Математика

УДК 517.9

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О.А. Рузакова[1]

Получены необходимые условия ε-управляемости дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной, с относительно радиально ограниченным оператором в правой части. Показана эффективность полученных результатов на примерах исследования ε-управляемости начально-краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

Ключевые слова: ε-управляемость; полугруппа операторов; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть X,Y – банаховы пространства, операторы $L\in \mathrm{L}(X;Y)$ (т. е. линеен и непрерывен), $M\in Cl(X;Y)$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), функции управления $u_i(t):[0,T]\to R$, вектор-функции $b_i(t)$, $c(t)\in C^{p+1}([0,T];Y)$, $1\le i\le m$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0)=x_0\in domM$$

для уравнения

$$L\dot{x}(t)=Mx(t)+\sum_{i=1}^{m}b_i(t)u_i(t)+c(t),\quad 0\le t\le T. \tag{1}$$

Нас будет интересовать вопрос управляемости [1] (точнее, ε-управляемости [2]) уравнения соболевского типа [3] в случае, когда существует сильно-непрерывная разрешающая полугруппа однородного уравнения (1) [4]. При изучении управляемости уравнения (1) будем использовать результаты, полученные в работе [5] для уравнения

$$\dot{x}=Ax+b(t)u+c(t)$$

с замкнутым линейным оператором A, непрерывными вектор-функциями b,c со значениями в банаховом пространстве, функцией управления $u\in L_1((0,T);R)$. Заметим, что вопросы управляемости являются предшествующими для теории оптимального управления, которая активно развивается в последнее время для уравнений соболевского типа и даже нашла свое применение в задачах оптимального измерения динамически искаженных сигналов [6], а также их численного решения [7]. Автором данной работы ранее исследовалась ε-управляемость и управляемость уравнения соболевского типа [8–11]. Цель данной работы – обобщить эти результаты и результаты работы [5]. Полученные абстрактные результаты используются при исследовании ε-управляемости начально-краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

Сильно (L,p)-радиальный оператор

Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты, доказательства которых можно найти в [3].

Пусть X,Y – банаховы пространства. Обозначим $\rho^L(M)=\{\mu\in C:(\mu L-M)^{-1}\in \mathrm{L}(Y;X)\}$,

$R_\mu^L(M)=(\mu L-M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M)=L(\mu L-M)^{-1}$, $R_{(\lambda,p)}^L(M)=\prod_{k=0}^{p}R_{\mu_k}^L(M)$, $L_{(\lambda,p)}^L(M)=\prod_{k=0}^{p}L_{\mu_k}^L(M)$,

$N_0=N\cup\{0\}$, $R_+=\{a\in R:a>0\}$, $\overline{R}_+=R_+\cup\{0\}$.

[1] Рузакова Ольга Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: oruzakova@gmail.com

Определение 1. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, $p\in N_0$, если

(i) $\exists a\in R \quad \forall\mu>a \quad \mu\in\rho^L(M)$;

(ii) $\exists K>0 \quad \forall\mu_k>a \quad k=\overline{0,p}, \quad \forall n\in N$,

$$\max\left\{\left\|(R^L_{(\lambda,p)}(M))^n\right\|_{\mathrm{L}(X)},\left\|(L^L_{(\lambda,p)}(M))^n\right\|_{\mathrm{L}(Y)}\right\}\le\frac{K}{\prod_{k=0}^{p}(\mu_k-a)^n};$$

(iii) существует плотный в Y линеал $\dot{Y}$ такой, что

$$\left\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)y\right\|_Y\le\frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda-a)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k-a)},\quad \forall y\in\dot{Y},$$

$$\left\{X^t\in\mathrm{L}(X):t\in\bar{R}_+\right\},\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\right\|_{\mathrm{L}(X;Y)}\le\frac{K}{(\lambda-a)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k-a)}$$

при любых $\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p>a.$

Теорема 1. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда

(i) $X=X^0\oplus X^1, Y=Y^0\oplus Y^1$;

(ii) $L_k=L\big|_{X^k}\in\mathrm{L}\left(X^k;Y^k\right), M_k=L\big|_{domM_k}\in Cl\left(X^k;Y^k\right), domM_k=domM\cap X^k, k=0,1;$

