

ВКЛАД РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В УШИРЕНИЕ КРИВОЙ КЛАССИЧЕСКОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА В КВАЗИДВУХ - И ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Т.Т. Муратов¹

Получены асимптотические формулы для уширения кривой поглощения классического циклотронного резонанса (ЦР) в условиях резонансного рассеяния электронов на атомах примеси. Расчеты проведены с учетом распределения Максвелла. Оценки показывают, что возможный резонансный уровень ($\sim 0,06$ мэВ) в квазидвумерных полупроводниках на порядок и два меньше чем в объемных (порядка мэВ). Это указывает на то, что область преобладания резонансного рассеяния в квазидвумерных полупроводниках менее 1 К. Зафиксировано температурное «плато» $5 \div 12$ К в 2D спектре поглощения, соответствующее «области непрозрачности». Обсуждаются пределы применимости полученных результатов.

Ключевые слова: циклотронный резонанс; уширение; резонансное рассеяние; асимптотические формулы.

Введение

При очень низких ($T < 10$ К) температурах в полупроводниках часто реализуются условия, когда основным механизмом рассеяния свободных электронов (дырок) становится рассеяние на нейтральных атомах примеси. Мелкая примесь имеет целый спектр возбужденных s -состояний и если один отщепленный s -уровень примыкает к дну зоны проводимости E_C , то возможно резонансное рассеяние носителей тока [1]. В принципе, это позволяет заменить атом мелкой примеси некоторым модельным потенциалом. Для объемных полупроводников таким модельным потенциалом может быть трехмерная прямоугольная потенциальная яма, для квазидвумерных – двумерная прямоугольная яма.

S -резонансный уровень, локализованный вблизи E_C , оказывает существенное влияние на процессы переноса энергии и заряда носителями при различных внешних условиях [2], например, при наличии слабого магнитного поля электронная проводимость невырожденного полупроводника достигает максимума ($T \geq 1$ К, $H \leq 200$ Э), причем слабое H -поле учитывается своеобразно – как приращение радиуса резонансного центра [3]. Подход, развитый в работе [3], в принципе позволяет исследовать влияние резонансного рассеяния носителей тока на электронные явления переноса и при условиях классического предела циклотронного резонанса (ЦР). Однако в работах [2, 3] s -резонансный уровень строго фиксирован и имеет статичный характер, что затрудняет зондирование произвольных примесных глубин в условиях классического ЦР. Эта трудность устранена в работе [4], в которой получены формулы для полуширины кривой поглощения ЦР, причем они выражены через длину рассеяния и, следовательно, справедливы для произвольного потенциала примеси конечного радиуса действия. Формулы для времени релаксации также выражены через длины 2D- и 3D рассеяния.

В невырожденных полупроводниках длина волны электрона $\lambda \propto 1/\sqrt{T}$ и при сверхнизких температурах существенны квантово-статистические поправки. В области температур, соответствующих резонансным глубинам примесного потенциала, можно ограничиться квазиклассическим рассмотрением (см. прим. 1), но и здесь следует учесть статистику. Дело в том, что время релаксации τ есть среднее время свободного пробега, т.е. время между двумя актами рассеяния. Оно определяется длиной свободного пробега и полной скоростью электрона, но не скоростью дрейфа в магнитном поле. Полная скорость зависит от E – кинетической энергии электрона. Тем самым $\tau = \tau(E)$. Эта зависимость усложняется в том случае, когда длина свободного пробега

¹ Муратов Темур Ташкабаевич – соискатель, кафедра методики преподавания физики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан.

E-mail: tgpu_info@edu.uz, temur-muratov@yandex.ru

также зависит от E . Поэтому для нахождения $\delta\omega = |\omega - \omega_C|$ – уширения линии ЦР, как и множества других параметров, необходимо усреднять как $\tau(E)$, так и $1/\tau(E)$, а также и другие величины, с учетом функции распределения электронов по энергии. Однако в работе [4] время релаксации, а вслед за этим и полуширина линии поглощения $\delta\omega_{Nd}(E) = 1/\tau_{2d,3d}(E)$ лишь оцениваются характерным параметром $\tilde{k} = \sqrt{2m^*k_B T}/\hbar$ (m^* – эффективная масса электрона, k_B – константа Больцмана). Такой подход, на наш взгляд, является не вполне корректным и требует проведения более детального расчета.

Как следует из классической статистики, нет необходимости, чтобы энергия электрона была близка к резонансному уровню модельного потенциала. Игнорирование этого факта [4] может привести к неточным выводам. Вывод о том, что $\delta\omega_{3d} \propto T^{-1/2}$ [4], сомнителен и требует тщательного анализа. Замена волнового числа тепловым параметром не позволяет учесть более быстрые и более медленные электроны, а ведь именно они формируют хвост распределения Максвелла в области очень низких и высоких температур. Представление о невзаимодействующих электронах также крайне упрощенное [4]. При таком подходе теряет смысл перераспределение энергии между степенями свободы при различных механизмах рассеяния носителей.

В предлагаемой работе производится расчет полуширины кривой поглощения при резонансном рассеянии электронов на нейтральных примесях в квазидвух- и трехмерных полупроводниках путем усреднения с максвелловским весом. Уточняются пределы применимости полученных формул. Частота внешнего электрического поля весьма близка к циклотронной частоте, так что влияние нейтральных примесей, ионов примеси и акустических фононов сводится, как правило, к нарушению (размытию) спектра поглощения, т.е. как если бы не было заряженных и нейтральных примесей, фононов и т.д., то и не было бы уширения. Ясно, что в рамках вычислений, проводимых с использованием формулы Эргинсо [5], нельзя получить формулу для уширения кривой классического ЦР ($\tau = \text{const}$). Анализируются особенности в спектре поглощения.

1. Расчет асимптотики уширения линии циклотронного резонанса

Циклотронный резонанс имеет простой физический смысл. Электрон в H -поле движется по окружности с циклотронной частотой ω_C . Если в плоскости этой окружности включить электрическое поле, причем изменять его направление так, чтобы оно совпадало с направлением движения электрона, то электрон все время будет забирать энергию от поля. В этом случае, как и при движении в постоянном E -поле, электрон ускоряется до тех пор, пока не столкнется с атомом примеси. Поэтому в обоих случаях частота соударения электрона с атомом порядка $1/\tau$. Если $\omega \neq \omega_C$, т.е. оптимальные условия резонанса с полем не выполняются, проводимость значительно ниже. При точном резонансе с полем проводимость достигает статического режима. Именно в этом режиме существенно влияние резонансного рассеяния носителей на уширение линии ЦР. Электроны, выбывшие из резонанса с E -полем, уже резонируют на примесных атомах. При этом предполагается, что мощности потенциала мелкой примеси недостаточно для образования связанного состояния, причем тепловое размытие примесных уровней на порядок и два меньше их кулоновских расстояний.

