

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

О.С. Садаков¹, А.О. Щербакова²

Отказ от гипотезы малости перемещений в механике деформируемого тела приводит к проблемам, связанным с геометрической нелинейностью, которые до сих пор не решены до конца, несмотря на свою актуальность для практических приложений. Одна из таких проблем относится к понятию логарифмической деформации. Скалярная логарифмическая деформации в ряде случаев полезна, но тензор логарифмической деформации обычно лишен смысла.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность; конечные деформации; логарифмическая деформация; тензор Генки; инженерная деформация; простой сдвиг.

Введение

Тензор логарифмической деформации в настоящее время является одной из наиболее популярных мер деформации тела при решении геометрически нелинейных задач. Он представляет собой обобщение скалярной логарифмической деформации

$$e = \int_{l_0}^l \frac{1}{x} dx = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right), \quad (1)$$

введенной Людвигом в 1909 г., перенесенной на область тензоров [1]. Идея Людвиг состояла в том, чтобы сравнивать текущую длину растягиваемого стержня не с начальной длиной l_0 , как при использовании обычной инженерной деформации

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2)$$

а с длиной стержня в предыдущем состоянии. Логарифмическая деформация (1) однозначно выражается через инженерную деформацию

$$e = \ln(1 + \varepsilon) \quad (3)$$

и наоборот, инженерная выражается через логарифмическую

$$\varepsilon = \exp(e) - 1. \quad (4)$$

Таким образом, зная одну, легко получить другую. Для величины e Людвиг в свое время ввел термин *effective specific strain* – особая эффективная деформация, а несколько позже Надаи предложил новое название – *натуральная деформация* [2]. В настоящее время широкое распространение получили термины: *истинная деформация* и *логарифмическая деформация*.

В 1928 г. Генки [3] предложил распространить идею Людвиг на случай трехмерной деформации, введя по аналогии с выражением (3) *тензор логарифмической деформации*, иногда называемый его именем – *тензором Генки*

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (5)$$

Здесь и ниже тензоры и векторы обозначены жирными символами – для того, чтобы отличать их от скаляров. В выражении (5) $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это *тензор инженерной деформации*, связывающий векторы \mathbf{l}_0 волокон тела в начальном состоянии (до деформирования) с векторами \mathbf{l} в деформированном состоянии

$$\Delta \mathbf{l} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{l}_0, \quad \Delta \mathbf{l} = \mathbf{l} - \mathbf{l}_0, \quad (6)$$

¹ Садаков Олег Сергеевич – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

² Щербакова Алла Олеговна – кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: AllaScherbakova@list.ru

I – единичный тензор. Сумму тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и единичного тензора обычно называют *тензором удлинений* (иначе, *тензором растяжения* или *тензором коэффициентов длины*)

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

В 1956 г. Дойл и Эрикссон [4] ввели понятие обобщенной деформации

$$\boldsymbol{E}^{(m)} = \frac{1}{m} (\boldsymbol{U}^m - \boldsymbol{I}). \quad (8)$$

Здесь разные значения m соответствовали разным мерам деформации. В частности, при $m = 0$ у Дойла и Эрикссона получился тензор логарифмической деформации.

Таким образом, как и в случае одноосной деформации, в общем случае имеются две альтернативные меры деформации: инженерная и логарифмическая. И, как показывает практика, логарифмическая деформация более популярна среди инженеров-механиков (при решении геометрически нелинейных задач). Это, по-видимому, объясняется тем, что использование логарифма позволяет заменять произведения суммами, упрощая решение задач. Например, чтобы найти относительное изменение объема элемента твердого тела, можно вместо традиционного выражения

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1, \quad (9)$$

использовать более простое:

$$\ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = e_1 + e_2 + e_3. \quad (10)$$

Условие несжимаемости среды при этом принимает вид

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad (11)$$

то есть тензор логарифмической деформации напоминает девиатор. Удобно также разделять логарифмическую деформацию \boldsymbol{e} на упругую составляющую и неупругую:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_e + \boldsymbol{e}_p. \quad (12)$$

Эта сумма напоминает геометрически линейный подход.

