УДК 539.319

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ СТРУН С ПЕРЕМЕННЫМИ НАТЯЖЕНИЯМИ

М.А. Осипенко[1]

Предложена модель струны с переменным непрерывным натяжением на основе предельного перехода для струны из многих звеньев с различными постоянными натяжениями. Рассмотрена задача об одностороннем контакте под заданной нагрузкой двух таких струн различной длины с закрепленным левым концом и свободным правым. Сформулирована строгая постановка задачи, доказана единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Показано, что соприкосновение струн может происходить как в одной точке, так и на отрезке.

Ключевые слова: струна; переменное натяжение; контактная задача; аналитическое решение.

Введение

Струна является одним из классических объектов математической физики [1]. С точки зрения механики, струна – простейший из тонкостенных объектов, к которым относятся также стержни, балки, пластины и оболочки. Для таких объектов, как и для «трехмерных» тел, могут быть рассмотрены контактные задачи [2–7]; для струн такие задачи не являются еще в достаточной мере исследованными. В [6] построено аналитическое решение контактной задачи для системы произвольного числа струн, аналогичной многолистовой рессоре как системе балок. В [7] построено в частном случае аналитическое решение задачи о контакте струны и твердого тела.

В настоящей работе рассматривается обобщение задачи [6] для двух струн; оно состоит в том, что натяжения струн являются переменными и непрерывными. Такая модель струны не является стандартной [1], но допускает наглядную интерпретацию (см. ниже). В работе сформулирована строгая постановка соответствующей контактной задачи, доказана единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

Струна с переменным непрерывным натяжением

Рассмотрим малые статические поперечные перемещения струны в плоскости; левый конец струны закреплен; правый – свободен (рис. 1); $L>0$ – длина струны. Из стандартной теории (уравнение равновесия: $Ty''=-q$; краевые условия: $y(0)=0$, $y'(L)=0$; см. [1, с. 29, 44]) следует, что форма $y^{(1)}(x)$ струны под нагрузкой имеет вид:

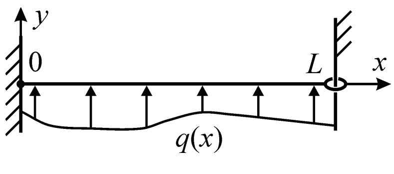

Рис. 1. Струна с закрепленным и свободным концами

$$y^{(1)}(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{T^{(1)}}\int_s^L q(t)dt\right)ds,$$

где $q(x)$ – плотность нагрузки, $T^{(1)}>0$ – (постоянное) натяжение струны. Продольными перемещениями точек струны (за счет поперечной нагрузки) пренебрегаем, так как они являются величинами более высокого порядка малости (по параметру qL/T) чем y. Пусть теперь под той же нагрузкой находится струна, состоящая из N звеньев длины L/N каждое (рис. 2) с натяжениями $T^{(i)}=T\left(iL/N\right)$, где $1\le i\le N$, $T(x)>0$ – некоторая непрерывная функция. Тогда нетрудно установить, что $\lim\limits_{N\to\infty}y^{(N)}(x)=y(x)$, где $y^{(N)}(x)$ – форма составной струны

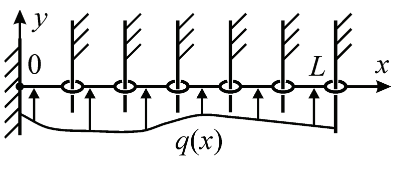

Рис. 2. Составная струна

---

[1] Осипенко Михаил Анатольевич – доцент, кандидат физ.-мат. наук, кафедра теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.
E-mail: osipenko.michael@yandex.ru

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T(s)} \int_s^L q(t)dt \right) ds . \tag{1}$$

Такую получающуюся предельным переходом $N \to \infty$ систему и будем считать струной с переменным непрерывным натяжением $T(x)$, изображая ее так же как на рис. 1 (без показа деления на звенья).