Рассмотрим q2D- и 3D-полупроводник, находящийся в скрещенных однородном магнитном H и резонансном электрическом $E(t) = E_0 \exp(i\omega t)$ полях. Пусть невырожденный газ слабозадействующих между собой электронов рассеивается на хаотически расположенных нейтральных центрах в условиях классического ЦР. Концентрацию примесей считаем малой, т.е. одновременное рассеяние носителей на двух и более центрах не учитываем, что соответствует обычному газовому приближению [6]. Амплитуды и сечения резонансного двух- и трехмерного рассеяния медленного электрона ($kr \ll 1$) определяются стандартно [7, с. 638–639]:

$$f_{2d}^{m=0}(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{1}{\ln\left(\frac{2i}{\gamma k a_{2d}}\right)}, \quad \sigma_{2d}(k) = 2\pi \left| f_{2d}^{m=0}(k) \right|^2 = \frac{\pi^2}{k} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}}, \quad (1)$$

$$f_{3d}^{l=0}(k) = -\frac{1}{ik + 1/a_{3d}}, \quad \sigma_{3d}(k) = 4\pi \left| f_{3d}^{l=0}(k) \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2 + (1/a_{3d})^2}. \quad (2)$$

Здесь $\gamma = e^C$, C – постоянная Эйлера, $k = \sqrt{2m^*E}/\hbar$, a_{2d} и a_{3d} – длины двух и трехмерного рассеяния. В области температур, соответствующих резонансным глубинам: $a_{2d}^{\text{res}} = r_0 \times \exp\left(-\frac{2U_0}{\Delta U}\right)$, $a_{3d}^{\text{res}} = r_0 \frac{2U_0}{\Delta U}$ (это и есть размеры волновых функции резонансных уровней)

[4], где r_0 – радиус 2- и 3D модельного потенциала примеси; $U_0 = \hbar^2/(2m^*r_0^2)$, $\Delta U = U - U_{\text{res}}$ – расстройка потенциала от U_{res} , U – глубина трехмерной (двумерной) ямы.

Если $\Delta U > 0$ рассеяние происходит на резонансном уровне, при $\Delta U < 0$ – на виртуальном уровне. Тогда на основе формул (1) и (2) для полуширины линии поглощения $\delta\omega = |\omega - \omega_C| \ll \omega_C$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\tau_{3d}(k)} \right\rangle = \frac{n_i^{3d} \hbar}{m^*} \langle k \sigma_{3d}^{\text{tr}}(k) \rangle = \frac{n_i^{3d} \hbar}{m^*} \left\langle \frac{4\pi \frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar}}{\left(\frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{r_0 2U_0}\right)^2} \right\rangle_E \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\varepsilon_{3d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\Delta U)^2}{4U_0} \right] = \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \left\langle \frac{\sqrt{E}}{E + \varepsilon_{3d}} \right\rangle_E \Rightarrow \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \frac{\int_0^\infty E \frac{\sqrt{E}}{E + \varepsilon_{3d}} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \sqrt{E} dE}{\int_0^\infty E \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \sqrt{E} dE} = \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \frac{4(k_B T)^2}{3\sqrt{\pi}(k_B T)^{5/2}} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{x^2 \exp(-x)}{x + \varepsilon_0} dx = \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \left[1 - \varepsilon_0 L(\varepsilon_0) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь n_i^{3d} – концентрация атомов примеси, измерения показывают что $n_i^{3d} \leq 2 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ [2], $\varepsilon_0 = \varepsilon_{3d}/k_B T$, ε_{3d} – эффективный резонансный уровень.

$$L(\varepsilon_0) = 1 - \varepsilon_0 \exp(\varepsilon_0) \left[-\text{Ei}(-\varepsilon_0) \right], \quad \text{Ei}(\varepsilon_0) = - \int_{\varepsilon_0}^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

Пользуясь разложением в ряд и асимптотическим выражением для $\text{Ei}(-\varepsilon_0)$ можно показать, что [1]

$$L(\varepsilon_0) \approx 1/\varepsilon_0 - 2/\varepsilon_0^2 + \dots \quad (\varepsilon_0 \gg 1), \quad (4)$$

$$L(\varepsilon_0) \approx 1 + \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0 + \dots \quad (\varepsilon_0 \gg 1). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в точную формулу (3) получаем предельные формулы:

$$\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle \approx \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \frac{2k_B T}{\varepsilon_{3d}} \propto \sqrt{T}, \quad (\varepsilon_{3d} \gg k_B T); \quad (6)$$

$$\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle \approx \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \propto 1/\sqrt{T}, \quad (\varepsilon_{3d} \gg k_B T). \quad (7)$$

Как и следовало ожидать, в области «высоких температур» ($\varepsilon_{3d} \ll k_B T$) влияние резонансных центров (на фоне других механизмов рассеяния) на уширение кривой поглощения ЦР исчезающе мало. Аналогичные зависимости получаются и в квантовом пределе ЦР [8]. Отличие состоит лишь в том, что в работе [8] усреднение проводилось на основе равновесной функции распределения в квантующем магнитном поле. Дело в том, что в условиях квантующих H -полей невырожденные электроны расположены на нулевом уровне Ландау, в пределах которого плотность состояний $\propto 1/\sqrt{E}$; вследствие этой зависимости вместо формулы (3) мы получим $\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle \propto L(\varepsilon_0)/\sqrt{k_B T}$. Соответственно, правомерны и зависимости (6) и (7). Примерно при 2 К на нулевом уровне Ландау можно наблюдать вполне четкий резонанс ($\delta\omega \rightarrow 0$) (см. математическое дополнение). Следовательно, и в классическом пределе ЦР, в определенной области температур и глубины ямы, можно ожидать появления максимума полуширины линии поглощения.