При решении инженерных задач тензор логарифмической деформации связывают с некоторыми мерами напряжений, например, Кирхгофа [5] или Коши [6, 7]. Однако достоверность полученных результатов при этом вызывает серьезные сомнения [8]. Ниже будет показано, что использование тензора логарифмической деформации имеет смысл только в главных осях.

Вычисление тензора логарифмической деформации

Известно [9], что для получения какой-либо функции двухвалентного тензора \boldsymbol{T} достаточно знать его главные числа $\{\lambda_i\}$ и главные направления, которые обычно задают единичными векторами $\{\boldsymbol{c}_i\}$ – главными векторами. Особенность главных векторов состоит в том, что при скалярном умножении на тензор \boldsymbol{T} они не поворачиваются:

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{c}_i = \lambda_i \boldsymbol{c}_i. \quad (13)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$|\boldsymbol{T} - \lambda_i \boldsymbol{I}| = 0 \quad (14)$$

позволяет найти главные числа и векторы тензора \boldsymbol{T} . Для вычисления функции тензора необходимо записать его в главных координатах, применив эту функцию к главным значениям. У симметричного тензора все главные числа вещественны, а главные направления взаимно ортогональны. Следовательно, натуральный логарифм тензора \boldsymbol{U} определяется в трехмерном пространстве суммой трех слагаемых

$$\ln \boldsymbol{U} = \ln(u_i) \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{c}_i, \quad (15)$$

где $i = 1 \dots 3$, u_i – это главные числа тензора \boldsymbol{U} , а \boldsymbol{c}_i – векторы декартового базиса, совпадающие с главными направлениями тензора \boldsymbol{U} . Отметим, что, согласно выражениям (7) и (13), тензоры \boldsymbol{U} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют одинаковые главные направления, а их главные числа отличаются на единицу

$$u_i = \varepsilon_i + 1. \quad (16)$$

В матричной форме выражение (16) имеет вид

$$[e] = \begin{bmatrix} \ln u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln u_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

При записи матричных выражений следует помнить о том, в каком именно базисе это сделано. Например, выражение (17) содержит координаты тензора, записанного в декартовом базисе, направления которого совпадают с главными направлениями этого тензора. В другом базисе координаты будут другими.

Деформации и жесткие повороты

При неоднородном деформированном состоянии тела обычно рассматривают деформированные элементарные объемы, материальные волокна которых бесконечно малы. Тогда деформированное состояние каждого из таких объемов можно принять однородным. В этом случае волокна, прямые до деформирования, при деформировании не искривляются, и их удобно обозначать векторами. При деформировании элементарного объема его *главные волокна* (волокна, описываемые главными векторами тензора деформации) не поворачиваются, а только удлиняются или укорачиваются. Однако деформирование соседних элементарных объемов способно вызывать жесткий поворот последнего, при этом его главные волокна поворачиваются. Оператором линейной связи между векторами элементарных волокон в начальном и деформированном состоянии в этом случае служит тензор дисторсии F

$$l = F \cdot l_0, \quad (18)$$

включающий в себя деформацию элементарного объема и его жесткий поворот

$$F = R \cdot U = V \cdot R. \quad (19)$$

В этом выражении, которое обычно называют полярным разложением тензора дисторсии, U и V – это соответственно правый и левый тензоры удлинений (симметричные тензоры):

$$U = \varepsilon_U + I, \quad V = \varepsilon_V + I, \quad (20)$$

выраженные соответственно через правый ε_U и левый ε_V тензор инженерной деформации, а R – тензор жесткого поворота на угол φ против часовой стрелки вокруг оси, заданной единичным вектором n

$$R = nn + (I - nn) \cos \varphi + \mathcal{E} \cdot n \sin \varphi. \quad (21)$$

Здесь $\mathcal{E} = -\delta_{ijk} e_i e_j e_k$ – это тензор Леви–Чевитты (δ_{ijk} – символ Веблена). На плоскости, перпендикулярной вектору n , в декартовом базисе матрица этого тензора имеет довольно простой вид

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Поскольку тензор жесткого поворота является ортогональным тензором (то есть $R^{-1} = R^T$), связь между левым и правым тензором удлинений, следующая из полярного разложения дисторсии (19), линейна

$$V = R \cdot U \cdot R^T. \quad (23)$$

Это выражение означает, что левый тензор удлинений получается поворотом правого тензора на угол жесткого поворота.