Постановка контактной задачи

Рассмотрим две струны с переменными непрерывными натяжениями (рис. 3); $L_1 > L_2$ – длины струн; $T_1(x)$, $T_2(x)$ – натяжения струн; нагрузка приложена к нижней струне. В отсутствие нагрузки струны плотно прилегают друг к другу (на рис. 3 струны для наглядности показаны разнесенными по вертикали). Трение между струнами отсутствует. Из (1) следует, что формы струн имеют вид:

$$y_1(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T_1(s)} \left(\int_s^{L_1} q(t)dt - \int_s^{L_2} f(t)dt \right) \right) ds , \tag{2}$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T_2(s)} \int_s^{L_2} f(t)dt \right) ds , \tag{3}$$

где $f(x)$ – плотность сил взаимодействия струн. Задача заключается в отыскании $f(x)$. Будем считать, что эта функция имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i) , \tag{4}$$

где $p(x) \ge 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \le L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \ge 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между струнами). Из (2), (3) следует, что

$$r(x) = \int_0^x a(s) \left(\int_s^{L_2} f(t)dt - k(s) \right) ds , \tag{5}$$

где $a(x) = 1/T_1(x) + 1/T_2(x)$, $\quad k(x) = \dfrac{1}{1 + T_1(x)/T_2(x)} \displaystyle\int_x^{L_1} q(s)ds$.

Будем считать, что $q(x) \ge 0$ непрерывна при $0 \le x \le L_1$, а $T_1(x)$ и $T_2(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \le x \le L_2$; тогда $k(x) \ge 0$ непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L_2$. Условие контакта струн состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между струнами неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю. Окончательно, приходим к следующей математической постановке задачи.

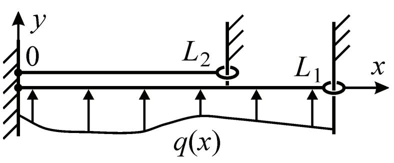

Рис. 3. Контакт двух струн

Задача. Найти функцию $f(x)$ вида (4) такую, что при $0 \le x \le L_2$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \ge 0 & (f(x) = 0), \end{cases} \tag{6}$$

где $r(x)$ выражается формулой (5), в которой $a(x) > 0$ непрерывна при $0 \le x \le L_2$, $k(x) \ge 0$ непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L_2$.

Доказательство единственности решения

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $f^*(x)$ – два решения задачи. По формуле (5) им соответствуют функции $r(x)$ и $r^*(x)$. Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - f^*(x). \tag{7}$$

Так как $f(x)$ и $f^*(x)$ имеют вид (4), то $\varphi(x)$ также имеет вид (4), но $p(x)$ и P_i в (4) могут быть неположительными. Обозначим

$$E = \int_0^{L_2} \left(r(x) - r^*(x) \right) \varphi(x) dx. \tag{8}$$

Из (6), (7) нетрудно установить, что в (8) подынтегральная функция неположительна; следовательно, $E \le 0$. С другой стороны, подставляя (5) в (8) и учитывая (7), найдем

$$E = \int_0^{L_2} a(x) J^2(x) dx, \tag{9}$$

где

$$J(x) = \int_x^{L_2} \varphi(s) ds. \tag{10}$$

Из (9) следует, что $E \ge 0$. Так как выше было доказано неравенство $E \le 0$, то $E = 0$. Далее, учитывая (10) и упомянутый выше вид $\varphi(x)$, легко установить, что из (9) и равенства $E = 0$ следует, что $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$. Действительно, $\varphi(x) = p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i)$; предположим, что $p(x) > 0$ при некотором $x_* > 0$. Тогда, в силу непрерывности $p(x)$ слева и конечности суммы, можно найти такие $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, что отрезок $0 < x_* - \varepsilon_1 \le x \le x_* - \varepsilon_2$ не содержит ни одной точки x_i и $p(x) > 0$ на этом отрезке; это противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$. Аналогично устанавливается невозможность неравенств $p(x) < 0$ при $x > 0$ и $p(0) \ne 0$; следовательно, $p(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$, откуда $\varphi(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$. Пусть $x_* > 0$ – максимальное из чисел x_i, соответствующих ненулевым значениям P_i. Тогда из (10) следует, что $J(x) \ne 0$ в некоторой левой полуокрестности x_*, что противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$. Таким образом, $\varphi(x) = 0$ и $f(x) = f^*(x)$ при $0 \le x \le L_2$; тем самым утверждение 1 доказано.

Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

Утверждение 2. Если $k'(x) < 0$ при $0 \le x \le L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = -k'(x) + k(L_2)\delta(x - L_2) \tag{11}$$

(соприкосновение по всему отрезку $0 \le x \le L_2$, рис. 4, *a*).