Следует отметить, что под «высокими температурами» мы здесь понимаем область выше области температур, соответствующих резонансным глубинам. Таким образом, профиль полуширины линии поглощения: $\langle \delta\omega_{3d} \rangle_{T \rightarrow 0} \propto T^{1/2}$. Эту асимптотику можно интерпретировать так: кривая поглощения резонансно уширяется за счет слишком «быстрых» или слишком «медленных» электронов, из-за распределения Максвелла. Из (6) следует, что окрестность абсолютного нуля якобы идеально соответствует ЦР (см. прим. 2). Именно из-за распределения Максвелла и учета слабого взаимодействия между электронами не происходит разогрева электронов. Они успевают дерезонировать, т.е. выбывать из резонанса только путем рассеяния друг на друге, до нарушения закона Ома. Ясно, что в промежутке между двумя ветвями: $\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_{T \rightarrow 0} \propto \sqrt{T}$ и $\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_{T \rightarrow \infty} \propto 1/\sqrt{T}$, как уже отмечалось, где-то должен быть максимум, в противном случае мы просто не получим кривую, характерную для ЦР (рис. 1). В области температур $T \geq 30$ К начинает также давать вклад в уширение рассеяние на акустических фононах $\langle \delta\omega_{3d} \rangle_{AL} \propto T^{3/2}$ [1]. Начиная с $T \geq 17$ К необходим учет рассеяния на заряженных примесях, точечных дефектах, дислокациях, границах кристаллитов и т.д., так что полное уширение

$$\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{\text{tot}} = \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_i} \right\rangle_E = \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_i(E)} \right\rangle = \frac{1}{\tau_N} + \frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_{AL}} + \frac{1}{\tau_D} + \dots$$

Здесь следует уточнить, что подразумевается под каждым слагаемым: первый член соответствует уширению за счет остатка резонансного рассеяния на нейтральных примесях (асимптотика (7)), второй – за счет рассеяния на ионах примеси, третий обусловлен акустическими фононами. При очень низких температурах достаточно ограничиться (в нашем случае) резонансным рассеянием электронов; асимптотика (6).

Учет акустических фононов (в рамках метода деформационного потенциала) вблизи абсолютного нуля не имеет смысла, так как формула для длины свободного пробега $l_{AL} = A/k_B T$ [1] при температурах, близких к абсолютному нулю, неприменима. Соответствующий расчет [6] дает для $\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_I$ две ветви: $\propto T^{-3/2}$ и $T^{1/2}$ (рис. 1), откуда доопределяется асимптотика (7):

$$\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_{T \rightarrow \infty} \propto c_1 T^{-1/2} + c_2 T^{-3/2} + c_3 T^{3/2} + \dots, \quad (7a)$$

$$\langle \delta\omega_{3d}(k) \rangle_{T \rightarrow \infty} \propto c_1 T^{-1/2} + c_2 T^{1/2} + c_3 T^{3/2} + \dots. \quad (7b)$$

Оценки показывают, что уширение линии ЦР в объемных образцах можно наблюдать в ИК-диапазоне частот (субмиллиметровый диапазон, $T_{\max} \approx 11$ К (см. прим. 2)).

В том случае, когда столкновения носят мгновенный характер, в определенном интервале температур профиль контура поглощения приобретает характерную прямоугольную форму, края которой спадают по мере удаления от максимума $\propto (\omega - \omega_{\max})^{-2}$, что соответствует $\tau = \text{const}$.

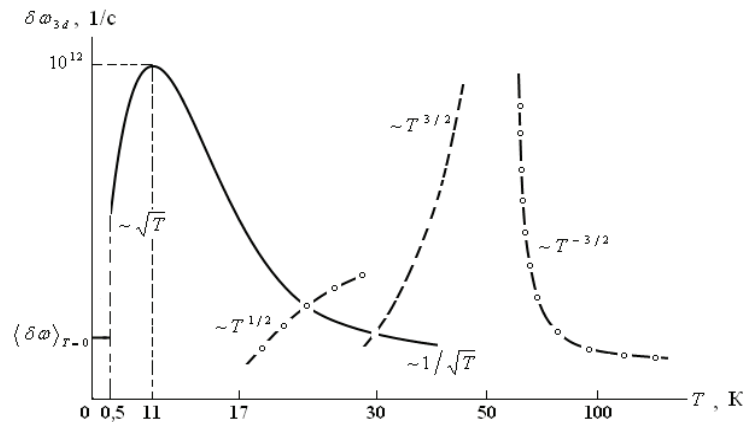


Рис. 1. Температурный ход полуширины линии поглощения ЦР при различных механизмах рассеяния. Сплошной кривой соответствует резонансное рассеяние на нейтральных примесях, штрихам и кружочкам, соответственно, рассеяние на тепловых колебаниях решетки и на ионах примеси. Окрестность нулевой температуры: $0 \div 0,05$ К приближенно описывается формулой (16) (см. прим. 2)

В квазидвумерном случае (q2D)

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega_{2d}(k) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\tau_{2d}(k)} \right\rangle = \frac{n_i^{2d} \hbar}{m^*} \langle k \sigma_{2d}^{\text{tr}}(k) \rangle = \frac{n_i^{2d} \hbar}{m^*} \left\langle k \frac{\pi^2}{k} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}} \right\rangle_E \Rightarrow \\ &= \frac{n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \left\langle \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}} \right\rangle = \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \frac{\pi^2}{(k_B T)^2} \int_0^\infty \frac{E \exp(-E/k_B T) dE}{\pi^2 + \ln^2 \left(\gamma^2 m^* a_{2d}^{\text{res}2} E / 2 \hbar^2 \right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\varepsilon_{2d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \hbar^2 \exp(4U_0/\Delta U)}{\gamma^2 m^* r_0^2} \right] = \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \frac{\pi^2}{(k_B T)^2} \int_0^\infty \frac{E \exp(-E/k_B T) dE}{\pi^2 + \ln^2(E/\varepsilon_{2d})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь E – энергия движения в плоскости (ρ, φ) , n_i^{2d} – поверхностная концентрация примесей, обычно $n_i^{2d} \approx 2 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$. В формуле (8) под ε_{2d} подразумевается эффективный виртуальный и/или резонансный уровень в зависимости от знака расстройки потенциала. Интеграл в формуле (8) выражается через специальные функции [9, с. 588]:

$$\langle \delta \omega_{2d}(k) \rangle = \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right)^2 \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right) - \nu''\left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right) \right], \quad (9)$$

где $\nu(\mu) = \int_0^\infty \frac{\mu^x dx}{\Gamma(x+1)}$. Исследуем наиболее актуальный и интересный для ЦР случай – уширение