(iii) существуют операторы $M_0^{-1}\in\mathrm{L}\left(Y^0;X^0\right)$ и $L_1^{-1}\in\mathrm{L}\left(Y^1;X^1\right)$;

(iv) существует сильно непрерывная полугруппа, разрешающая уравнение $L\dot{x}(t)=Mx(t)$;

(v) инфинитезимальным генератором C_0-непрерывной полугруппы $\{X_1^t=X^t\big|_{X^1}\in\mathrm{L}\left(X^1\right):t\in\bar{R}_+\}$ является оператор $S_1=L_1^{-1}M_1\in Cl\left(X^1\right)$;

(vi) оператор $H=M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не больше p.

Через $P(Q)$ обозначим проектор вдоль $X^0(Y^0)$ на $X^1(Y^1)$.

Основной результат

Предположим, что оператор M сильно (L,p)-радиален, $p\in N_0$, тогда согласно теореме 1 уравнение (1) редуцируется к системе двух уравнений

$$\dot{x}^1=L_1^{-1}x^1(t)+L_1^{-1}\sum_{i=1}^{m}b_i^1(t)u_i(t)+L_1^{-1}c^1(t),\tag{2}$$

$$H\dot{x}^0=x^0(t)+M_0^{-1}\sum_{i=1}^{m}b_i^0(t)u_i(t)+M_0^{-1}c^0(t).\tag{3}$$

Здесь $b_i^1(t)=Qb_i(t)$, $c^1(t)=Qc(t)$, $b_i^0(t)=(I-Q)b_i(t)$, $c^0(t)=(I-Q)c(t)$, $1\le i\le m$.

Решение задачи Коши для уравнения (1) имеет вид

$$x(t)=X^tx_0(t)+\int_0^tX^{t-s}L_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^1(s)u_i(s)+c^1(s)\right)ds-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^0(t)u_i(t)+M_0^{-1}c^0(t)\right)^k.$$

При этом первые два слагаемых дают решение уравнения (2), а последняя сумма – решение (3). Будем использовать вектор-функции управления $u_i(t)\in V(T)=C^{p+1}\left([0,T];R^m\right)$, а через $V_{x_0}(T)$ обозначим множество вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$(I-P)x_0=-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^0(t)u_i(t)+M_0^{-1}c^0(t)\right)^k\right)_{t=0}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=l}^{p}C_k^lH^kM_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(0)u_i^l(0)-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}c^{0(k)}(0),$$

которое необходимо для разрешимости задачи Коши.

Определение 1. Система (1) называется ε-управляемой из любой точки в любую за время T, если для любых точек $x_0 \in domM, \tilde{\tilde{x}}_1 \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют управления $u_i(t) \in V_{x_0}(T)$ такие, что $\| x(T; x_0, u_i(t)) - \tilde{x}_1 \| \le \varepsilon$.

Лемма 1. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, вектор-функции $b_i^1(t), c^1(t) \in C([0,T]; Y^1)$, $1 \le i \le m$. Система (2) ε-управляема в том и только в том случае, когда для любых точек $x_0 \in domM, \tilde{\tilde{x}}_1 \in X$

$$X^T x_0(t) + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} c^1(s)\,ds - \tilde{x}_1 \in span\{X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1(s) : s \in [0,T], i = \overline{1,m}\}.$$

Доказательство. При $m = 1$ утверждение доказано в работе [5] на классе функций управления $L_1((0,T);Y)$. Сначала докажем необходимость. Обозначим

$$r = X^T x_0(t) + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} c^1(s)\,ds - \tilde{x}_1.$$

По условию существует $u(t)$, такое, что

$$\left\| r + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} \sum_{i=1}^m b_i^1(s) u_i(s)\,ds \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждому разбиению $0 = s_0 \le s_1 \le ... \le s_N = T$ отрезка $[0,T]$, сопоставим такой набор чисел $\{\theta_{ji}\}_{j=0}^{N-1}$, $s_j \le \theta_{ji} \le s_{j+1}$, чтобы суммы $\sum_{j=1}^{N-1} |u_i(\theta_{ji})| \Delta s_j$ являлись нижними суммами Дарбу интегралов $\int_0^T |u_i(s)|\,ds$ для всех $i = 1,...,m$. В силу непрерывности подынтегральной функции можно понимать интеграл $\int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} \sum_{i=1}^m b_i^1(s) u_i(s)\,ds$ в смысле Римана и подобрать такие точки разбиения $\{s_{ji}\}_{j=0}^{N-1}$ отрезка $[0,T]$, чтобы было

$$\left\| \sum_{j=0}^{N-1} X^{T-\theta_{ji}} L_1^{-1} b_i^1(\theta_{ji}) u_i(\theta_{ji}) \Delta s_{ji} - \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1(s) u_i(s)\,ds \right\| \le \frac{\varepsilon}{2m}$$

