

## О ДИНАМИКЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТРУБКЕ С ЭЛАСТИЧНЫМИ СТЕНКАМИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Я.Р. Баязитова<sup>1</sup>, И.К. Гималтдинов<sup>2</sup>

Предложена теоретическая модель, описывающая динамику акустических волн в двухфазной жидкости в трубке с эластичными стенками. Учитывается радиальная инерция стенок трубки.

Ключевые слова: акустическая волна; эластичность; двухфазная жидкость; фазовая скорость; коэффициент затухания.

### Введение

Первые работы по акустическому анализу двухфазных жидкостей отмечены еще в конце XX века. Советскими учеными под руководством И.С. Кольцовой были проведены экспериментальные исследования затухания ультразвуковых волн в маловязких жидкостях с газовыми пузырьками, полученными электролитическим методом, результаты исследований отражены в работе [1]. Обнаружено, что в области резонанса пузырьков концентрационная зависимость коэффициента дополнительного затухания является функцией от частоты, причем до резонансной частоты и после резонансной частоты концентрационная зависимость коэффициента дополнительного затухания линейна. Данные, полученные учеными, в дальнейшем служили ориентиром для теоретических исследований в этой области, опубликовавших свой труд в работах [2–5] и др.

В данной статье проведен акустический анализ волн в двухфазной жидкости, распространяющихся в трубке с эластичными стенками, выявлены некоторые особенности динамики звуковых волн.

Рассмотрим одномерные волновые возмущения, распространяющиеся в трубке малого радиуса, заполненной пузырьковой жидкостью. Стенки трубки считаем эластичными.

На рис. 1 представлено схематическое изображение системы, которое иллюстрирует трубку толщиной  $h$ , длиной  $L$  и радиусом  $a_0$  ( $L \gg a_0$ ). Возмущения в системе возникают вследствие воздействия давлением по торцу трубки.

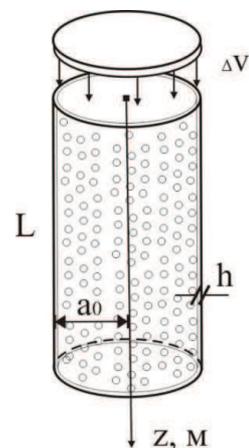


Рис. 1. Схема задачи

### Основные уравнения

Запишем основные уравнения для описания движения волн в пузырьковой жидкости в трубке с эластичными стенками с учетом радиальной инерции. Макроскопические уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов в односкоростном приближении имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho_l S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l v S)}{\partial x} = 0, \quad i = l, g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(nS)}{\partial t} + \frac{\partial(nvS)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 S)}{\partial x} = -S \frac{\partial \rho_l}{\partial x}. \quad (3)$$

Запишем кинематические соотношения для газожидкостной смеси:

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Баязитова Яна Раифовна – аспирант, кафедра прикладной математики и механики, Башкирский государственный университет, филиал в г. Стерлитамаке.

Е-mail: yana.bayazitova@mail.ru

<sup>2</sup> Гималтдинов Ильяс Кадирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Башкирский государственный университет, филиал в г. Стерлитамаке.

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad (5)$$

$$\rho = \rho_g + \rho_l,$$

$$\alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n \quad (6)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения,  $n$  – число пузырьков,  $v$  – скорость,  $a$  – радиус пузырьков,  $\alpha_i$  – объемное содержание фазы,  $\rho_i$  – плотность фазы.

Жидкость считаем акустически сжимаемой, газ – калорически совершенным:

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad (7)$$

$$p_g = \rho_g^0 R T_g,$$

где  $p_l$  – давление жидкости,  $p_0$  – начальное давление жидкости,  $C_l$  – скорость звука в жидкости,  $p_g$  – давление газа,  $R$  – газовая постоянная,  $T_g$  – температура газа.

При описании радиального движения будем полагать, что жидкость несжимаема, скорость радиального движения складывается из двух слагаемых:

$$w = \frac{da}{dt}, w = w_R + w_A.$$

Компонента  $w_R$  описывается уравнением Рейля–Ламба, соответствующим пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{(p_g - p_l)}{\rho_l^0}, \quad (8)$$

где  $\nu_l$  – кинематическая вязкость жидкости.