при низких температурах. Для этого выделим в $\nu''(\mu)$ асимптотическую экспоненту

$$\nu''(\mu) = \int_0^\infty \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} = \int_1^\infty \frac{\mu^{x-1} dx}{\Gamma(x)} + \int_0^2 \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} \propto \exp(\mu) + \int_0^2 \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)},$$

($\mu = \varepsilon_{2d}/(k_B T)$; $\mu \rightarrow \infty$), [10, с.117]. Тогда разность (с учетом множителя μ^2) в формуле (9)

равна $\int_0^2 \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x-1)}$, откуда $\langle \delta \omega_{2d}(k) \rangle \propto \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar^2}{m^*} \int_0^2 \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x-1)}$. Оценку последнего инте-

грала нетрудно найти, предварительно сводя его к виду $\mu \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)}$, (с учетом $|1/\Gamma(x)| \leq 1$):

$$\mu \cdot \left| \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)} \right| \leq \mu \int_{-1}^{+1} \left| \frac{1}{\Gamma(x)} \right| \mu^x dx \leq \mu \cdot \int_{-1}^{+1} \mu^x dx = \mu \cdot \frac{\mu - 1/\mu}{\ln \mu} \approx \frac{\mu^2}{\ln \mu}, \quad (\mu \gg 1).$$

В результате получаем низкотемпературную оценку уширения:

$$\langle \delta \omega_{2d}(k) \rangle \propto \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar (\varepsilon_{2d}/k_B T)^2}{m^* \ln(\varepsilon_{2d}/k_B T)}, \quad (\varepsilon_{2d} \gg k_B T). \quad (10)$$

Целесообразно обсудить вопрос о пределах применимости полученной формулы.

Для квазидвумерного образца число свободных электронов в приповерхностном атомном слое по порядку величины равно $n_s \approx n_V^{2/3} \approx (10^{15})^{2/3} \text{ см}^{-2} = 10^{10} \text{ см}^{-2}$. Вырождение q2D

электронного газа наступает при $T \approx \frac{\pi \hbar^2 n_s}{m^* k_B}$, что соответствует температуре 0,3 К. Этим значе-

нием и определяется нижний предел применимости формулы (10). Из структуры формулы (10)

никак не следует ограничение на высоту пика: $(\delta \omega)_{\max} \approx \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \propto 10^{11} \text{ с}^{-1}$ (рис. 2), объясня-

ется это тем, что асимптотический режим (10) формируется из числа электронов, энергия которых сильно зашкаливает от некоторого среднего значения. Хотя вероятность возникновения такого особого режима в ансамбле частиц, с максвелловским распределением по скоростям, весьма мала, но в принципе ею нельзя пренебречь. Она является следствием поглощения E -волны резонансными частицами, число которых при очень низких температурах пренебрежимо мало.

Очевидно, что в подобных ситуациях $\delta \omega > (\delta \omega)_{\max}$. Требуемое для наблюдения резонанса

H -поле определяется из условия $\omega_C \approx (\delta \omega)_{\max}$ и составляет примерно $5 \cdot 10^3$ Э.

В области высоких температур процедура вычислений реализуется по схеме:

$$\begin{aligned} \mu^2 [\exp(\mu) - \nu''(\mu)] &= \mu^2 \exp(\mu) - \mu^2 \int_0^{\infty} \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} = \mu^2 \exp(\mu) - \int_0^{\infty} \frac{\mu^x dx}{\Gamma(x-1)} \Rightarrow \\ &= \mu^2 \exp(\mu) - \int_{-1}^{\infty} \frac{\mu^{x+1}}{\Gamma(x)} dx = \left[\mu^2 \exp(\mu) - \mu \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{\mu^x}{\Gamma(x)} dx + \int_{-1}^0 \frac{\mu^x}{\Gamma(x)} dx \right) \right]_{\mu \ll 1} \Rightarrow \\ &\stackrel{[10, \text{с. 117}]}{\infty} \mu \cdot \left[\int_{-1}^0 \mu^x dx - \frac{\text{Rg}'(0)}{\ln^2 \mu} \right] \approx \mu \cdot \frac{1 - 1/\mu}{\ln \mu} \approx -\frac{1}{\ln \mu}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \text{Rg}(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}, \quad \text{Rg}'(0) = -\left. \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} \right|_{x \rightarrow 0} \propto -\frac{(1/x)'}{(1/x)^2} = 1.$$

В результате для высокотемпературной асимптотики уширения получаем формулу

$$\langle \delta \omega_{2d}(k) \rangle \propto \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \frac{\pi^2}{\ln(k_B T / \varepsilon_{2d})}, \quad (\varepsilon_{2d} \ll k_B T). \quad (11)$$

Как видно, уширение в высокотемпературной области, слабо зависит от температуры. Физический смысл этого вывода очевиден: при высоких температурах (например, комнатных и выше) число быстрых электронов несравнимо больше чем медленных (резонирующих), число которых исчезающе мало, но опять же, из-за распределения Максвелла, они дают определенный вклад в уширение. Перефразируя, можно сказать так: особый режим (11) представляет собой «парциальный остаток» резонансного рассеяния в области высоких температур. Вероятность наблюдения такого режима всегда близка к нулю, так как он обычно быстро затушевывается другими механизмами уширения. Таким образом, в теоретическом отношении формула (11) представляет

меньше интереса, чем (10). Для уточнения пределов оценки (10) необходимо оценить резонансный уровень.