для всех $i = 1,...,m$. Тогда

$$\left\| r + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{N-1} X^{T-\theta_{ji}} L_1^{-1} b_i^1(\theta_{ji}) u_i(\theta_{ji}) \Delta s_{ji} \right\| \le \left\| r + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} \sum_{i=1}^m b_i^1(s) u_i(s)\,ds \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{N-1} X^{T-\theta_{ji}} L_1^{-1} b_i^1(\theta_{ji}) u_i(\theta_{ji}) \Delta s_{ji} - \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1(s) u_i(s)\,ds \right) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon m}{2m} = \varepsilon.$$

Получили

$$\left\| r - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{N-1} X^{T-\theta_{ji}} L_1^{-1} b_i^1(\theta_{ji}) \left[-u_i(\theta_{ji}) \Delta s_{ji} \right] \right\| \le \varepsilon,$$

поэтому $r \in span\left\{ X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1(s) : s \in [0,T], 1 \le i \le m \right\}$.

Докажем в обратную сторону. Пусть $r \in span\left\{ X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1(s) : s \in [0,T], 1 \le i \le m \right\}$, тогда существуют N_i, μ_{ni}, t_{ni}, $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le T$ такие, что

$$\left\| r - \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i} \mu_{ni} X^{T-t_{ni}} L_1^{-1} b_i^1\left(t_{ni}\right) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Не умаляя общности, будем считать далее $N_i \ge 2, \mu_{ni} \ne 0$. Введем функцию $\varphi(s,\alpha,\beta)$, $s \ge 0$, $0 \le \alpha < \beta$,

$$\varphi(s,\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & s \in [\alpha;\beta], \\ 0, & s \notin [\alpha;\beta]. \end{cases}$$

Положим $\alpha_{ni} = t_{ni}$ при $n = 1,2,...,N_i - 1$ и $\beta_{N_i i} = t_{N_i i}$. Можно подобрать β_{ni}, $n = 1,2,...,N_i - 1$ и $\alpha_{N_i i}$, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| \frac{1}{\beta_{ni} - \alpha_{ni}} \int_{\alpha_{ni}}^{\beta_{ni}} X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1\left(s\right) ds - X^{T-t_{ni}} L_1^{-1} b_i^1\left(t_{ni}\right) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2\,|\,\mu_{ni}\,|\,N_i m}$$

и $[\alpha_{ni};\beta_{ni}] \subset [0,T]$ для всех $i = 1,...,m$. Эти неравенства можно переписать в виде

$$\left\| \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1\left(s\right) \varphi(s,\alpha_{ni},\beta_{ni}) ds - X^{T-t_{ni}} L_1^{-1} b_i^1\left(t_{ni}\right) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2\,|\,\mu_{ni}\,|\,N_i m}.$$

Пусть $u_i(s) = -\sum_{n=1}^{N_i} \mu_{ni} \varphi(s,\alpha_{ni},\beta_{ni})$ для всех $i = 1,...,m$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i} \mu_{ni} X^{T-t_{ni}} L_1^{-1} b_i^1\left(t_{ni}\right) + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} b_i^1\left(s\right) u_i\left(s\right) ds \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i} \mu_{ni} \left(X^{T-t_{ni}} L_1^{-1} b_i^1\left(t_{ni}\right) - \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1\left(s\right) \varphi(s,\alpha_{ni},\beta_{ni}) ds \right) \right\| \le \left\| \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i} |\mu_{ni}| \frac{\varepsilon}{2\,|\,\mu_{ni}\,|\,N_i m} \right\| \le \varepsilon,$$

Вместе с (4) получаем

$$\left\| r + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} b_i^1\left(s\right) u_i\left(s\right) ds \right\| \le \varepsilon,$$

то есть $\| x(T;x_0,u_i(t)) - \tilde{x}_1 \| \le \varepsilon$.