Добавка  $w_A$  определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса  $a$  в несущей жидкости в акустическом приближении:  $w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}$ .

Уравнение для давления внутри пузырьков записывается в виде:

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_0}{a_0} \frac{da}{dt} - \frac{3(\gamma-1)q}{a_0},$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа.

Уравнение для интенсивности межфазного теплообмена после линеаризации примет вид:

$$q = -\lambda_g \left( \frac{\partial T_g}{\partial r} \right)_{a_0}.$$

Температура газа в пузырьках меняется по закону:  $T_g = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 T_0$ .

В случае учета инерционных свойств стенок трубки считаем, что радиус трубки меняется по закону:

$$\rho_w \left( (b_0 + h_0)^2 - b_0^2 \right) \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = b(p - p_0) - E \frac{h_0}{b_0} (b - b_0), \quad (9)$$

где  $\rho_w$  – плотность материала трубки,  $b_0$  – начальное значение внутреннего радиуса трубки,  $h_0$  – толщина стенки трубки,  $E$  – модуль Юнга.

В случае пренебрежения инерцией стенок трубки при относительно небольших изменениях площади сечения трубки используем формулу связи избыточного давления в трубке и площади поперечного сечения в виде:

$$\Delta p_l = \frac{Eh}{2a_0} \Delta S.$$

### Начальные и граничные условия

Для иницирования волны в системе на границе  $z = 0$  воздействует жесткий ударник по закону:

$$v_0(t) = \begin{cases} \Delta v_0 \exp\left(-\left(\frac{t-t_*/2}{t_*/6}\right)^2\right), & 0 < t < t_* \\ 0, & t > t_* \end{cases},$$

где  $\Delta v_0$  – амплитуда скорости,  $t_*$  – характерная протяженность импульса.

На поверхности раздела фаз запишем уравнение теплового баланса

$$\lambda_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial r}\right)_a = \lambda_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial r}\right)_a.$$

Так же на поверхности раздела фаз ( $r = a_0$ ) зададим следующие граничные условия для системы:

$$T_g = T_l = T_a, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = w_l = w_g = w.$$

Кроме того

$$\frac{\partial T_g}{\partial r} = 0 (r = 0), T_l = 0 (r = \infty).$$

### Линеаризованная система уравнений:

Для линеаризации уравнений будем считать, что изменение параметров по времени и координате происходит с минимальным скачком их соответственных значений.

Из уравнения масс (1) с учетом кинематических соотношений (4)–(6), условия (7) и уравнения сохранения числа пузырьков (2), после линеаризации и некоторых преобразований получено соотношение:

$$\alpha_{l0}^2 \frac{\partial \rho_{l0}}{\partial t} - \frac{3\alpha_{l0}\alpha_{g0}\rho_{l0}^0}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\alpha_{l0}\rho_{l0}^0}{S_0} \frac{\partial S}{\partial t} + \alpha_{l0}\rho_{l0}^0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Продифференцируем уравнение (10) по времени; уравнение импульсов (3) после линеаризации продифференцируем по координате, подставим его в (10). В результате преобразований имеем:

$$\frac{\alpha_{l0}^2}{C_l^2} \frac{\partial^2 p_l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_l}{\partial x^2} - \frac{3\alpha_{l0}\alpha_{g0}\rho_{l0}^0}{a_0} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{\alpha_{l0}\rho_{l0}^0}{S_0} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0, \quad (11)$$

где  $S = \pi b^2$ .

Полученное уравнение при отсутствии пузырьков ( $\alpha_{g0} = 0$ ) и неизменной площади поперечного сечения ( $S = \text{const}$ ) совпадает с обычным волновым уравнением.