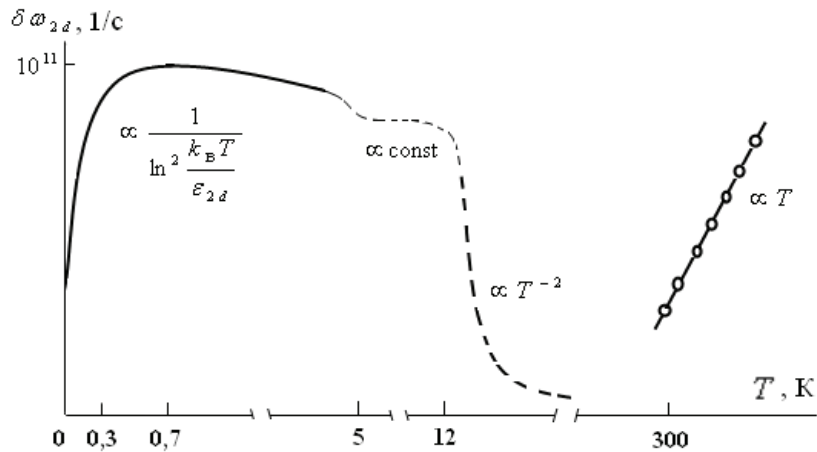


Рис. 2. Температурный ход полуширины линии поглощения ЦР при различных механизмах рассеяния. Сплошной линии соответствует резонансное рассеяние на нейтральных примесях [4], пунктирной линии – рассеяние на ионах примеси [11, с. 62]. Кружочки соответствуют рассеянию на приповерхностных акустических фононах. Температурный интервал 0,3÷0,7 К – соответствует пределам выполнимости асимптотики (10). Приблизительно при температуре 5 К происходит плавная смена механизма рассеяния, в связи с включением рассеяния носителей на ионах примеси. Промежуток 0÷0,3 К соответствует вырождению электронного газа. В пределах 5 ÷ 12 К q2D – рассеяние носит столкновительный характер (плато): $\tau_{2d}^1 = \text{const}$ (q2D рассеяние учитывается в приближении медленных частиц; при более высоких температурах ($T > 12$ К) $\tau_{2d}^1 \propto E^2$ и более строгое рассмотрение приводит к зависимости $\langle \delta\omega_{2d}^1 \rangle_{T \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{(k_B T)^2} \ln \frac{\epsilon k_B T}{e^2 \sqrt{3} n_1^{3d}}$ вместо T^{-2} , где ϵ – диэлектрическая постоянная кристалла)

длит к зависимости $\langle \delta\omega_{2d}^1 \rangle_{T \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{(k_B T)^2} \ln \frac{\epsilon k_B T}{e^2 \sqrt{3} n_1^{3d}}$ вместо T^{-2} , где ϵ – диэлектрическая постоянная кристалла)

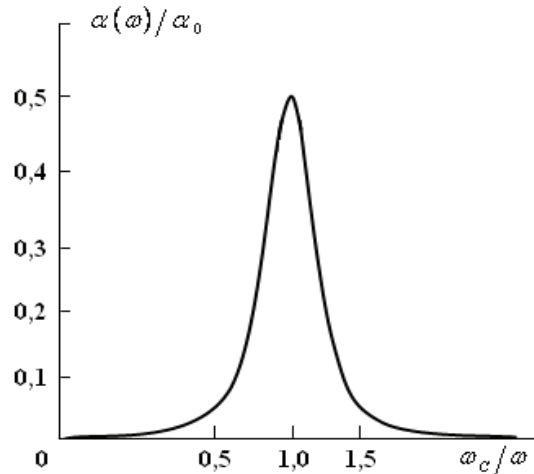


Рис. 3. 2D спектр поглощения. Окрестность максимума соответствует интервалу 5 ÷ 12 К

2. Оценка резонансного уровня в двумерной яме

Для оценки резонансного уровня воспользуемся формулой $\Delta U = \pm 0,5 U_0$ [4], которая достаточно хорошо аппроксимирует зависимость расстройки потенциала от глубины мелкой примеси. Этой формулы вполне достаточно чтобы оценить порядок ϵ_{2d} . Полагая, что ϵ_{3d} порядка мэВ

[2], из определения (3) т.е. из $\epsilon_{3d} = \frac{(\Delta U)^2}{4U_0} = \frac{U_0}{16}$, получаем $U_0 = 16$ мэВ и $\Delta U = \pm 8$ мэВ.

Энергия резонансного s -состояния должна быть экспоненциально малой по сравнению с глубиной ямы [7, с. 201], тогда следует выбрать убывающую ветвь определения (8) из двух

$$\epsilon_{2d} = \frac{2 \hbar^2}{\gamma^2 m^* r_0^2} \exp\left(-\frac{4U_0}{|\Delta U|}\right) = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 U_0 \exp\left(-\frac{4U_0}{|\Delta U|}\right).$$

Подставляя значения U_0 и ΔU в исходную формулу, находим что $\varepsilon_{2d} = 192 \times e^{-8} \approx 0,06$ мэВ, что соответствует области температур $\propto 0,7$ К. Данная оценка согласуется с нижним пределом асимптотики (10). Радиус потенциала мелкой водородоподобной примеси примерно равен $r_0 = \hbar / \sqrt{2m^*U_0} \approx 1,5 \times 10^{-7}$ см. С учетом значений r_0 и $2U_0/|\Delta U|$ определяем размеры волновых функции резонансных состояний: $a_{2d} \approx 8,2 \times 10^{-6}$ см, $a_{3d} \approx 6 \times 10^{-7}$ см; которые фиксируют область локализации электронов проводимости. В условиях резонансного рассеяния $a_{2d} \propto \lambda$ и $a_{3d} \propto \lambda$, где $\lambda \propto \hbar / \sqrt{m^*k_B T}$, откуда следуют значения $T_{2d} \propto 1$ К и $T_{3d} \propto 10$ К.

Если методами молекулярно-лучевой или металлоорганической газофазной эпитаксии «уменьшить» диаметр d q2D- и/или 3D образца до такой степени что $a_{Nd} \propto d$ ($N=2,3$), то следует учитывать эффекты размерного квантования. Мы же предполагаем, что $d \propto 10^{-4}$ см [3].

3. Расчет времени релаксации

В квазидвумерной ситуации $u_{2d} = \frac{e \langle \tau_{2d} \rangle}{m^*}$ и $a_{2d} \ll d$, тогда

$$\begin{aligned} \langle \tau_{2d} \rangle &= \frac{m^*}{n_i^{2d} \hbar} \left\langle \frac{(\pi/2)^2 + \ln^2 \left(\frac{2}{\gamma a_{2d}} \sqrt{2m^* E} \right)}{\pi^2} \right\rangle_E = \frac{m^*}{4 n_i^{2d} \hbar} \frac{1}{(k_B T)^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \ln^2 \left(\frac{\gamma^2 m^* E a_{2d}^2}{2 \hbar^2} \right) \right] \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) E dE \Rightarrow \\ &= \frac{m^*}{4 n_i^{2d} \hbar} \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\ln^2 \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + 2(1-\gamma) \ln \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + (1-\gamma)^2 - \frac{\pi^2 - 6}{6} \right) \right] \Rightarrow \\ &= \frac{m^*}{4 n_i^{2d} \hbar} \left[\frac{1}{\pi^2} \left(\ln \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + (1-\gamma) \right)^2 + \frac{5\pi^2 + 6}{6\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_{2d}(T) = \frac{e}{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar} \left[\ln^2 \frac{k_B T \exp(1-\gamma)}{\varepsilon_{2d}} + \frac{5\pi^2 + 6}{6} \right], \quad u_{2d} \propto u_0 \ln^2 \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}}. \quad (13)$$