Построенное при доказательстве достаточности управление разрывно. Учитывая, однако, что $\overline{C^{p+1}[0,T]} = L_1[0,T]$, можно установить существование вектор-функций управления $v_i\left(t\right) \in V_{x_0}\left(T\right)$ таких, что $\| x(T;x_0,v_i(t)) - \tilde{x}_1 \| \le \varepsilon$.

Следствие 1. Пусть оператор M сильно $\left(L,p\right)$-радиален, вектор-функции $b_i^1\left(t\right), c^1(t) \in C([0,T];Y^1)$, $1 \le i \le m$. Система (2) ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда $span\left\{ X^{T-s} L_1^{-1} b_i^1\left(s\right) : s \in \left[0,T\right], i = \overline{1,m} \right\} = X^1$.

Доказательство. Пусть система (2) ε-управляема из нуля. Для любого $\tilde{x}_1 \in X$ возьмем

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 - \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} c^1\left(s\right) ds.$$

Тогда

$$\left\| x\left(T;0,u_i\left(t\right)\right) - \tilde{x}_1 \right\| = \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^1\left(s\right) u_i\left(s\right) + c^1\left(s\right) \right) ds - \tilde{x}_1 \right\| \le \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^1\left(s\right) u_i\left(s\right) \right) ds - \tilde{\tilde{x}}_2 \right\| \le \varepsilon.$$

Откуда получаем требуемое в силу произвольности $\tilde{x}_1$, а значит, и $\tilde{\tilde{x}}_2 \in X$. Обратное утверждение сразу следует из леммы 1.

Теорема 2. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, вектор-функции $b_i^0(t)\,,c^0(t)\in C^{p+1}([0,T];Y^0)$, $1\le i\le m$. Система (3) ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда пространство X^0 не более чем $(p+1)$-мерно, а система векторов $\left\{\sum\limits_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T),0\le l\le p,1\le i\le m\right\}$ является в нем базисом.

Доказательство. Решение уравнения (3) имеет вид

$$x(t)=-\sum_{k=0}^{p}H^k M_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^0(t)u_i(t)+M_0^{-1}c^0(t)\right)^k=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}u_i^l(t)\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(t)-\sum_{k=0}^{p}H^k M_0^{-1}c^{0(k)}(t).$$

Обозначим соответствующие $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$ функции управления через $u_n(t)$, значения $u_{in}^{(l)}(T)=\alpha_{in}^l,\quad 0\le l\le p,\,1\le i\le m,n\in N.$

Из ε-управляемости системы следует, что при всех $\tilde{x}_1\in X^0$ и любых $n\in N$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}\alpha_{in}^l\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T)-\sum_{k=0}^{p}H^k M_0^{-1}c^{0(k)}(T)-\tilde{x}_1\right\|<\frac{1}{n}.$$

Возьмем $\tilde{x}_1=\sum\limits_{k=0}^{p}H^k M_0^{-1}c^{0(k)}(t)-\tilde{\tilde{x}}_2$ при некотором $\tilde{\tilde{x}}_2\in X^0$ и получим

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}\alpha_{in}^l\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T)-\tilde{\tilde{x}}_2\right\|<\frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=l}^{p}\alpha_{in}^l C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T)=\tilde{\tilde{x}}_2$$

и в силу произвольности $\tilde{\tilde{x}}_2\in X^0$ имеем

$$X^0=\overline{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T),0\le l\le p,1\le i\le m\right\}=$$

$$=\overline{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T),0\le l\le p,1\le i\le m\right\},$$

поскольку система векторов конечна.

Пусть для любого $x\in domM_0$ существуют $c_i^l\in R,0\le l\le p,1\le i\le m$, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{p}c_i^l\sum_{k=l}^{p}C_k^l H^k M_0^{-1}b_i^{0(k-l)}(T).$$

Взяв функции управления

$$u_i(t)=\sum_{l=0}^{p}c_i^l\frac{(t-T)^l}{l!},\quad 1\le i\le m,$$

получаем требуемое.

