

## КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ, МИНИМАЛЬНЫЕ ОКТАЭДРАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ КОТОРЫХ НЕ ЛЕЖАТ В КОЛЬЦЕ<sup>1</sup>

А.А. Акимова<sup>2</sup>

Построена таблица узлов в  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр». Табулирование проводится в три этапа. Сначала мы составляем таблицу таких проекций узлов на  $T$ . Далее преобразуем каждую проекцию в набор соответствующих ей диаграмм. После этого, используя в качестве инварианта обобщенную версию скобки Кауфмана, мы отбрасываем дубликаты и доказываем, что все построенные узлы различны.

*Ключевые слова:* узел; утолщённый тор; таблица узлов.

### Введение

Задача табулирования является центральной проблемой теории узлов. Тенденция к развитию теории узлов в трехмерных многообразиях, отличных от трёхмерной сферы  $S^3$ , наблюдающаяся в последние годы, привела к задаче табулирования глобальных узлов. Мы рассматриваем продолжение классической теории узлов в  $S^3$  на случай узлов в утолщенном торе  $T \times I$ , как в одном из самых простых трёхмерных многообразий после  $S^3$ . Узлы в  $T \times I$  можно задавать диаграммами на  $T$ , аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. При этом роль преобразований Рейдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Из немногих работ по табулированию узлов в других многообразиях упомянем работы [1, 2] по узлам в проективном пространстве и [3] по узлам в полном торе. Эффективный метод табулирования тэнглов описан в [4]. Таблица виртуальных узлов представлена в [5]. Настоящая статья продолжает исследование, начатое в работах [6, 7].

Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

### 1. Основной результат

Будем рассматривать узлы (т.е. простые замкнутые кривые) в  $T \times I$  с точностью до эквивалентности в смысле гомеоморфизма. Проекция  $G$  узла  $K \subset T \times I$  представляет собой регулярный граф  $G \subset T$  степени 4, для которого прохождение вершин по правилу «прямо вперед» определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма  $D$  узла  $K$  получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой – ниже другого в смысле величины координаты  $t \subset I$ . Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом  $T$  на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно изменять типы всех перекрестков.

**Определение 1.** Диаграмма  $D$  узла  $K$  называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы каждого узла, эквивалентного узлу  $K$ . Проекция  $G \subset T$  называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Мы будем рассматривать только те узлы в  $T \times I$ , которые не лежат в утолщенном кольце. Поэтому мы не включаем в таблицу узлы, минимальные диаграммы которых можно расположить в некотором кольце на  $T$ . Дело в том, что такие узлы близки к узлам в полном торе, табулирован-

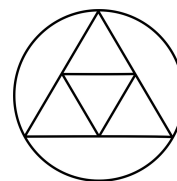


Рис. 1. Граф «октаэдр»

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020), гранта РФФИ № 12-01-00748 и гранта ведущих научных школ 1015.2014.1.

<sup>2</sup> Акимова Алена Андреевна – аспирант, Южно-Уральский государственный университет; лаборатория квантовой топологии, Челябинский государственный университет.

E-mail: akimova\_susu@mail.ru

ным в [3]. Заметим также, что мы не рассматриваем локальные узлы, потому что они являются уже табулированными узлами в  $S^3$ .

Следующая теорема является основным результатом статьи.

**Теорема 1.** Существуют ровно 53 различных узла в  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр», представленному на рис. 1. Эти диаграммы изображены на рис. 2.