Температурная зависимость подвижности (13) имеет суперслабо выраженный минимум при

$$T_{\min} = \frac{\varepsilon_{2d} \exp[-(1-\gamma)]}{k_B} \approx \frac{2 \varepsilon_{2d}}{3 k_B}, \quad u_{\min} = \frac{e}{4 n_i^{2d} \hbar} \frac{5\pi^2 + 6}{6\pi^2} = 5,3 \times 10^6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}. \quad (14)$$

Отметим, что значения подвижности $\propto 10^6$ см²/В·с при $T < 1$ К вполне достижимы [11].

В отличие от объемного случая [2], минимум u_{2d} не зависит от резонансного уровня a , следовательно, и от расстройки потенциала. С учетом значения $\varepsilon_{2d} \approx 0,06$ мэВ из (14) находим что $T_{\min} \approx 0,5$ К (рис. 4). Минимум температуры локализован в пределах применимости (10) и вполне соответствует верхнему пределу выполнения асимптотики (10). Таким образом, как и ожидалось, особый режим уширения (10) имеет узкий интервал проявления $0,3 \div 0,7$ К (рис. 2).

Как видно, подвижность квазидвумерного невырожденного электронного газа в области $0,3 \div 12$ К, весьма слабо зависит от температуры, напротив, в окрестности абсолютного нуля имеет место резко выраженный рост (рис. 4). Графики на рис. 2 и 4 находятся во взаимно обратной связи между собой, что является следствием взаимно обратной пропорциональности между уширением и подвижностью. Это важная деталь позволяет заключить, что пику уширения и минимуму подвижности примерно соответствует температура порядка $0,5$ К (рис. 2).

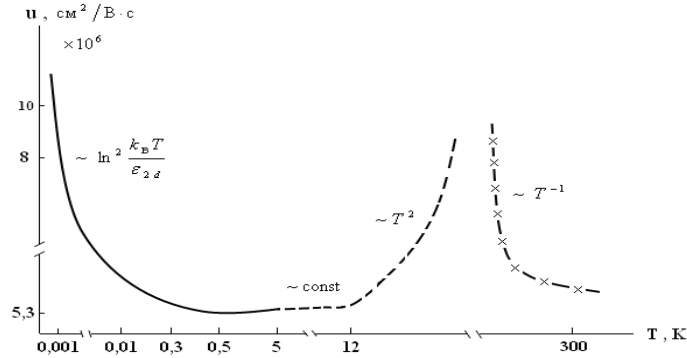


Рис. 4. Температурная зависимость 2D подвижности. Сплошной линией указана теоретическая зависимость (13). Штрихам соответствует рассеяние на ионах примеси, крестикам - рассеяние на акустических фонах [11, стр.62].

В окрестности 5 К происходит смена механизма рассеяния, который учитывается в приближении медленных частиц. В интервале 5 ÷ 12 К (плато) преобладает рассеяние на ионах примеси, сечение которого в низкоэнергетическом пределе имеет корневую зависимость от энергии: $\sigma_{2d}^I \propto 1/\sqrt{E}$. При $T \geq 12$ К также преобладает рассеяние на ионах примеси, однако, сечение рассеяния $\propto E^{-1}$.

Для определения температуры перехода следует рассмотреть двумерный аналог задачи о движении электрона в поле иона примеси. Как и в 3D случае смену механизма рассеяния будем учитывать в приближении медленных частиц. Известно что $\frac{\tau_{2d}^I}{\tau_{3d}^I} = \gamma \frac{\sqrt{2 m^* E}}{\hbar} a$ [11, с.61], где γ – числовой множитель порядка единицы, a – ширина мелкой q2D ямы, $a \approx r_0$.

$$\text{При } E \rightarrow 0 \tau_{3d}^I = \frac{\sqrt{m^*}}{\pi \sqrt[3]{n_I^{3d}} \sqrt{2}} E^{-1/2} \text{ [6], в результате получим } \tau_{2d}^I = \frac{\gamma a m^*}{\pi \hbar \sqrt[3]{n_I^{3d}}} = \text{const.}$$

Смена механизма уширения предполагает: $\delta \omega_{2d}^{\text{res}} \approx \delta \omega_{2d}^{\text{ion}}$, $E \propto k_B T$. Ясно, что при очень низких (10), также как и при очень высоких (11), температурах, «переход» не может быть реализован, но с учетом формулы $\delta \omega_{2d}^{\text{res}} \approx \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \frac{\pi^2}{\ln^2(k_B T / \epsilon_{2d})}$ [4] и $\delta \omega_{2d}^{\text{ion}} = \frac{\pi \hbar \sqrt[3]{n_I^{3d}}}{\gamma a m^*}$, находим

$$\text{что } T_{\text{пер}} \approx \frac{\epsilon_{2d}}{k_B} \times \exp \left[\sqrt{\frac{4 \pi a \gamma n_i^{2d}}{\sqrt[3]{n_I^{3d}}}} \right] \text{ (15).}$$

Экспоненциальный множитель не может быть слишком велик, поэтому, не нарушая общности, можно считать что $T_{\text{пер}} \approx 5$ К (рис. 4). Так как асимптотика (10) имеет верхним пределом значение 0,7 К, то остается предположить, что формула (11) работает в пределах 0,7 ÷ 5 К. Тогда значение 0,7 К примерно соответствует пику уширения ($\delta \omega$)_{max} (рис. 2).

Для инверсионных слоев [$\propto (10^{-7} \div 10^{-6})$ см] формула (15) лучше соблюдается, чем для квазидвумерных структур, причем $n_i^{2d} = 2 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$, $n_I^{3d} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $a \approx 1,5 \times 10^{-7} \text{ см}$. При этом размер двумерной волновой функции резонансного состояния на порядок превышает a и условие преобладания s -волны, хорошо соблюдается. Во всяком случае, температура перехода весьма чувствительна к концентрации мелкой донорной примеси.

