) \| \le \alpha + \delta .$$

Пусть $\| z_\Omega(t^{(j)}) \| \ge \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\} \le \| z_\Omega(t^{(j+1)}) \| \le \alpha + \delta.$$

Пусть $\| z_\Omega(t^{(j)}) \| < \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \delta \le \| z_\Omega(t^{(j+1)}) \| \le \alpha + \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\}.$$

Выполнен шаг индукции, следовательно, система неравенств (8) верна.

Заметим, что $\max\limits_{0 \le k \le j}(t^{(k+1)} - t^{(k)}) \le d(\Omega)$ при $j = \overline{0, m}$. Следовательно, при $d(\Omega) \to 0$ получим, что для любого движения $z(t)$ при $t_* < t \le t^*$ будет выполнено равенство $\| z(t) \| = \alpha$.

Неравенство $\mu(t^*) \ge \gamma$ следует из определения функции $\varphi(t)$ в (7).

Теорема 5.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \le t_0 < t_1$, $\big(z(t_0), \mu(t_0)\big) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $\big(z(t_1), \mu(t_1)\big) \in W(t_1)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\| z(t_0) \| \ge \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Первый игрок берет $u(t,z) = w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\Delta_0 = \dfrac{2\| z_0 \| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(p - t_0)}$.

Случай 2. Пусть $\| z(t_0) \| < \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Случай 2.1. Пусть $t_c \le t_0$. Первый игрок берет $u(t,z) = -w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и

$$\Delta_0 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2\| z(t_0) \|}{2(p - t_0)}.$$

Для случаев 1 и 2.1, согласно (3)–(5), имеем

$$\| z(t_0 + 0) \| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},\ \mu(t_0 + 0) = \mu_0 - \Delta_0 \ge \int_{t_0}^{t_1} \frac{b}{p - r} dr .$$

Из леммы 5.1 получим, что для состояния $t_0, z(t_0+0), \mu(t_0+0)$ существует управление первого игрока такое, что оно обеспечивает выполнение равенства $\|z(t_1)\|=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ при любом управлении второго игрока.

Случай 2.2. Пусть $t_0<t_c$. Первый игрок берет $u(t,z)=\forall w:\|w\|=1$, $\tau_0=t_0$ и $\Delta_0=0$. Если $\|z(t)\|<\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ при всех $t\in[t_0,t_c)$, то, принимая t_c за начальный момент времени, переходим к случаю 2.1.

Если существует $\tilde{t}\in[t_0,t_1)$ такой, что $\|z(\tilde{t})\|\ge\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ и $\|z(t)\|<\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ при всех $t\in[t_0,\tilde{t})$, то, принимая $\tilde{t}$ за начальный момент времени, переходим к случаю 1.

В заключение заметим, что выполнена система неравенств

$$g(t_1,\mu(t_1))=\max\left\{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\mu(t_1)(p-t_1),0\right\}\le\|z(t_1)\|=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\le\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\mu(t_1)(p-t_1)=G(t_1,\mu(t_1)).$$

Отсюда имеем заявленное включение $\left(z(t_1),\mu(t_1)\right)\in W(t_1)$.

Теорема 5.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3\le t_0<t_2$, $\left(z(t_0),\mu(t_0)\right)\in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $\left(z(t_2),\mu(t_2)\right)\in W(t_2)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.1 из работы [6, с. 76] при $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$.

Теорема 5.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0<t_3$, $\left(z(t_0),\mu(t_0)\right)\in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $\left(z(t_3),\mu(t_3)\right)\in W(t_3)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.5 из работы [6, с. 82].

6. Задача убегания

Лемма 6.1. Управление второго игрока $v(t,z)=w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ и для любых моментов времени $t_*<t^*\le p$ выполнение неравенства

$$\|z(t^*)\|\ge\|z(t_*)\|-(\mu(t_*)-\mu(t^*))(p-t_*)+b(t^*-t_*). \tag{9}$$

Доказательство следует из [6, с. 78–79].

Лемма 6.2. Пусть $t_*<t^*\le p$ и $\|z(t_*)\|<g(t_*,\mu(t_*))$, тогда управление второго игрока $v(t,z)=-w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ выполнение неравенства $\|z(t^*)\|<g(t^*,\mu(t^*))$.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $t_*,t^*\in[t_1,p]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[t_*,t^*]$ ω с моментами коррекции первого игрока τ_i. Покажем, что, если в некоторый момент времени τ_l выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l)\|<g(\tau_l,\mu(\tau_l)), \tag{10}$$

то при любом $0\le\Delta\le\mu(\tau_l)$ выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l+0)\|<g(\tau_l+0,\mu(\tau_l)-\Delta). \tag{11}$$

Из уравнения ломаной (3) следует неравенство

$$\|z(\tau_l+0)\|<\|z(\tau_l)\|+\Delta(p-\tau_l). \tag{12}$$

Из (10) и (12), учитывая (4), имеем неравенство

$$\|z(\tau_l+0)\|<\varepsilon_1-\mu(\tau_l)(p-\tau_l)+b(p-\tau_l)+\Delta(p-\tau_l)=\varepsilon_1-(\mu(\tau_l)-\Delta)(p-\tau_l)=g(\tau_l+0,\mu(\tau_l)-\Delta).$$

Затем на $(\tau_l, \tau_{l+1}]$ зафиксируем произвольную непрерывную функцию $\mu(t)$, которая удовлетворяет условию (2) на данном множестве. Далее, доказательство следует из [9, с. 115].