Уравнения пульсационного движения пузырька (8) и изменения радиуса трубки (9) после линеаризации принимают вид:

$$a_0 \rho_{l0}^0 \frac{\partial^2 a'}{\partial t^2} + 4 \frac{v_l \rho_{l0}^0}{a_0} \frac{\partial a'}{\partial t} = p_g' - p_l', \quad (12)$$

$$\rho_w \left( (b_0 + h_0)^2 - b_0^2 \right) \frac{\partial^2 b'}{\partial t^2} = b_0 p_l' - \frac{E h_0}{b_0} b'. \quad (13)$$

Уравнение состояния:

$$\frac{P_g'}{P_{g0}} = \frac{\rho_{g0}'}{\rho_{g0}^0} + \frac{T_g'}{T_{g0}}. \quad (14)$$

Уравнения теплопроводности:

$$\rho_{l0}^0 C_l \frac{\partial T_l'}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_l r^2 \frac{\partial T_l'}{\partial r} \right), \quad (r > a_0), \quad (15)$$

$$\rho_{g0}^0 C_g \frac{\partial T_g'}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_g r^2 \frac{\partial T_g'}{\partial r} \right) + \frac{\partial P_g}{\partial t}, \quad (r < a_0). \quad (16)$$

Уравнение для давления в газе:

$$\frac{\partial P_g}{\partial t} = -\frac{3\gamma p_0}{a_0} \frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{3(\gamma-1)\lambda_g}{a_0} \left( \frac{\partial T_g'}{\partial r} \right)_a. \quad (17)$$

### Результаты расчетов

Решение приведенной системы уравнений (11)–(17) ищем в виде затухающей бегущей волны

$$p_l, a, v, p_g \exp[(Kx - \omega t)i], \quad T_l = T_l(r) \exp[(Kx - \omega t)i], \quad b = b_m \exp[(\omega t)i], \quad (18)$$

$$K = k + i\sigma, \quad C_p = \frac{\omega}{k},$$

где  $K$  – волновое число,  $\omega$  – частота возмущений,  $\delta$  и  $C_p$  – соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость. Подставляя (18) в приведенную выше систему уравнений (11)–(17) и сокращая на экспоненту, имеем:

$$\left( \frac{K}{w} \right)^2 = \frac{\alpha_{l0}^2}{C_l^2} + \frac{3\alpha_{l0}\alpha_{g0}a_0(P_{lm} - P_{gm})}{(a_0^2\omega^2 + 4\nu_l i\omega)P_{lm}} + \frac{2\pi b_0^2 \alpha_{l0} \rho_{l0}}{S_0 \left( \frac{Eh_0}{b_0} - \rho_w \left( (b_0 + h_0)^2 - b_0^2 \right) w^2 \right)},$$

$$\left( \rho_{l0}^0 \omega^2 a_0^2 + 4\nu_l i\omega \rho_{l0}^0 \right) \frac{A_m}{a_0} = P_{lm} - P_{gm},$$

$$y_l^2 T_l = \frac{a_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) \quad (r > a_0),$$

$$y_g^2 T_g = \frac{a_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) + (1 - \gamma^{-1}) \frac{y_g^2 P_g T_0}{P_{g0}} \quad (r < a_0),$$

$$y_g^2 T_0 \frac{P_g}{P_{g0}} = -3\gamma y_g^2 T_0 \frac{A_m}{a_0} - \frac{3(\gamma-1)}{a_0} \left( \frac{\partial T_g}{\partial r} \right)_{a=a_0},$$

$$y_i = (-i\omega a_0^2 / \chi_i)^{1/2}, \quad \chi_g = \frac{\lambda_g}{\rho_{g0}^0 c_g}, \quad \chi_l = \frac{\lambda_l}{\rho_{l0}^0 c_l},$$

$$\lambda_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_a = \lambda_g \left( \frac{\partial T_g}{\partial r} \right)_a,$$

$$T_g = T_l = T_0, \quad (r = a_0),$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial r} = 0, \quad (r = 0),$$

$$T_l = 0, \quad (r = \infty).$$

где  $c_l$  – теплоемкость жидкости.

### Численный анализ

Расчеты проводились для следующих физико-химических параметров системы. Вода:  $\nu_l = 3,6 \cdot 10^3$  м<sup>2</sup>/с,  $c_l = 4200$  Дж/кг·К,  $\rho_l = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_l = 0,6$  м·кг/К·с<sup>3</sup>,  $C_l = 1500$  м/с,  $p_0 = 10^5$  Па. Воздух:  $p_g = 10^5$  Па,  $\alpha_g = 0,001$ ,  $\lambda_g = 0,026$  м·кг/К·с<sup>3</sup>,  $\rho_g = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_g = 1006$  Дж/кг·К. Труба

имеет следующие геометрические параметры:  $b_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  м,  $h_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м. Материал трубы – поликарбонат:  $\rho_s = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2,13 \cdot 10^9$  Па.