По мере разогрева ($v_E \approx v_T$) время релаксации начинает зависеть от энергии частиц и столкновительное (аналогичное столкновению упругих шаров) рассеяние сменяется рассеянием электронов в кулоновском поле иона примеси. Из равенства средней тепловой энергии и потенциальной энергии можно оценить температуру смены специфики рассеяния. Оценка показывает, что смена происходит примерно при 12 К. Именно с этого значения кулоново поле ионов примеси начинает эффективно влиять на процесс рассеяния электронов (рис. 4).

Выводы

В объемных образцах при очень низких температурах вдали от области температур, соответствующих резонансному рассеянию электронов (левое крыло) кривая поглощения резонансно уширяется $\propto \sqrt{T}$, а при «высоких температурах» (правое крыло) $\propto 1/\sqrt{T}$. Асимптотика (6) эффективно работает в пределах $0,5 \div 10$ К (в указанных пределах все ещё не нарушается квазиклассичность: $\lambda < (n_e^{3d})^{-1/3}$), при более низких $0,05 \div 0,5$ К температурах требуется учет частичного вырождения электронного газа. Асимптотики (7) и (11) по сути, являются парциальным остатком резонансного рассеяния в области «высоких температур», на фоне других доминирующих механизмов рассеяния: (7a), (7б).

Значение возможного резонансного уровня в q2D образцах примерно составляет 0,06 мэВ.

Пределы применимости асимптотики (10) $0,3 \div 0,7$ К. В интервале $5 \div 12$ К двумерное рассеяние электронов на ионах примеси, носит в основном, столкновительный характер (контур Лоренца, жесткая решетка, плато на рис. 2 и 4).

Примечание 1

Эксперименты показывают, что возможный резонансный уровень в ковалентных полупроводниках порядка мэВ [2], что соответствует нескольким кельвинам. При этих условиях длина волны электрона гораздо меньше его длины свободного пробега: $\lambda \ll \ell \propto 1/n_i^{3d} \propto 10^{-4}$ см [3]. Классический предел ЦР предполагает выполнение условия $\lambda < \ell_H$, а для наблюдения ЦР необходимо по крайней мере один оборот, так что $\ell_H \propto \ell$ и энергия электрического поля расходуется на расширение циклотронной орбиты. Число квантовых состояний в кристаллах порядка 10^{22} В типичных полупроводниках концентрация носителей заряда колеблется в пределах $10^{10} \div 10^{18}$ см⁻³, и соответственно чему энергия электрона $\propto k_B T$ ($\lambda < (n_e^{3d})^{-1/3}$, $n_e^{3d} < 10^{15}$ см⁻³).

В дальнейшем, для упрощения различных оценок мы полагаем $m^* \approx m_e = 9,1 \times 10^{-28}$ г и используем систему СГС, как предпочтительную.

Примечание 2

Границы применимости асимптотики (6) однозначно определяются температурным ходом химпотенциала в области примесной проводимости: при $T = 0$ К уровень химпотенциала проходит посередине между дном E_C и примесными уровнями, а затем начинает подниматься. С учетом того что $\Delta E_D \propto 0,01$ эВ, а n_D велико, то уровень химпотенциала может приблизиться к дну зоны проводимости и даже пересечь его, так что неравенство $f_0 \ll 1$ нарушится и все прежние выводы, основанные на нем, будут по крайней мере не точны. Учет частичного вырождения требует больших трудоемких вычислений, однако можно попытаться оценить нижний температурный предел асимптотики (6): $N_C = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m^* k_B T}{(2\pi \hbar)^2} \right)^{3/2}$; концентрация электронов в зоне про-

водимости ($n_e^{3d} < 2 \cdot 10^{15}$ см⁻³; перебросы из V-зоны в С-зону за счет межзонной подсветки; при концентрациях $n_i^{3d} > 2 \times 10^{15}$ см⁻³ следует учитывать интерференцию от отдельных D⁻-центров) сравнивается с эффективной плотностью состояний в последней при температуре 0,5 К. Примерно при 0,05 К уровень химпотенциала пересекает E_C и газ становится полностью вырожденным. Для оценки верхнего температурного предела следует учесть смену механизмов рассеяния. Ясно, что при более высоких температурах (от возможного верхнего предела) сечение рассеяния не зависит от энергии рассеиваемых частиц: $\sigma_I \approx (n_I^{3d})^{-2/3}$ (приближение медленных частиц), где σ_I – эффективный поперечник иона примеси, n_I^{3d} – концентрация ионов примеси. Смена механизма рассеяния предполагает $\overline{\ell_{res}} \approx \overline{\ell_I}$. Оценка показывает что $\overline{\ell_{res}} \approx 4 \times 10^{-4}$ см [3]. Примерно то же значение длины свободного пробега достигается при концентрации ионов

$n_1^{3d} \approx 10^{12} \text{ см}^{-3}$, с учетом того что $n_1^{3d}/n_i^{3d} = e^{-\Delta E_D/k_B T} \approx 10^{-3}$, получим $T_{\text{пер}} \approx 16,7 \text{ К}$. Пик уширения примерно соответствует температура $T_{\text{max}} \propto \varepsilon_{3d}/k_B \approx 11,6 \text{ К}$ (определение T_{max} на основе точной формулы (3) требует решения сложного трансцендентного уравнения), именно при этой температуре нарушается аппроксимация $\varepsilon_0 \gg 1$.

Таким образом, в качестве верхнего предела асимптотики (6) целесообразно взять 10 К.

В окрестности $T=0 \text{ К}$ $\lim_{T \rightarrow 0} f_0 \approx 1$, ($E_F - E > E_C$). Из-за сильного перекрытия примесных

волновых функции примесные уровни вырождаются в примесную полосу с шириной $\Gamma(0)$ при нулевой температуре. Соответствующий расчет на основе формулы Брейта-Вигнера приводит в этом случае к приближенной формуле (формально это соответствует случаю $U=0$)

$$\langle \delta \omega_{3d}(k, T=0) \rangle \approx \frac{5 \pi n_i^{3d} \hbar^2 E_{\text{res}}}{\sqrt{2} (m^*)^{3/2} E_F^{5/2}} \Gamma(0) \propto \Gamma(0), (T \in 0 \div 0,05 \text{ К}). \quad (16)$$

Здесь $E_F(0) = \frac{E_C + E_D}{2}$, E_{res} – резонансный уровень, E_D – энергия связи D-уровня.