Полярная декомпозиция тензора дисторсии основана на следующих соображениях. На рис. 1 показана схема дисторсии элементарного объема тела (для наглядности рассмотрена двумерная задача), в результате которой материальные волокна вытянулись (либо укоротились) и повернулись. Произвольный вектор l_0 , отвечающий некоторому множеству материальных волокон в начальном состоянии, изменил свою длину и направление. Сейчас это вектор $l_F = F \cdot l_0$, отвечающий тому же множеству материальных волокон в деформированном состоянии. Этот вектор можно представить двумя способами. В первом способе сначала рассматривают деформацию элементарного объема, получая при этом вектор $l_U = U \cdot l_0$, а затем его жесткий поворот

$$l_F = R \cdot l_U = \underbrace{R \cdot U}_F \cdot l_0. \quad (24)$$

В результате тензор дисторсии выражается через правый тензор растяжений $F = R \cdot U$. Во втором способе сначала рассматривают жесткий поворот, получая вектор $l_R = R \cdot l_0$, а затем деформацию

$$l_F = V \cdot l_R = \underbrace{V \cdot R}_F \cdot l_0. \quad (25)$$

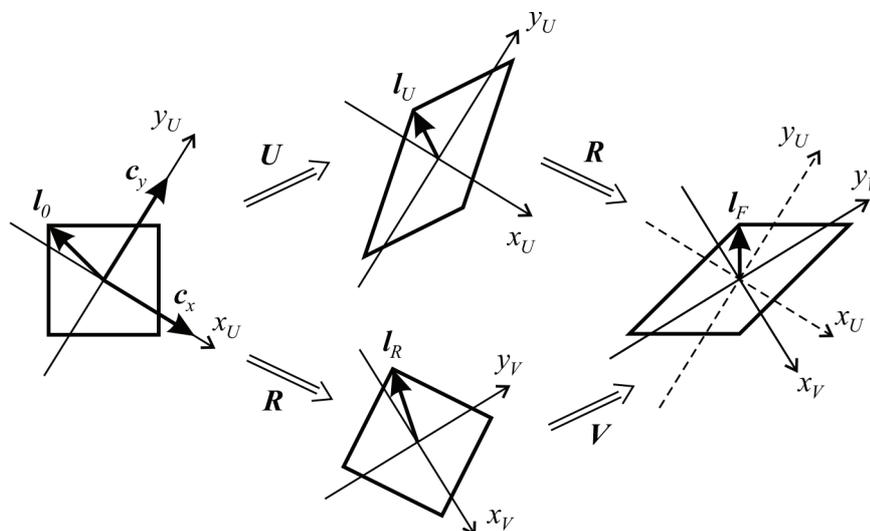


Рис. 1. Дисторсия элементарного объема

Тензор дисторсии при этом выражается через правый тензор растяжений $F = V \cdot R$.

По аналогии с введением двух тензоров удлинений – правого и левого, вводят два тензора логарифмической деформации. Взятие логарифмической функции тензоров U и V , дает соответственно правый и левый тензоры логарифмической деформации:

$$e_U = \ln U, \quad e_V = \ln V. \quad (26)$$

Смысл координат

Обычно тензоры логарифмической деформации записывают в главных координатах, так как именно эта форма записи позволяет извлечь из них полезную информацию в виде *логарифмических деформаций главных волокон*. Например, координаты тензора

$$e_U = \ln u_x c_x c_x + \ln u_y c_y c_y, \quad (27)$$

записанного в декартовом базисе $\{c_x, c_y\}$ (см. рис. 1), векторы которого направлены вдоль главных осей x_U и y_U этого тензора, представляют логарифмические деформации главных волокон. Этим, собственно, и ограничивается полезная с точки зрения механики информация, содержащаяся в этом тензоре. Получить какую-либо информацию о деформировании других волокон с помощью этого тензора невозможно.

Что касается тензора e_V , то он согласно выражениям (23) и (26) получается жестким поворотом правого тензора удлинений

$$e_V = \ln(R \cdot U \cdot R^T).$$

Следовательно, его главные координаты (x_V и y_V на рис. 1) совпадают с главными координатами тензора e_U (x_U и y_U на рис. 1). По сути, тензор e_V содержит ту же информацию, что и тензор e_U . Однако для получения этой информации необходимо не только направить базисные векторы вдоль главных осей, но и следить за их жестким поворотом, что усложняет координатную и матричную форму записи тензорных выражений [10].