Теорема 3. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, вектор-функции $b_i^1(t)\,,c^1(t)\in C([0,T];Y^1)$, $b_i^0(t)\,,c^0(t)\in C^{p+1}([0,T];Y^0)$, $1\le i\le m$. Если система (1) ε-управляема за время T, тогда $span\left\{X^{T-s}L_1^{-1}b_i^1(s):s\in[0,T],i=\overline{1,m}\right\}=X^1$, пространство X^0 не более чем

$(p+1)$-мерно, а система векторов $\left\{\sum_{k=l}^{p} C_k^l H^k M_0^{-1} b_i^{0(k-l)}(T),\ 0 \le l \le p,\ 1 \le i \le m\right\}$ является в нем базисом.

Замечание 1. Обратное утверждение к теореме 2 не имеет места, поскольку в данной постановке задачи одни и те же функции одновременно управляют решениями систем (2) и (3).

Пример 1. Рассмотрим алгебро-дифференциальную систему уравнений с частными производными

$$v_{1t} = v_1 + \sum_{i=1}^{m'} b_i^1(x,t)u_i(t) + c(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times R_+,$$

$$v_{2t} = v_2 + \sum_{i=1}^{m'} b_i^2(x,t)u_i(t) + c(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times R_+, \tag{5}$$

$$v_{3t} = v_3 + \sum_{i=1}^{m'} b_i^3(x,t)u_i(t) + c(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times R_+,$$

$b_i^j(x,t) \in L_2(\Omega),\ j = 1,2,3$ и начально-краевую задачу для них

$$\mu v_i + \frac{\partial}{\partial n} v_i = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R_+, \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

$$v_i(x,0) = v_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{7}$$

Пространство $X^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ бесконечномерно. Поэтому необходимое условие теоремы 3 не выполняется, значит, система (5)–(7) не управляема.

Пример 2.

Пусть $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$, $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} d_j \lambda^j$, $n \le m$, $c_i, d_j \in R$, $c_n \ne 0$, $d_m \ne 0$, R^n – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, набор операторов $A, B_1, \ldots, B_r$ – регулярно эллиптический, где

$$(Av)(x) = \sum_{|\alpha| \le 2r} a_\alpha(x) D^\alpha v(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l v)(x) = \sum_{|\alpha| \le r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha v(x), \quad b_{l\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = \overline{1,r}.$$

Определим замкнутый оператор $A_1 : W_{2,\{B_l\}}^{2r}(\Omega) \to L_2(\Omega), A_1 v = Av, v \in domA_1$ и потребуем его самосопряженности и ограниченности справа спектра $\sigma(A_1)$. Через $\{\varphi_k : k \in N\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in N\}$ с учетом их кратности. Положим $X = \{v \in W_2^{2rn}(\Omega) : B_l A^k v(x) = 0, k = \overline{0,n-1}, l = \overline{1,r}, x \in \partial\Omega\}$, $Y = L_2(\Omega)$, $L = P(A)$, $M = Q(A)$, $domM = \{v \in W_2^{2rm}(\Omega) : B_l A^k v(x) = 0, k = \overline{0,m-1}, l = \overline{1,r}, x \in \partial\Omega\}$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$P(A)v_t(x,t) = Q(A)v(x,t) + \sum_{i=1}^{m'} b_i(x,t)u_i(t) + c(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{8}$$

$$B_l A^k v(x,t) = 0, \quad k = \overline{0,n-1}, l = \overline{1,r}, \quad x \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{9}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

В работе [12] показано, что если числа λ_k не являются одновременно корнями многочленов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$, то оператор M сильно $(L,0)$-радиален. При этом система (8) имеет вид

$$0 = Q(\lambda_k)v_k(t) + \sum_{i=1}^{m'} b_{ik}(t)u_i(t) + c_k(t), \quad P(\lambda_k) = 0, \tag{11}$$

где нижний индекс k означает коэффициент Фурье соответствующей функции при разложении по базису $\{\varphi_k : k \in N\}$.

Теорема 4. Пусть числа λ_k не являются одновременно корнями многочленов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. Тогда система (11) ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда сумма кратностей собственных значений оператора A_1, являющихся корнями многочлена $P(\lambda)$, не превосходит числа m' и при этом нет собственных функций, соответствующих этим собственным значениям, ортогональных сразу всем функциям $b_i, 1 \le i \le m'$ в смысле $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Учитывая сильную $(L,0)$-радиальность оператора M достаточно сослаться на теорему 2.