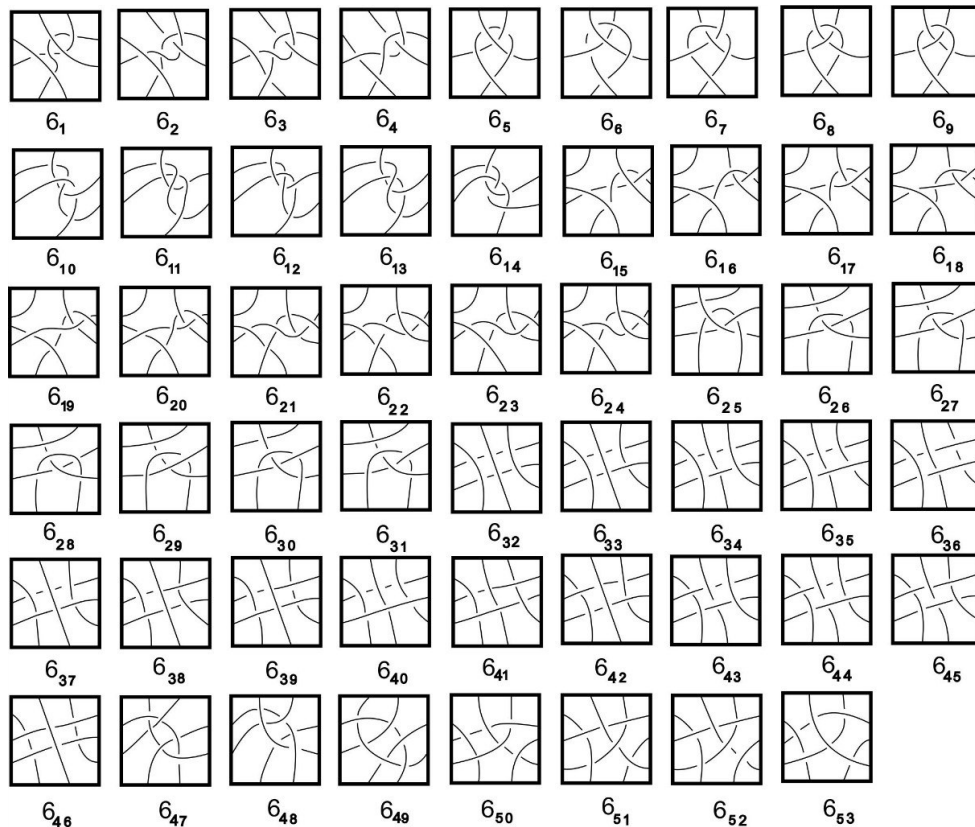


Рис. 2. Диаграммы с 6 перекрестками узлов на торе  $T$ , не лежащие в кольце и отвечающие графу типа «октаэдр». Тор  $T$  представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Доказательство теоремы 1 состоит из четырех частей и аналогично доказательству соответствующей теоремы, подробно описанному в [6]. Сначала мы перебираем все минимальные проекции с 6 перекрестками на торе  $T$ , имеющие октаэдральный тип и не лежащие в кольце, затем – соответствующие им минимальные диаграммы. При этом дубликаты отбрасываются. На последнем этапе мы доказываем, что отвечающие этим диаграммам узлы в  $T \times I$  различны. В качестве инварианта мы используем обобщенную скобку Кауфмана [8, 9].

## 2. Перечисление проекций

**Теорема 2.** Существуют ровно 8 различных проекций узлов в  $T \times I$ , которые не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр», см. рис. 3.

**Доказательство.** Построим  $G'$ , удовлетворяющую условию теоремы, следующим образом.

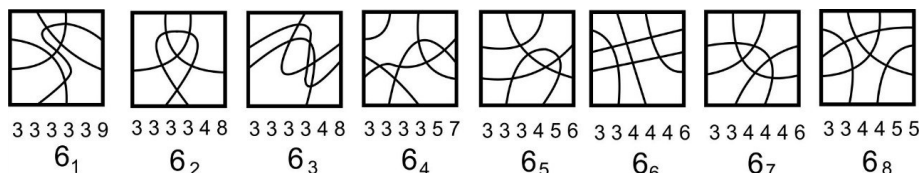


Рис. 3. Проекция узлов на торе  $T$ , не лежащие в кольце и соответствующие графу «октаэдр». Каждая строка  $\{i_1, i_2, \dots, i_6\}$  означает, что дополнение к данной проекции есть набор из  $i_m$ -угольников, где  $1 \leq m \leq 6$