В отличие от тензора логарифмической деформации (левого или правого), тензор инженерной деформации содержат существенно больше полезной информации о деформировании тела. Во-первых, согласно выражению (6), его проекция на вектор, задающий некоторое материальное волокно, дает вектор изменения этого волокна, определяющий его удлинение (укорочение) и поворот. Во-вторых, столбцы матрицы тензора ϵ представляют изменения базисных векторов, причем базисные векторы могут и не совпадать с главными направлениями тензора ϵ . В-третьих, диагональные элементы матрицы $[\epsilon]$ представляют линейные деформации волокон в направле-

нии базисных векторов, а недиагональные – угловые деформации. И в-четвертых, тензор инженерной деформации, позволяя найти линейную деформацию любого волокна, дает с помощью выражения (3) возможность расчета скалярной логарифмической деформации

$$e = \ln(1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \Delta l = l - l_0 = |l_0 + \varepsilon \cdot l_0| - l_0. \quad (28)$$

Простой сдвиг

Одной из ключевых тестовых геометрически нелинейных задач является задача о простом сдвиге треугольной конструкции, схема которой показана на рис. 2, а. На рис. 2, а в начальном состоянии конструкция изображена прерывистой линией, а в деформированном – сплошной; оси x и y – произвольные оси декартового базиса; x_V и y_V – главные оси деформации. Задача о простом сдвиге имеет ряд существенных достоинств. Во-первых, деформация конструкции при простом сдвиге однородна; во-вторых, дисторсия содержит как деформацию, так и жесткий поворот; в-третьих, дисторсия в любой момент времени определяется только одним скалярным параметром – смещением q .