При отсутствии перекрытия (перехода Мотта) ($r < 1/\sqrt[3]{n_i^{3d}}$, где r – радиус локализации свободного электрона); $\langle \delta \omega_{3d}(k, T=0) \rangle \propto 1/\sqrt{\varepsilon_{3d}} \propto |\Delta U|^{-1}$, ($T \in 0 \div 0,05 \text{ К}$).

Математическое дополнение

В промежутке между двумя асимптотиками (6) и (7) можно выделить переходную область:

$$-\text{Ei}(-\varepsilon_0) = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt \approx \begin{cases} \exp(-\varepsilon_0)/\varepsilon_0, & \varepsilon_{3d} > 5 \cdot k_B T \\ -\gamma + \ln(1/\varepsilon_0), & \varepsilon_{3d} < k_B T/5 \end{cases}.$$

Данная аппроксимация удобна для общего анализа профиля уширения в окрестности пика когда аппроксиманты (10) и (11) не вполне приемлемы (в пределах нулевой зоны Ландау).

Подставляя $\exp(-\varepsilon_0)/\varepsilon_0$ в $L(\varepsilon_0) = 1 - \varepsilon_0 \exp(\varepsilon_0)[-Ei(-\varepsilon_0)]$ автоматически получим нуль, соответственно чему $\delta \omega_{n=0}^{3d} \propto 0$. Разумеется, полученный результат следует рассматривать как некоторую o -символику более общих теоретических формул [8].

Литература

1. Ансельм, А.И. / А.И. Ансельм // ЖЭТФ. – 1953. – Т. 24. – Вып. 1. – С. 83–89.
2. Имамов, Э.З. / Имамов, Э.З., Колчанова Н.М., Крещук Л.Н., Ясиевич И.Н. // ФТТ. – 1985. – Т. 27. – Вып. 1. – С. 69 – 76.
3. Муратов, Т.Т. // Вестн. НГУ. Серия: Физика. – 2013. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 142–158.
4. Андреев, С.П. / С.П. Андреев, Т.В. Павлова, В.А. Небогатов // Труды научной сессии НИЯУ МИФИ. 2010. – Т. 3. Современные проблемы физики конденсированного состояния. – С. 89–92.
5. Erginsoy, C. / C. Erginsoy // Phys. Rev. – 1950. – Vol. 6. – P. 1013–1014.
6. Блатт, Ф. Физика электронной проводимости в твердых телах. – М., Мир, 1971. – 470 с.
7. Ландау, Л.Д. Квантовая механика: Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М., Наука, 1989. – 767 с.
8. Andreev, S.P. / S.P. Andreev, A.S. Andreev, Yu.A. Gurvich // Laser Physics. – 1998. – Vol. 8, № 1. – P. 159–163.
9. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М., Наука, 1971. – 1108 с.
10. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – М., Наука, 1978. – 376 с.
11. Борисенко, С.И. Физика полупроводниковых наноструктур / С.И. Борисенко. – Изд-во Томского политехнического университета, Томск, 2010. – 115 с.

Поступила в редакцию 19 мая 2014 г.

**CONTRIBUTION OF CHARGED CARRIERS RESONANCE SCATTERING
TO THE BROADENING OF CYCLOTRON RESONANCE ABSORPTION CURVE
IN QUASI-TWO- AND THREE-DIMENSIONAL SEMICONDUCTORS**T.T. Muratov¹

Asymptotic formulas for the broadening of absorption curve of cyclotron resonance (CR) by the resonance scattering of electrons on atomic impurities were obtained with Maxwell's distribution being taken into account. The estimations show that the possible resonance level ($\sim 0,06$ meV) in quasi two-dimensional semiconductors is one or two orders less than in three-dimensional semiconductors (~ 1 meV). This fact shows that the area of predominant resonance scattering in quasi-two-dimensional semiconductors is less than 1 K. The temperature plateau equal to $5 \div 12$ K was found in 2D absorption spectrum. The applicability of the results obtained is under discussion.

Keywords: cyclotron resonance; broadening absorption curve; resonance scattering; asymptotic formulas.

References

1. Ansel'm A.I. *ZhETF*. 1953. Vol. 24. Issue 1. pp. 83–89. (in Russ.).
2. Imamov E.Z., Kolchanova N.M., Kreshchuk L.N., Yassievich I.N. *FTT*. 1985. Vol. 27. Issue 1. pp. 69–76. (in Russ.).
3. Muratov T.T. *Vestn. NGU. Seriya: Fizika*. 2013. Vol. 8. Issue 3. pp. 142–158. (in Russ.).
4. Andreev S.P., Pavlova T.V., Nebogatov V.A. *Trudy nauchnoy sessii NIYaU MIFI* (Proceedings of the scientific session of National Research Nuclear University «MEPHI»). T. 3. *Sovremennye problemy fiziki kondensirovannogo sostoyaniya* (Vol. 3. Modern problems of condensed matter physics). 2010. pp. 89–92. (in Russ.).
5. Erginsoy C. *Phys. Rev.* 1950. Vol. 6. pp. 1013–1014.
6. Blatt F. *Fizika elektronnoy provodimosti v tverdykh telakh* (Physics of electronic conduction in solids). Moscow, Mir Publ., 1971. 470 p. (in Russ.).
7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Kvantovaya mekhanika: Nerelevativistskaya teoriya* (quantum mechanics: Nonrelativistic Theory). Moscow, Nauka Publ., 1989. 767 p. (in Russ.).
8. Andreev S.P., Andreev A.S., Gurvich Yu.A. *Laser Physics*. 1998. Vol. 8, no. 1. pp. 159–163.
9. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Table of integrals, sums, series and compositions). Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 1100 p. (in Russ.).
10. Olver F. *Vvedenie v asimptoticheskie metody i spetsial'nye funktsii* (Introduction to Asymptotics and Special Functions). Moscow, Nauka Publ., 1978. 375 p. (in Russ.). [Olver F.W.J. *Introduction to Asymptotics and Special Functions*. N.Y., L: Academic press, 1974. 297 p. (in Eng.).]
11. Borisenko S.I. *Fizika poluprovodnikovykh nanostruktur* (Physics of semiconductor nanostructures). Tomsk, Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta Publ., 2010. 115 p. (in Russ.).

Received 19 May 2014

¹ Muratov Temur Tashkabayevich is Candidate, Department of Teaching Methods in Physics, Tashkent State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan.

E-mail: tgpu_info@edu.uz, temur-muratov@yandex.ru