Случай 2. Пусть $t_*, t^* \in (t_c, t_1]$. Покажем, что из (10) следует (11). В самом деле, из (10) и (12), учитывая (4), получим неравенство

$$\| z(\tau_l + 0) \| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - (p - \tau_l)\left(\mu - b \ln \frac{p - \tau_l}{p - t_1}\right) + \Delta(p - \tau_l) = g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta).$$

Дальнейшее доказательство проводится по аналогии со случаем 1.

Теорема 6.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1 \le t_0 < p$, $\big(z(t_0), \mu(t_0)\big) \notin W(t_0)$.

1) Если

$$\| z(t_0) \| > G\big(t_0, \mu(t_0)\big) = \varepsilon_2 + (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \qquad (13)$$

тогда управление второго игрока $v(t,z) = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\| z(p) \| > \varepsilon_2$ при любом управлении первого игрока.

2) Если

$$\| z(t_0) \| < g\big(t_0, \mu(t_0)\big) = \varepsilon_1 - (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \qquad (14)$$

тогда управление второго игрока $v(t,z) = -w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\| z(p) \| < \varepsilon_1$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. 1) Из (9) при $t_* = t_0$, $t^* = p$ следует, что

$$\| z(p) \| \ge \| z(t_0) \| - (\mu(t_0) - \mu(p))(p - t_0) + b(p - t_0).$$

Из этого неравенства и неравенства (13) получим $\| z(p) \| > \varepsilon_2 + \mu(p)(p - t_0) \ge \varepsilon_2$.

2) Из леммы 6.2 при $t_* = t_0$, $t^* = p$ и (14) следует, что $\| z(p) \| < \varepsilon_1$.

Теорема 6.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \le t_0 < t_1$, $\big(z(t_0), \mu(t_0)\big) \notin W(t_0)$, тогда существует управление второго игрока, обеспечивающее выполнение включения $\big(z(t_1), \mu(t_1)\big) \notin W(t_1)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\| z(t_0) \| > G(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t,z) = w(z)$. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3 из работы [6, с. 80].

Случай 2. Пусть $\| z(t_0) \| < g(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t,z) = -w(z)$. Отсюда и из леммы 6.2 при $t_* = t_0$, $t^* = t_1$ следует, что $\| z(t_1) \| < g(t_1, \mu(t_1))$.

Теорема 6.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3 \le t_0 < t_2$, $\big(z(t_0), \mu(t_0)\big) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t,z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $\big(z(t_2), \mu(t_2)\big) \notin W(t_2)$ при любом управлении первого игрока. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.2 из работы [6, стр. 79] при $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Теорема 6.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0 < t_3$, $\big(z(t_0), \mu(t_0)\big) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t,z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $\big(z(t_3), \mu(t_3)\big) \notin W(t_3)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3. из работы [6, с. 80].

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.

2. Красовский, Н.Н. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы / Н.Н. Красовский // Прикл. матем. и мех. – 1968. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 177–184.

3. Пожарицкий, Г.К. Импульсное преследование в случае однотипных объектов второго порядка / Г.К. Пожарицкий // Прикл. матем. и мех. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 897–907.

4. Субботина, Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков / Н.Н. Субботина, А.Н. Субботин // Прикл. матем. и мех. – 1975. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 397–406.

5. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей / Н.Н. Петров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 2. – С. 38–44.

6. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – 124 с.

7. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.

8. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

9. Ухоботов, В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца/ В.И. Ухоботов // Некоторые задачи динамики и управления: сб. научных трудов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – С. 108–123.

Поступила в редакцию 25 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2014, vol. 6, no. 3, pp. 53–59

ON A GAME OF IMPULSE MEETING WITH A TERMINAL SET IN THE FORM OF A RING

V.I. Ukhobotov[1], I.V. Izmestyev[2]

Optimum controls for players in a linear differential game with pulse control have been found.

Keywords: differential game; pulse control.

References

1. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow, Nauka Publ., 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1968. Vol. 32. Issue 2. pp. 177–184. (in Russ.).

3. Pozharitskiy G.K. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1966. Vol. 30. Issue 5. pp. 897–907. (in Russ.).

4. Subbotina N.N., Subbotin A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1975. Vol. 39. Issue 3. pp. 397–406. (in Russ.).

5. Petrov, N.N. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2009. no. 2. pp. 38–44. (in Russ.).

6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. 124 p. (in Russ.).

7. Ajzeks R. *Differencial'nye igry* (Differential Games). Moscow, Mir, 1967. 479 p. (in Russ.). [Isaacs R. Differential Games. John Wiley and Sons, 1965.]

8. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p. (in Russ.).

9. Ukhobotov V.I. Odnotipnaya differentsial'naya igra s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa (One-type differential game with a terminal set in the form a ring). *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sb. nauchnykh trudov.* (Some dynamic and control problems: collection of research papers) Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. pp. 108–123.

Received 25 June 2014

[1] Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: ukh@csu.ru
[2] Izmestyev Igor Vyacheslavovich is Post-graduate Student, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: j748e8@gmail.com