**Шаг 1.** Предположим, что  $T \setminus G'$  – дополнение к  $G'$  на  $T$  – содержит пятиугольную грань  $P$ .

**Шаг 1.1.** Покажем, что вершины  $P$  различны и соединены между собой ещё тремя ребрами  $G'$ .

Рассмотрим пятиугольник  $P$  на  $T$ . Отождествление его смежных вершин допустимо при наличии петли в графе, соответствующем  $G'$ , а несмежных – при наличии кратных ребер, в то время как граф «октаэдр» не содержит этих элементов. Поэтому все вершины  $P$  различны (т.е.  $P$  – вложенный) и имеют валентность 2.

Оставшаяся шестая вершина  $N$  графа, как любая его вершина, имеет валентность 4. Поэтому  $N$  соединена четырьмя (в силу отсутствия петель) ребрами с разными (из-за отсутствия кратных ребер) вершинами  $P$ . Предположим, что это соединение уже проведено некоторым образом. Тогда  $P$  имеет 1 вершину валентности 2 и 4 вершины валентности 3, в то время как все вершины должны иметь валентность 4. Легко видеть, что вершины  $P$  необходимо соединены между собой ещё тремя ребрами  $G'$ .

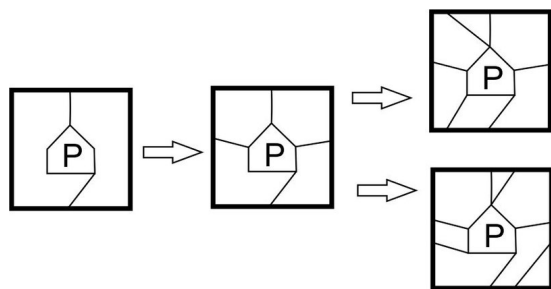


Рис. 4. Способы последовательного добавления трех ребер к пятиугольной грани  $P$  на  $T$

**Шаг 1.2.** Следовательно, построение  $G'$  можно начать с рассмотрения вложенного пятиугольника  $P$  на  $T$  и соединения вершин  $P$  ещё тремя ребрами таким образом, чтобы  $P$  содержал 1 вершину валентности 4 и 4 вершины валентности 3 (комбинация валентностей согласована с последующим соединением  $P$  с шестой вершиной  $N$ ). Новые ребра соединяют только несмежные на момент добавления ребра вершины, потому что граф не содержит кратных ребер. В силу симметрии способ добавления первых двух ребер определяется единственным образом.

Третье ребро можно добавить двумя различными способами, см. рис. 4. Имеем фрагмент проекции  $G''$ , содержащий 5 вершин и 8 ребер.

Очевидно, что  $T \setminus G''$  состоит из 3 дисков. Шестая вершина  $N$  проекции  $G'$  может находиться в любом из этих дисков, кроме  $P$ . Способы проведения оставшихся ребер определяются единственным образом для каждого из возможных вариантов подходов ребер к вершинам пятиугольной грани. Получаются проекции **6<sub>4</sub>**, **6<sub>5</sub>** и **6<sub>8</sub>**.

**Шаг 2.** Предположим, что  $T \setminus G'$  не содержит пятиугольной грани. В таком случае  $T \setminus G'$  включает, по крайней мере, 3 либо треугольных, либо четырехугольных грани, что можно проверить, непосредственно перечислив все возможные комбинации числа углов в гранях.

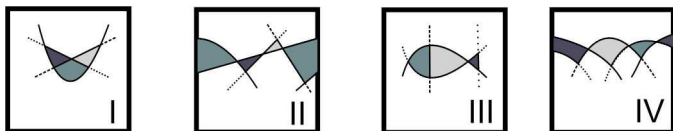


Рис. 5. Варианты взаимного расположения трех треугольных граней на  $T$  так, что общее число их вершин  $\leq 6$

**Шаг 2.1.** Предположим, что  $T \setminus G'$  содержит 3 треугольные грани. Все они вложенные, потому что граф не содержит петель и кратных ребер. Все четыре варианта взаимного расположения треугольных граней так, что общее число их вершин  $\leq 6$ , показаны на рис. 5.