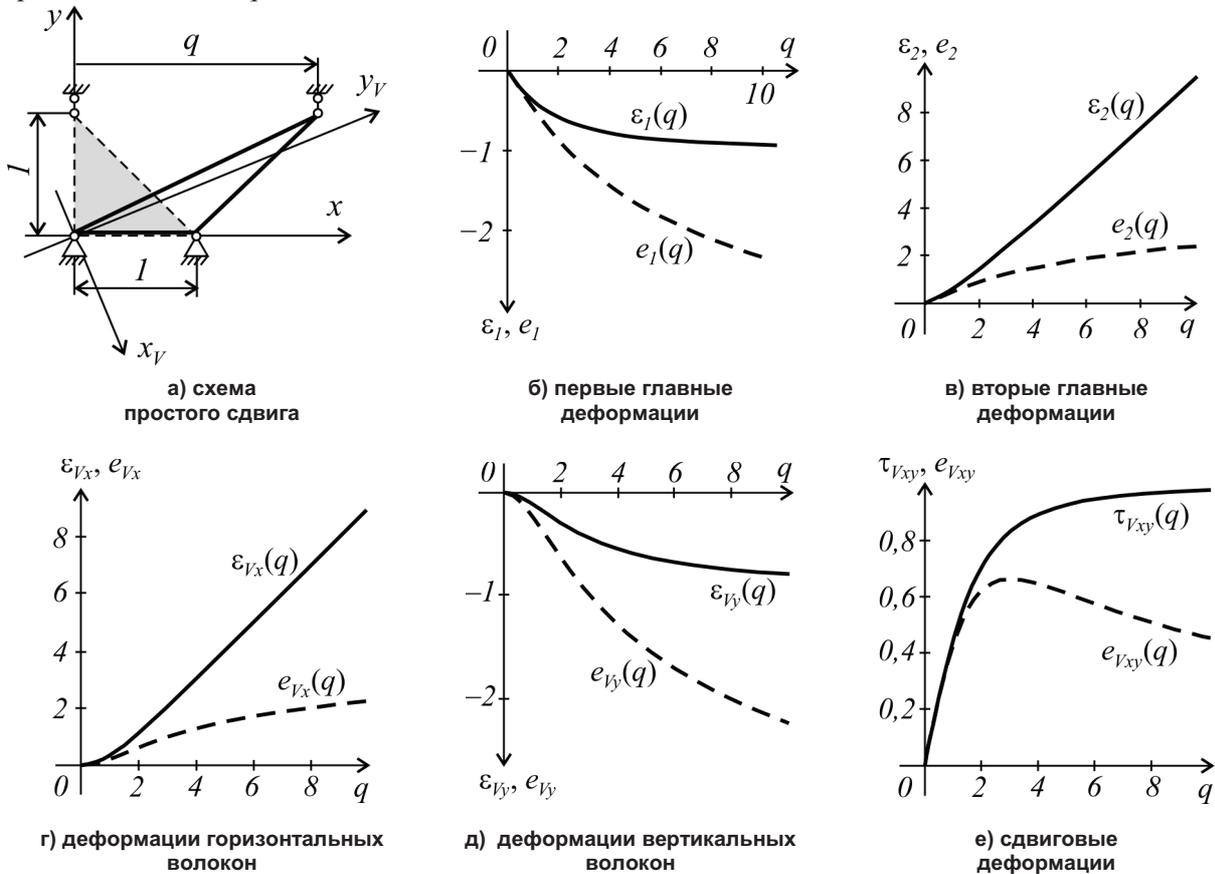


Рис. 2. Простой сдвиг

На примере простого сдвига удобно демонстрировать различие между главными инженерными деформациями ε_1 и ε_2 , а также соответствующими главными логарифмическими деформациями $e_1 = \ln(\varepsilon_1 + 1)$ и $e_2 = \ln(\varepsilon_2 + 1)$ в зависимости от смещения q . На рис. 2, а и 2, б главные инженерные деформации изображены сплошными линиями, а главные логарифмические – прерывистыми. При деформациях, превышающих 100 %, инженерные деформации могут отличаться от логарифмических в несколько раз. Однако при деформациях менее 10 % (что соответствует в данном примере смещению $q = 0,2$) различие не превышает 5 %, что легко объясняется использованием логарифмической функции.

Иногда тензоры логарифмической деформации записывают не в главных, а в произвольных координатах, применяя к выражениям (26) операцию перехода к новому базису

$$[e'] = [H][e][H]^T. \quad (29)$$

Здесь матрица $[e']$ содержит координаты тензора логарифмической деформации в новом базисе, матрица $[e]$ – координаты тензора логарифмической деформации в старом базисе, а $[H]$ – матрица перехода к новому базису. Отметим, что в случае, когда тензоры логарифмической деформации записаны в произвольном базисе, смысл координат этих тензоров как мер деформации исчезает. На рис. 2 z , d и e показаны изменения координат тензоров инженерной и логарифмической деформации при простом сдвиге в осях x и y :

$$[\varepsilon_V] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{Vx} & \varepsilon_{Vxy} \\ \varepsilon_{Vxy} & \varepsilon_{Vy} \end{bmatrix}, \quad [e_V] = \begin{bmatrix} e_{Vx} & e_{Vxy} \\ e_{Vxy} & e_{Vy} \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} \ln(\varepsilon_1 + 1) & 0 \\ 0 & \ln(\varepsilon_2 + 1) \end{bmatrix} [R]. \quad (30)$$

Как и в случае главных деформаций, здесь различие между инженерными и логарифмическими деформациями возрастает с ростом q . Однако, в отличие от главных деформаций, даже при малых q это различие может быть значительным. Например, при $q = 0,2$ разница между инженерной и логарифмической деформацией в направлении оси x составляет порядка 30 % (ε_{Vx} при этом равно 1,5 %), а в направлении оси y – порядка 100 % (ε_{Vy} при этом равно 0,5 %). Различие между сдвиговыми деформациями начинает превышать 5 % при $q > 1,18$ (τ_{Vxy} при этом равно 51 %).

В расчетах кинетики деформирования, когда главные направления деформаций поворачиваются в процессе деформирования, в разные моменты процесса деформирования тензоры логарифмической деформации (правый и левый) дают информацию о разных волокнах тела. На рис. 3 показано, что разным смещениям q отвечают разные пары главных направлений (оси x_V и y_V). Значит, волокна, информацию о которых содержат тензоры логарифмической деформации, также будут различаться в зависимости от q .