Для случая пузырьковой жидкости результаты расчетов представлены в виде графиков, выражающих зависимость коэффициента затухания  $\delta$  от частоты  $\omega$ .

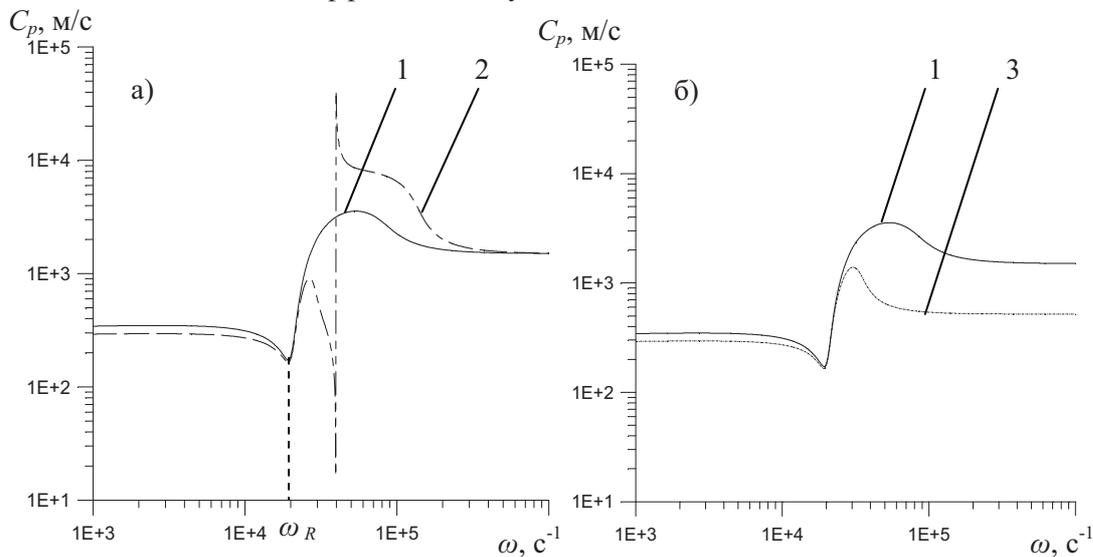


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости  $C_p$  от частоты  $\omega$