Рассмотрим вариант **I**.

**Определение 2.** Пусть проекция  $G \subset T$  и диск  $D \subset$

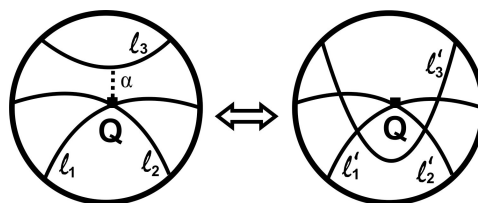


Рис. 6. Операция добавления трех треугольных граней

$T$  таковы, что  $G$  пересекает  $D$  по трем собственным дугам

$l_1, l_2, l_3 \subset D$ , причем  $l_1$  пересекает  $l_2$  трансверсально в одной точке  $Q$ , а  $l_3$  не имеет общих точек с  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда операция добавления трех треугольных граней состоит в замене дуг  $l_1, l_2, l_3 \subset D$  на три новые дуги  $l'_1, l'_2, l'_3 \subset D$ , которые имеют те же концы и, помимо  $Q$ , ещё 4 трансверсальные точки пересечения дуги  $l'_3$  поочередно с дугами  $l'_1$  и  $l'_2$ .

Для выполнения этой операции достаточно выбрать простую дугу  $\alpha \subset T$ , соединяющую вершину  $Q \subset G$  с точкой на ребре  $G$ , а в качестве диска  $D$  взять регулярную окрестность этой дуги, см. рис. 6. Обратная операция, то есть замена дуг  $l_1', l_2', l_3' \subset D$  на дуги  $l_1, l_2, l_3 \subset D$ , называется *устранением трех треугольных граней*.

Операция добавления трех треугольных граней увеличивает число перекрестков проекции на 4. Таким образом, чтобы получить  $G'$  с 6 перекрестками, содержащую фрагмент, показанный на рис. 6 справа, достаточно рассмотреть все проекции  $G''$  на торе с 2 перекрестками и применить указанную операцию, выбрав дугу  $\alpha$  так, чтобы  $T \setminus G'' \cup \alpha$  содержало только дисковые компоненты. Имеем проекции  $6_1-6_5$ , см. рис. 7.

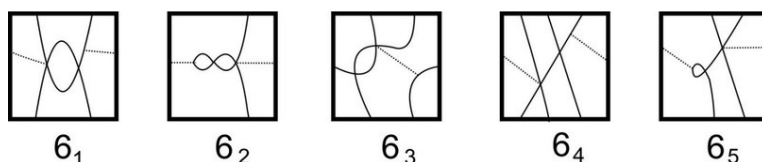


Рис. 7. Получение проекций  $6_1-6_5$  операциями добавления трех треугольных граней

### Рассмотрим варианты II и III.

Покажем, что  $G'$ , содержащая фрагмент II или III, обязательно содержит и фрагмент I.

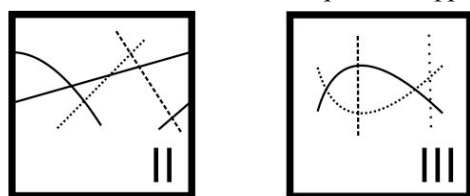


Рис. 8. Нити, из которых составлены фрагменты проекций вариантов II и III

Действительно, фрагменты II и III состоят из, соответственно, 3 и 4 нити (на рис. 8 они показаны разными типами линий). Для получения  $G'$  эти нити нужно соединить в одну. Мы соединяем концы, окрашенные в разные цвета, иначе восстановится проекция зацепления.

Ребро, соединяющее два конца, может проходить

- 1) нетривиально, т.е. изменять типы компонент  $T \setminus G'$ ,
- 2) тривиально.

Легко видеть, что соединение пары концов ребром, проходящим тривиально, приводит к созданию петли, кратного ребра или фрагмента I. Следовательно, новое ребро нужно проводить нетривиальным образом, 3 и 4 раза соответственно, в то время как на торе возможно только 2 раза, а в кольце, в котором уже лежит фрагмент II – только 1.