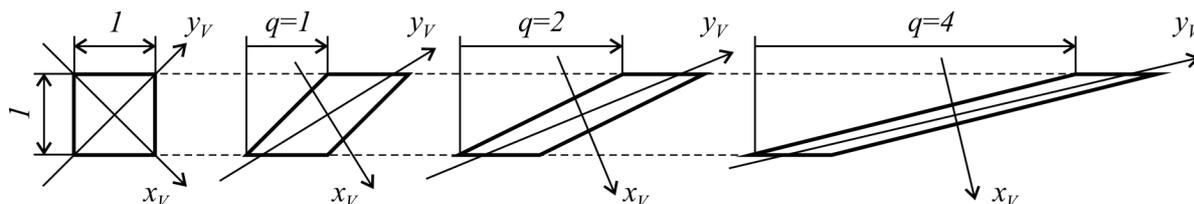


Рис. 3. Однородная дисторсия квадратного элемента при простом сдвиге

Логарифмическая деформация произвольного волокна легко вычисляется с помощью тензора инженерной деформации (28), тогда как попытка использовать вместо него тензор логарифмической деформации приводит к ошибочному результату. Этот факт проиллюстрирован на рис. 4 на примере волокна a , заданного в начальном состоянии в координатах x и y вектором

$$[a] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

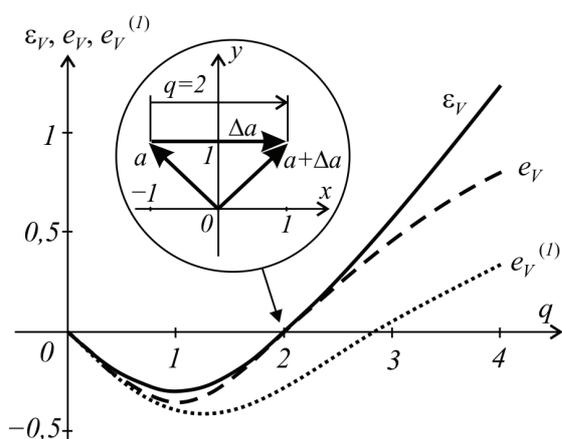


Рис. 4. Деформации волокна a при простом сдвиге

На рис. 4 изображен график изменения функции линейной деформации этого волокна в зависимости от параметра q (сплошная линия)

$$\varepsilon_V = \frac{|a + \varepsilon_V \cdot a| - a}{a},$$

график скалярной логарифмической деформации (прерывистая линия)

$$e_V = \ln(\varepsilon_V + 1),$$

и величины

$$e_V^{(1)} = \ln\left(\frac{|a + e_V \cdot a| - a}{a} + 1\right),$$

вычисленной по аналогии с линейной деформацией, когда вместо тензора инженерной деформации используется тензор логарифмической деформации (пунктирная линия). Ошибочность использования тензора логарифмической деформации становится очевидна при $q = 2$, когда волокно a зеркально отражается относительно оси y , не изменив длины. Его деформация (как инже-

нерная, так и логарифмическая) при этом должна быть равна нулю. Однако величина $e_V^{(1)}$ при $q = 2$ нулю не равна, она составляет $-0,272$.

Выводы

1. Скалярная логарифмическая деформация связана однозначной зависимостью с инженерной деформацией, то есть одна легко выражается через другую. Скалярную логарифмическую деформацию удобно использовать в тех случаях, когда в выражениях логарифмируется произведение инженерных деформаций. Тогда это произведение можно заменить суммой логарифмических деформаций и выражение при этом станет линейным.

2. Тензор логарифмических деформаций (правый и левый) содержит информацию только о логарифмических деформациях главных волокон. Если записать его в произвольном базисе, то координаты этого тензора с точки зрения деформирования объекта теряют смысл.

3. В расчетах кинетики деформирования, когда главные направления деформаций поворачиваются в процессе деформирования, тензор логарифмической деформации в разные моменты процесса деформирования дает информацию о разных волокнах тела.

4. Тензор инженерной деформации в отличие от тензора логарифмической деформации содержит следующую информацию о деформировании объекта.