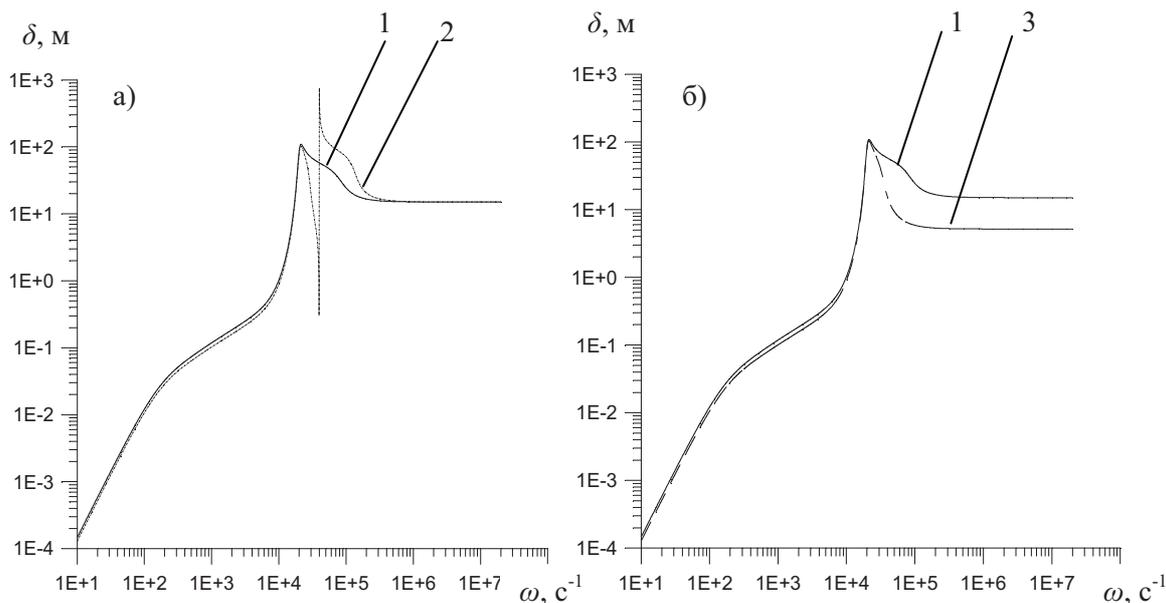


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания  $\delta$  от частоты  $\omega$

На рис. 2. представлены зависимости фазовой скорости  $C_p$  от частоты  $\omega$  для двухфазной жидкости. На рис. 2, а, б черная сплошная линия (1) соответствует случаю распространения акустических волн в трубке с «жесткими» стенками, штрихпунктирная линия (2) на рис. 2, а – случаю распространения акустических волн в трубе, стенки которой обладают инерционными и эластичными свойствами. Случаю распространения звуковых волн в безынерционной эластичной трубке соответствует пунктирная линия (3) на рис. 2, б. Видно, что в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ ) равновесная скорость акустических волн в пузырьковой среде (310 м/с), находящейся в трубке с «жесткими» стенками, чуть выше значения аналогичного параметра для волн в трубке с податливыми стенками, которая принимает значение 266 м/с вне зависимости от учета радиальной инерции стенок трубки. Радиальная инерция стенок трубки оказывает значительное влия-

ние на скорость и коэффициент затухания при частотах  $\omega$ , превышающих частоту Минаерта  $\omega_c$ : на рис. 2, а видно, что кривая (2) терпит разрыв вблизи частоты  $\omega = 4,43 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ , таким образом, для акустических волн в двухфазных системах, находящихся в эластичной трубке, стенки которой обладают радиальной инерцией, свойственна полоса непропускания – диапазон частот, при которых акустические волны не распространяются. Полоса непропускания в нашем случае составляет  $0,02 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Далее по рис. 2, а кривая в области высокочастотных колебаний ( $\omega \gg \omega_c$ ) выходит на стационарное значение фазовой скорости, называемое замороженным, которое близко к скорости звука в чистой жидкости (1500 м/с). Этому же значению достигает фазовая скорость после небольшого скачка по кривой (1). Для кривой (3) значение замороженной скорости значительно ниже – достигает 490 м/с.

На рис. 3, а, б представлены графики, выражающие коэффициенты затухания акустических волн в двухфазной жидкости, находящейся в трубке с «жесткими» стенками (1), эластичными стенками, обладающими массой (2), эластичными стенками без радиальной инерции (3). Очевидно наличие полосы непропускания для пунктирной кривой (2), идентичной наблюдаемой на рис. 2, а. В случае акустических волн в двухфазной жидкости в безынерционной эластичной трубке (линия 3) коэффициент затухания при частотах, превышающих частоту Минаерта  $\omega_c$ , оказывается меньше значений, соответствующих случаю акустических волн в двухфазной жидкости в «жесткой» трубке (линия 1).

По результатам исследований сформулировали следующие выводы:

1) для динамики акустических волн в двухфазных жидкостях, находящихся в трубке с эластичными стенками, обладающими радиальной инерцией, существует полоса непропускания. Значение фазовой скорости в низкочастотной области ниже аналогичного параметра для акустических волн в пузырьковой жидкости, распространяющихся в трубке с «жесткими» стенками. К тому же значения замороженных скоростей в обоих случаях едины;

2) в низкочастотной области значение фазовой скорости акустических волн в пузырьковой жидкости в трубке с эластичными стенками, не обладающими радиальной инерцией, несколько ниже, а коэффициент затухания близок по значению аналогичному параметру для акустических волн в пузырьковой жидкости в трубке с «жесткими» стенками. А в высокочастотной области фазовая скорость и коэффициент затухания акустических волн в трубке с эластичными стенками без радиальной инерции значительно ниже аналогичных параметров для акустических волн в пузырьковой жидкости в «жесткой» трубке.