### Рассмотрим вариант IV.

Очевидно, что  $T \setminus G'$  содержит кольцевую компоненту.

**Шаг 2.2.** Предположим, что  $T \setminus G'$  содержит 3 четырехугольные грани. Любые две из них имеют пару общих вершин, в силу того, что все три грани имеют 12 вершин, в то время как граф – только 6. На рис. 9 (I–III) четырехугольные грани имеют общее ребро, рис. 9 (IV) – только общие вершины. Рассмотрим эти случаи:

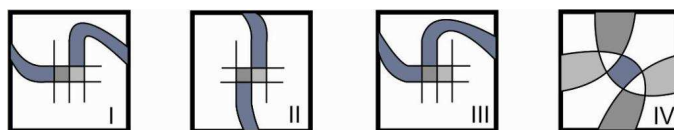


Рис. 9. Способы расположения трех четырехугольных граней

I. Восстанавливается либо проекция зацепления, либо проекция, содержащая двойные ребра или петли, см. рис. 10.

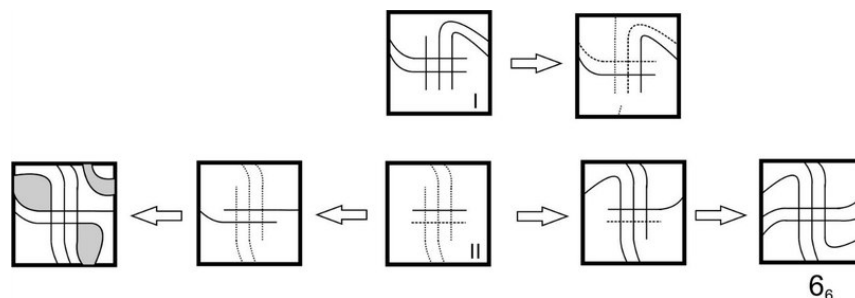


Рис. 10. Восстановление проекций в случаях I и II

II. Восстанавливается проекция  $\mathfrak{b}_6$  или проекция узла, имеющая двойное ребро, см. рис. 10.

III. Очевидно, что  $T \setminus G'$  содержит кольцевую компоненту.

IV. Уже построена проекция  $\mathfrak{b}_7$ .

Покажем, что все проекции на рис. 3 действительно различны. Посчитаем количество углов в каждом из 6 многоугольников, составляющих  $T \setminus G'$ . Наборов таких чисел достаточно, чтобы различить любые две проекции на рис. 3, за исключением пар  $(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$  и  $(\mathfrak{b}_6, \mathfrak{b}_7)$ . Проекция  $(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$  различны, потому что в первом случае одна из треугольных граней имеет по одному общему ребру с каждой из трёх других, а во втором – нет. Проекция  $(\mathfrak{b}_6, \mathfrak{b}_7)$  различны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро. Теорема 2 доказана.

### 3. Доказательство теоремы 1

Восстановим по проекциям, указанным в теореме 2 (см. рис. 3), диаграммы узлов на  $T$ , выбрав тип каждого перекрестка. Для проекции с  $n$  вершинами это можно сделать  $2^n$ , то есть в нашем случае 64, способами. Однако для каждой проекции достаточно рассмотреть 32 случая, поскольку тип одной вершины можно зафиксировать благодаря симметрии  $T \times I$  (тип узла не меняется при одновременной смене типов всех перекрестков диаграммы на противоположный).

Различность всех приведенных в таблице узлов доказывается с помощью вычисления их обобщенных скобок Кауфмана [6, 8, 9]. Точная формула такова:

$$X(K) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  – числа сглаживаний типа А и В в состоянии  $s$ , а  $\gamma(s)$  и  $\delta(s)$  – числа тривиальных и нетривиальных окружностей на торе, полученных в результате сглаживания всех перекрестков, которое соответствует состоянию  $s$ . Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а  $\omega(K)$  обозначает число скручивания диаграммы.

Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы, приведенные на рис. 2, различны. Попутно мы получаем доказательство минимальности каждой из 8 проекций, указанных в теореме 2.

### Литература

1. Дроботухина, Ю.В. Аналог полинома Джонса для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  и обобщение теоремы Кауфмана–Мурасуги / Ю.В. Дроботухина // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 2, № 3. – С. 613–630.
2. Drobotukhina, Yu.V. Classification of links in  $\mathbb{R}P^3$  with at most six crossings / Yu.V. Drobotukhina // Advances in Soviet Mathematics. – 1994. – Vol. 18, № 1. – P. 87–121.
3. Gabrovshchek, V. Knots in the solid torus up to 6 crossings / V. Gabrovshchek, M. Mroczkowski // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 11. – P. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064
4. Enumerating the k-tangle projections / A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 7. – p. 1250069 [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Green, J. A table of virtual knots / J. Green // [http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main\\_Page](http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page)
6. Акимова, А.А. Классификация узлов малой сложности в утолщённом торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 10–21.
7. Акимова, А.А. Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков / А.А. Акимова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 8–11.
8. Kauffman, L. State models and the Jones polynomial / L. Kauffman // Topology. – 1987. – Vol. 26, № 3. – P. 395–407.
9. Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский // М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2014 г.

## CLASSIFICATION OF KNOTS IN A THICKENED TORUS WITH MINIMAL OCTAHEDRON DIAGRAMS WHICH ARE NOT CONTAINED IN AN ANNULUS

**A.A. Akimova<sup>1</sup>**

The aim of this research is to tabulate knots in a thickened torus  $T \times I$  having minimal diagrams which are not contained in an annulus and correspond to the octahedron graph. Tabulation consists of three steps. First, a table of knot projections on  $T$  was compiled. Then, every projection was converted into a set of corresponding diagrams. Finally, using a generalized version of the Kauffman bracket as an invariant, duplicates were removed and all the knots obtained were proved to be different.

*Keywords:* knot; thickened torus; knot table.

### References

1. Drobotukhina Yu. V. Analog polinoma Dzhonsa dlya zatsepleny v  $RP^3$  i obobshchenie teoremy Kaufmana–Murasugi. *Algebra i Analiz*. 1991. Vol. 2, no. 3. pp. 613–630. (in Russ.).
2. Drobotukhina Yu. V. Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings. *Advances in Soviet Mathematics*. 1994. Vol. 18, no. 1. pp. 87–121.
3. Gabrovshchik B., Mroczkowskii M. Knots in the solid torus up to 6 crossings. *J. Knot Theory Ramifications*. 2012. Vol. 21, no. 11. p. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064.
4. Bogdanov A., Meshkov V., Omelchenko A., Petrov M. Enumerating the k-tangle projections. *J. Knot Theory Ramifications*. 2012. Vol. 21, no. 7. p. 1250069. [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Green J. *A table of virtual knots*. [http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main\\_Page](http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page)
6. Akimova A.A., Matveev S.V. Klassifikatsiya uzlov maloj slozhnosti v utolshhennom tore [Classification of Low Complexity Knots in the Thickened Torus]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika*. 2012. Vol. 12. Issue 3. pp. 10–21. (in Russ.).
7. Akimova A.A. Classification of knots in the thickened torus with minimal diagrams which are not in a circle and have five crossings. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 8–11. (in Russ.).
8. Kauffman L. State models and the Jones polynomial. *Topology*. 1987. Vol. 26, no. 3. pp. 395–407.
9. Prasolov V.V., Sosinskiy A.B. *Uzly, zatsepleniya, kosy i tryekhmernye mnogoobraziya* (Knots, coupling, spit, and three-dimensional manifolds). Moscow, MTsNMO Publ., 1997. 352 p. (in Russ.).

*Received 11 December 2014.*

---

<sup>1</sup> Akimova Alena Andreevna is Post-graduate Student, South Ural State University; Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University.

E-mail: akimova\_susu@mail.ru