Следствие 2. Пусть числа λ_k не являются одновременно корнями многочленов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. Если система (8)–(10) ε-управляема за время T, то сумма кратностей собственных значений оператора A_1, являющихся корнями многочлена $P(\lambda)$, не превосходит числа m' и при этом нет собственных функций, соответствующих этим собственным значениям, ортогональных сразу всем функциям $b_i, 1 \le i \le m'$ в смысле $L_2(\Omega)$.

Литература

1. Шолохович, Ф.А. Об управляемости линейных динамических систем / Ф.А. Шолохович // Изв. УрГУ. – 1998. – № 10. – Вып. 1. – С. 103–126.

2. Куржанский, А.Б. К управляемости в банаховых пространствах / А.Б. Куржанский // Дифференц. уравн. – 1969. – Т. 5, № 9. – С. 1715–1718.

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP. – 2003. – 216 p.

4. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1994. – Т. 337, № 5. – С. 581–584.

5. Нефедов, С.А. Критерий ε-управляемости линейной системы / С.А. Нефедов, Ф.А. Шолохович // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 653–657.

6. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16 (192). – С. 116–120.

7. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

8. Федоров, В.Е. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1137–1139.

9. Федоров, В.Е. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 7. – С. 54–57.

10. Федоров, В.Е. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74, № 4. – С. 618–628.

11. Рузакова, О.А. Об управляемости линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором / О.А. Рузакова, Е.А. Олейник // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 11. – № 5 (264). – С. 54–61.

12. Федоров, В.Е. Сильно непрерывные полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН. – 2000. – С. 32–40.

Поступила в редакцию 12 июля 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 4, pp. 5–12

CONTROLLABILITY OF A NON-CLASSICAL MODEL OF MATHEMATICAL PHYSICS

O.A. Ruzakova[1]

Necessary conditions of ε-controllability for the class of degenerate linear differential equations in Banach space with respect to the time derivative and with the radially bounded operator on the right side are obtained. The results are effectively applied to the research of ε-controllability of initial boundary-value problems for the non-classical equations of mathematical physics.

Keywords: controllability; semigroup of operators; equations of Sobolev type.

References

1. Sholokhovich F.A. *Izvestiya Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.* 1998. no. 10. Issue 1. pp. 103–126. (in Russ.).
2. Kurzhanskiy A.B. *Differentsial'nye uravneniya.* 1969. Vol. 5, no. 9. pp. 1715–1718. (in Russ.).
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP. 2003. 216 p.
4. Sviridyuk G.A. *DAN.* 1994. Vol. 337, no. 5. pp. 581–584. (in Russ.).
5. Nefedov S.A., Sholokhovich F.A. *Differentsial'nye uravneniya.* 1976. Vol. 12, no. 4. pp. 653–657. (in Russ.).
6. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov (A new approach to measurement of dynamically perturbed signals). *Bulletin of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*". 2010. no. 16 (192). C. 116–120. (in Russ.).
7. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical solution of the optimal measurement problem. *Automation and Remote Control.* 2012. Vol. 73. no. 1. pp. 97–104.
8. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. *Differentsial'nye uravneniya.* 2002. Vol. 38, no. 8. pp. 1137–1139. (in Russ.).
9. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. *Izvestiya vuzov. Matematika.* 2002. no. 7. pp. 54–57. (in Russ.).
10. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. *Matematicheskie zametki.* 2003. Vol. 74, no. 4. pp. 618–628. (in Russ.).
11. Ruzakova O.A., Oleynik E.A. Ob upravlyaemosti lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa s otnositel'no sektorial'nym operatorom (On the controllability of linear sobolev type equations with relatively sectorial operator). *Bulletin of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software".* 2012. Issue 11. no. 5 (264). pp. 54–61. (in Russ.).
12. Fedorov V.E. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* (Non-classic equations of mathematical physics). Novosibirsk, IM SO RAN Publ. 2000. pp. 32–40. (in Russ.).

Received 12 July 2014

[1] Ruzakova Olga Aleksandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mechanics and Mathematical Department, South Ural State University.
E-mail: oruzakova@gmail.com