- Его проекция на вектор, задающий некоторое материальное волокно, дает вектор изменения этого волокна, определяющий его удлинение (укорочение) и поворот.
- Столбцы его матрицы представляют изменения базисных векторов, причем базисные векторы могут и не совпадать с главными направлениями деформации.
- Диагональные элементы его матрицы представляют линейные деформации волокон в направлении базисных векторов, а недиагональные – угловые деформации.
- Тензор инженерной деформации, позволяя найти линейную деформацию любого волокна, дает возможность расчета скалярной логарифмической деформации.

Литература

1. Ludwik, P. Elemente der Technologischen Mechanik / P. Ludwik. – Berlin: Applied Mechanics, Verlag von J. Springer, 1909. – 57 p.
2. Nadai, A. Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I / A. Nadai // J. Appl. Phys. – 1937. – Vol. 8. – P. 205–213.
3. Hencky, H. Uber die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen / H. Hencky // Zeit. Tech. Phys. – 1928. – Vol. 9. – P. 215–220.
4. Doyle, T.C. Nonlinear elasticity / T.C. Doyle, J.L. Ericksen // Advances in applied mechanics IV. – New York: Academic Press, Inc. – 1959. – P. 53–115.
5. Аннин, Б.Д. Допустимые формы упругих законов деформирования в определенных соотношениях упруго-пластичности / Б.Д. Аннин, С.Н. Коробейников // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 21–34.
6. ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0. / Houston (PA): Swanson analysis system Inc. – 1996. – 510 p.
7. Горлач, Б.А. Конечные деформации в задачах формования неупругих тел / Б.А. Горлач, Е.А. Ефимов // Математическое моделирование систем и процессов. – 1992. – № 1. – С. 67–81.
8. Садаков, О.С. Конечные деформации в механике деформируемого твердого тела / О.С. Садаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6(46) – С. 114–121.
9. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука. – 1973. – 280 с.
10. Truesdell, C. The Classical Field Theories / C. Truesdell, R. Toupin; S. Flugge (ed) // Encyclopedia of Physics. – Berlin: Springer-Verlag, 1960. – Vol. III/1. – P. 226–793.

Поступила в редакцию 5 марта 2014 г.

ON THE USE OF LOGARITHMIC STRAIN TENSOR

O.S. Sadakov¹, A.O. Scherbakova²

The rejection of the small displacements hypothesis in the mechanics of deformable solids leads to some problems connected with geometrical nonlinearity. At present, these problems are still not completely solved despite their relevance to practical applications. One of these problems is the concept of logarithmic strain. The scalar logarithmic strain is effective in some cases but the logarithmic strain tensor is usually useless.

Keywords: geometrical nonlinearity; finite strains; logarithmic strain; Hencky strain tensor; engineering strain; simple shear.

References

1. Ludwik P. *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin: Applied Mechanics, Verlag von J. Springer, 1909. 57 p.
2. Nadai A. Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I. *J. Appl. Phys.* 1937. Vol. 8. pp. 205–213.
3. Hencky H. Uber die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Zeit. Tech. Phys.* 1928. Vol. 9. pp. 215–220.
4. Doyle T.C., Ericksen J.L. Nonlinear elasticity. *Advances in applied mechanics IV*. New York: Academic Press, Inc. 1959. pp. 53–115.
5. Annin B.D., Korobeynikov S.N. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 1998. Vol. 1, no. 1. pp. 21–34. (in Russ.).
6. *ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0*. Houston (PA), Swanson analysis system Inc, 1996. 510 p.
7. Gorchach B.A., Efimov E.A. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 1992. no. 1. pp. 67–81.
8. Sadakov O.S. Konechnye deformatsii v mekhanike deformiruемого tverdogo tela (Finite deformations in mechanics of deformable solids). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika, fizika, khimiya»*. 2005. Issue 6. no. 6(46). pp. 114–121. (in Russ.).
9. Lankaster P. *Teoriya matrits* (Theory of matrices). Moscow, Nauka Publ, 1973. 280 p.
10. Truesdell C., Toupin R., Flugge S. (ed) *The Classical Field Theories. Encyclopedia of Physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1960. Vol. III/1. pp. 226–793.

Received 5 March 2014

¹ Sadakov Oleg Sergeevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines, South Ural State University.

² Scherbakova Alla Olegovna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines, South Ural State University.

E-mail: AllaScherbakova@list.ru