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (11) в (5), найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$; таким образом, (6) выполнено.

Утверждение 3. Если $k'(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{12}$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4, *b*; здесь и далее соприкосновение в точке закрепления не упоминается), где

$$F = \int_0^{L_2} a(x) k(x) dx \Big/ \int_0^{L_2} a(x) dx. \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (12) в (5), найдем

$$r(x) = \int_0^x a(s)\left(F - k(s)\right) ds. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что $r(L_2) = 0$. Так как $k'(x) \ge 0$, то из последнего равенства вытекает, что $k(0) \le F \le k(L_2)$ (иначе из (14) следует, что либо $r(L_2) < 0$, либо $r(L_2) > 0$). Тогда существует $0 \le x_* \le L_2$ такое, что $F = k(x_*)$, и из (14) следует, что $r(x)$ не убывает при $0 \le x \le x_*$ и не возрастает при $x_* \le x \le L_2$. Отсюда и из равенств $r(0) = 0$, $r(L_2) = 0$ вытекает неравенство $r(x) \ge 0$

при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительно только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$; таким образом, (6) выполнено.

Утверждение 4. Пусть существует $0 < x_0 < L_2$ такое, что $k'(x) > 0$ при $0 \le x < x_0$, $k'(x_0) = 0$, $k'(x) < 0$ при $x_0 < x \le L_2$; тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид:

a) если $\Phi(L_2) \ge 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{15}$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4 *b*);

b) если $\Phi(L_2) < 0$, то

$$f(x) = k(L_2)\delta(x - L_2) + \begin{cases} 0 & (0 \le x \le \lambda), \\ -k'(x) & (\lambda < x \le L_2) \end{cases} \tag{16}$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \le x \le L_2$, рис. 4 *c*), где

$$\Phi(\Lambda) = \int_0^\Lambda a(x)\big(k(\Lambda) - k(x)\big)dx, \tag{17}$$

$$x_0 < \lambda < L_2 \text{ – корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0, \tag{18}$$

F выражается формулой (13).

Доказательство

a) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (15) в (5), найдем для $r(x)$ выражение (14). Из (13), (14) следует, что $r(L_2) = 0$. Из (13), (17) и условия $\Phi(L_2) \ge 0$ следует, что $F \le k(L_2)$. Из свойств функции $k(x)$ тогда вытекает, что $F \ge k(0)$ (иначе из (14) следует, что $r(L_2) < 0$). Из этих же свойств тогда следует, что существует $0 \le x_* \le x_0$ такое, что $F = k(x_*)$; рассуждая затем так же, как при доказательстве утверждения 3, получим, что $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$ и условия (6) выполнены.

b) Существование корня $x_0 < \lambda < L_2$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ при $x_0 \le \Lambda \le L_2$ и значений $\Phi(x_0) > 0$ (так как функция $k(x)$ достигает максимума в точке x_0), $\Phi(L_2) < 0$; единственность корня следует из утверждения 1. Так как $k'(x) < 0$ при $x_0 < x \le L_2$, а $\lambda > x_0$, то $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (16) в (5), найдем с учетом (17), (18)

$$r(x) = \begin{cases} \int_0^x a(s)\big(k(\lambda) - k(s)\big)ds & (0 \le x \le \lambda), \\ 0 & (\lambda \le x \le L_2). \end{cases} \tag{19}$$

Заметим, что $k(\lambda) \ge k(0)$; действительно, если $k(\lambda) < k(0)$, то, в силу свойств функции $k(x)$, $k(\lambda) < k(x)$ при $0 < x < \lambda$; тогда из (19) следует, что $r(\lambda) < 0$, тогда как $r(\lambda) = 0$. Из неравенства $k(\lambda) \ge k(0)$ следует, что существует $0 \le x_* \le x_0$ такое, что $k(\lambda) = k(x_*)$; рассуждая затем так же, как при доказательстве утверждения 3, получим, что $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительно только при $\lambda < x \le L_2$, а на этом отрезке $r(x) = 0$; таким образом, (6) выполнено.

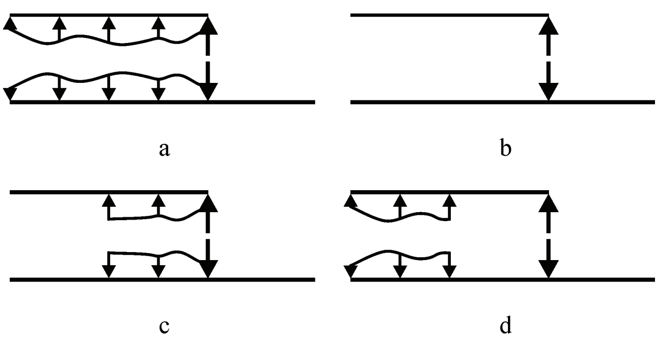

Рис. 4. Варианты сил взаимодействия в системе двух струн

Утверждение 5. Пусть существует $0 < x_0 < L_2$ такое, что $k'(x) < 0$ при $0 \le x < x_0$, $k'(x_0) = 0$, $k'(x) > 0$ при $x_0 < x \le L_2$; тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид:

a) если $\Psi(0) \le 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2)$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4, *b*).

b) если $\Psi(0) > 0$, то

$$f(x) = k(\mu)\delta(x - L_2) + \begin{cases} -k'(x) & (0 \le x \le \mu), \\ 0 & (\mu < x \le L_2), \end{cases}$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \le x \le L_2$ и в точке, рис. 4, *d*), где

$$\Psi(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{M}}^{L_2} a(x)\big(k(\mathrm{M}) - k(x)\big)dx,$$

$0 < \mu < x_0$ – корень уравнения $\Psi(\mathrm{M}) = 0$, F выражается формулой (13).

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4 и поэтому здесь не приведено.

Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Можно показать, что утверждения 1–5 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функции $k(x)$. Эту функцию можно считать лишь кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой, если понимать $k'(x)$ в «обобщенном смысле»: в точках излома $k(x)$ доопределять $k'(x)$ по непрерывности слева, а в точках разрыва $k(x)$ (первого рода) добавлять к $k'(x)$ соответствующую δ-функцию.

Использованный подход к постановке и решению контактной задачи для двух струн может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда $k'(x)$ меняет знак более одного раза), так и для решения близких контактных задач (для балок).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

2. Григолюк, Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 415 с.

3. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

4. Кравчук, А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во МГАПИ, 1997. – 340 с.

5. Няшин, Ю.И. К теории изгиба листовой рессоры / Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, Р.Н. Рудаков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 134–143.

6. Осипенко, М.А. Об одной контактной задаче для системы струн / М.А. Осипенко // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2005. – № 1. – С. 82–86.

7. Осипенко, М.А. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач / М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин // Известия Саратовского университета. Новая серия. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 77–84.

Поступила в редакцию 24 сентября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 66–71

CONTACT PROBLEM FOR TWO STRINGS WITH VARIABLE TENSIONS

M.A. Osipenko[1]

The model of a string with the variable continuous tension is proposed. This model is based on the limiting process for an *N*-tier string with different constant tensions. The one-side contact problem for two strings under the given loading is considered. The left end of each string is fixed and the right one is free. The problem is stated clearly, uniqueness of the solution is proved, and analytical solutions of the problem for some special cases are found. It is shown that the strings may contact both at one point and in the segment.

Keywords: string; variable tension; contact problem; analytical solution.

References

1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, MGU Publ., 1999. 798 p. (in Russ.).

2. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek* (Contact problems of the theory of plate and shell). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 415 p. (in Russ.).

3. Dzhonson K. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya* (Contact Mechanics). Moscow, Mir Publ., 1989. 510 p. (in Russ.). [Johnson K.L. Contact Mechanics. London, Cambridge University Press, 1985. 452 p. (in Eng.).]

4. Kravchuk A.S. *Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike* (Variational and quasivariational inequalities in mechanics). Moscow, MGAPI Publ., 1997. 340 p. (in Russ.).

5. Nyashin Yu.N., Osipenko M.A., Rudakov R.N. On the theory of bending of a leaf spring. *Mech. Solids.* 2002. Vol. 37, no. 6. pp. 114–122.

6. Osipenko M.A. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2005. no. 1. pp. 82–86. (in Russ.).

7. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2011. Vol. 11. Issue 1. pp. 77–84. (in Russ.).

Received 24 September 2013

[1] Osipenko Michaiel Anatolyevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Theoretical Mechanics Department, Perm National Research Polytechnic University.
E-mail: osipenko.michael@yandex.ru