### Литература

1. Ослабление ультразвуковых волн в маловязких жидкостях с газовыми пузырьками / И.С. Кольцова, Л.О. Крынский, И.Г. Михайлов, И.Е. Покровская // Акустический журнал. – 1979. – Т. 25, № 5. – С. 725–731.
2. Нигматулин, Р.И. Проявление сжимаемости несущей жидкости при распространении волн в пузырьковой среде // Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, Н.К. Вахитова / Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304, № 5. – С. 1077–1081.
3. Commander, K.W. Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments / K.W. Commander, A. Prosperetti // J. Acoust. Soc. Am. – 1989. – Vol. 85, № 2. – P. 732–746.
4. Гафиятов, Р.Н. Акустические волны в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками / Р.Н. Гафиятов // Труды института механики. Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). – 2012. – Т. 1, № 9. – С. 65–69.
5. Levitsky, S. Sound propagation in viscoelastic pipe with liquid-bubble mixture / S. Levitsky, R. Berman, J. Haddad // Acoust. Paris. – 2008. – P. 4385–4390.

*Поступила в редакцию 15 сентября 2014 г.*

## SOUND WAVES DYNAMICS IN A TUBE WITH ELASTIC WALLS FILLED WITH BUBBLY LIQUID

Ya.R. Bayazitova<sup>1</sup>, I.K. Gimaldinov<sup>2</sup>

The paper offers a theoretical model describing the dynamics of acoustic waves in two-phase fluid placed in a tube with elastic walls. Radial inertia of the tube walls was considered.

Stop band for the dynamics of acoustic waves in two-phase liquid placed in a tube with elastic walls having radial inertia was found. Phase velocity value in the low-frequency region is less than the phase velocity value for acoustic waves in a bubbly liquid in a tube with rigid walls. The values of frozen velocities in both cases are the same.

In a low-frequency region the value of the phase velocity of acoustic waves in a bubbly liquid in a tube with elastic walls with non-radial inertia is lower. The damping coefficient is almost the same as the one for acoustic waves in a bubbly liquid in a tube with rigid walls. In a high-frequency region phase velocity and damping coefficient of acoustic waves in a tube with elastic walls without radial inertia is much lower than the ones for acoustic waves in a bubbly liquid in a tube with rigid walls.

*Keywords: acoustic wave; elasticity; two-phase fluid; phase velocity; damping coefficient.*

### References

1. Kol'cova I.S., Krynskiy L.O., Mihajlov I.G., Pokrovskaja I.E. *Akusticheskij zhurnal*. 1979. Vol. 25, no. 5. pp. 725–731. (in Russ.).
2. Nigmatulin R.I., Shagapov V. Sh., Vahitova N.K. *Dokl. AN SSSR*. 1989. Vol. 304, no. 5. pp. 1077–1081. (in Russ.).
3. Commander K.W., Prosperetti A. Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. Vol. 85, no. 2. pp. 732–746.
4. Gafijatov R.N. Akusticheskie volny v dvuhfrakcionnyh smesjah zhidkosti s parogazovymi puzyr'kami (Acoustic waves in two fractional mixtures of liquid with steam bubbles). *Trudy instituta mehaniki. Materialy V Rossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem «Mnogofaznye sistemy: teorija i prilozhenija», posvjashhennoj 20-letiju so dnja osnovanija Instituta mehaniki im. R.R. Mavljutova UNC RAN, Ufa, 2–5 ijulja 2012.* (Science papers of the Institute of Mechanics. Proceedings of the V All-Russian conference with international participation "Multiphase Systems: Theory and Applications", devoted to the 20th anniversary of the founding of the Institute of Mechanics of R.R. Mavlyutov USC RAS, Ufa city, July 2–5, 2012. Vol. 1, no. 9. pp. 65–69. (in Russ.).
5. Berman R., Haddad J. Sound propagation in viscoelastic pipe with liquid-bubble mixture. *Acoust. Paris*. 2008. pp. 4385–4390.

*Received 15 September 2014*

<sup>1</sup> Bayazitova Yana Razifovna is Post-graduate Student, Applied Mathematics and Mechanics Department, Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia.

E-mail: yana.bayazitova@mail.ru

<sup>2</sup> Gimaldinov Il'yas Kadirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General of Applied Mathematics and Mechanics Department, Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia.