УДК 519.816

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В.И. Ухоботов[1], *Е.С. Михайлова*[2]

Рассмотрен один подход сравнения нечетких чисел. Он может быть применим в задачах принятия решений с нечеткой информацией о помехе. Этот подход основан на сравнении множеств уровня нечетких чисел. Для некоторых классов нечетких чисел предложенный метод сравнения приводит к нахождению решения в лексикографическом смысле некоторой многокритериальной задачи. Для трапецеидальных и колоколообразных нечетких чисел дана геометрическая интерпретация решения этой задачи.

Ключевые слова: нечеткое число; нечеткое множество; сравнение нечетких чисел.

Введение

Для целого класса экономических и социальных задач информация о переменных носит нечеткий расплывчатый характер. Для исследования таких задач используются нечеткие числа. С момента опубликования Л. Заде своей работы по нечетким множествам [1], вышло большое количество работ, в которых рассматриваются действия с нечеткими числами [2, 3].

В задачах принятия решения, когда лицо, принимающее решение, в зависимости от выбранной им стратегии получает информацию о реализации этой стратегии в виде нечеткого числа, возникает проблема сравнения нечетких чисел.

К настоящему времени предложено достаточное количество различных методов сравнения нечетких чисел [4]. Ни один из них не является универсальным. Возникает проблема с интерпретацией тех или иных методов, не все они понятны интуитивно.

При решении прикладных задач в вопросах принятия решений при выборе того или иного метода сравнения нечетких чисел нужно исходить из специфики задачи.

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работе [5].

Постановка задачи

Пусть задана функция $\mu_A : R \to [0;1]$. Нечетким числом A называется [1] совокупность пар вида $\left(x \mid \mu_A(x)\right), x \in R$. Функция $\mu_A(x)$ называется функцией принадлежности нечеткого числа A, а её значение на конкретном числе $x \in R$ называется степенью (или мерой) принадлежности этого числа x нечеткому числу A.

Для каждого числа $\alpha \in [0;1]$ обычное множество $A(\alpha) = \{x \in R : \mu_A(x) \ge \alpha\}$ называется множеством уровня нечеткого числа A. Эти множества уровня удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(0) = X;\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1 \Rightarrow A(\beta) \subset A(\alpha);\ 0 < \alpha \le 1 \Rightarrow \bigcap_{0 \le t < \alpha} A(t) = A(\alpha). \qquad (1)$$

Пусть при каждом $0 \le \alpha \le 1$ определено множество $A(\alpha) \subset R$. Если совокупность этих множеств удовлетворяет свойствам (1), то оно является семейством множеств уровня нечеткого числа A, функция принадлежности которого равна

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in [0;1] : x \in A(\alpha)\}.$$

Поэтому нечеткое число A можно задать семейством множеств $A(\alpha) \subset R$, при каждом $0 \le \alpha \le 1$, удовлетворяющих свойствам (1).

В данной работе будем рассматривать нечеткие числа, множества уровня которых имеют вид отрезков [6]

[1] Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: ukh@csu.ru
[2] Михайлова Екатерина Сергеевна – аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com

$$A(\alpha)=[a+\varepsilon f(\alpha);b-\delta\phi(\alpha)]. \qquad (2)$$

Функции $f,\varphi:(0;1]\to(-\infty;0]$ и коэффициенты a,ε,b,δ удовлетворяют следующим свойствам:

$$0<\alpha_1<\alpha_2\le 1\Rightarrow f(\alpha_1)\le f(\alpha_2),\ \varphi(\alpha_1)\le\varphi(\alpha_2);\ f(1)=\varphi(1)=0;$$
$$\lim_{t\to\tau-0} f(t)=f(\tau),\ \lim_{t\to\tau-0}\varphi(t)=\varphi(\tau),\ \varepsilon\ge 0,\delta\ge 0,a\le b. \qquad (3)$$

При выполнении условий (3) отрезки (2) удовлетворяют свойствам (1).

Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), может выбрать одну из двух стратегий. Цель ЛПР заключается в том, чтобы выигрыш $x\in R$, который он получит при выборе *i*-й стратегии, был как можно больше. Однако информацию о возможном результате он получает в виде нечеткого числа A_i.

Зафиксируем число $0<\alpha\le 1$ и будем считать, что ЛПР интересует только те выигрыши, значения которых $x\in A_i(\alpha), i=1,2$. Приходим к задаче о сравнении отрезков $[g_1(\alpha);G_1(\alpha)]$ и $[g_2(\alpha);G_2(\alpha)]$. Вид функций $g_i(\alpha)$ и $G_i(\alpha)$ следует из формулы (2). На плоскости z_1Oz_2 рассмотрим прямоугольник *ABCD* (см. рис.1). На этом рисунке прямая *ON* является множеством точек (z_1,z_2), у которых $z_1 = z_2$. Считаем, что отрезок $[g_i(\alpha);G_i(\alpha)]$ предпочтительнее для ЛПР отрезка $[g_j(\alpha);G_j(\alpha)]$ тогда и только тогда, когда площадь фигуры *AKNCD* не меньше площади фигуры *KBN*.

Этим определением мы формализуем тот факт, что «число» пар (z_1,z_2) выигрышей $z_1\in[g_i(\alpha),G_i(\alpha)]$ и $z_2\in[g_j(\alpha),G_j(\alpha)]$, у которых $z_1\ge z_2$ не меньше, чем число пар выигрышей, у которых $z_1\le z_2$.

Нетрудно показать, что [7] площадь фигуры *AKNCD* не меньше площади фигуры *KBN* тогда и только тогда, когда

$$g_i(\alpha)+G_i(\alpha)\ge g_j(\alpha)+G_j(\alpha).$$

Последнее неравенство означает, что середина *i*-го отрезка не меньше середины *j*-го отрезка.

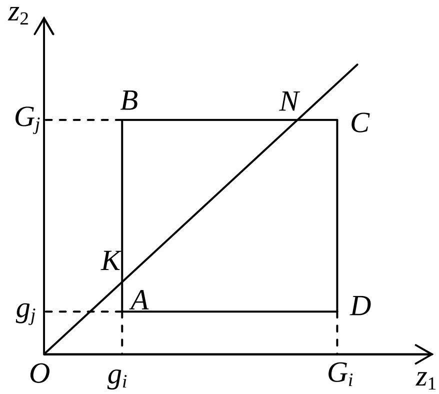

Рис. 1. Задача о сравнении отрезков

Обобщим изложенный подход. С этой целью зафиксируем число $0\le\lambda\le 1$ и рассмотрим величину

$$Q_i(\alpha)=(1-\lambda)\big(g_i(\alpha)+G_i(\alpha)\big)+\lambda\big(g_i(\alpha)-G_i(\alpha)\big). \qquad (4)$$

Выбор наибольшего из двух чисел $Q_i(\alpha)$ и $Q_j(\alpha)$ отражает намерение ЛПР выбрать отрезок, у которого, по возможности, больше середина и меньше длина. Сравнение нечетких чисел A_i и A_j будем проводить с помощью неравенства

$$Q_i(\alpha)\ge Q_j(\alpha). \qquad (5)$$

Слабая предпочтительность нечетких чисел

Определение 1. Будем говорить, что нечеткое число A_i предпочтительней нечеткого числа A_j в слабом смысле, если существует число $0<\gamma\le 1$ такое, что неравенство (5) выполнено при всех $\gamma<\alpha\le 1$.

Пример 1. Функция принадлежности нечеткого числа *A* = «примерно *b* или более» может быть задана следующей формулой:

$$\mu(x)=\frac{1}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)\right) \text{ при } 0\le x\le b, \mu(x)=\exp\left(-\left(\frac{x-b}{\delta}\right)^2\right) \text{ при } b\le x;\ \gamma=\left(1-e^{-\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2}\right). \qquad (6)$$

График этой функции приведен на рис. 2. Множества уровня этого нечеткого числа являются отрезками $[g(\alpha);G(\alpha)]$ с функциями

$$g(\alpha)=\varepsilon\sqrt{-\ln(1-\alpha\gamma)},\, G(\alpha)=b+\delta\sqrt{-\ln\alpha}\,.$$

Поэтому функция (4) равна

$$Q(\alpha)=\varepsilon\sqrt{-\ln(1-\alpha\gamma)}+(1-2\lambda)\left(b+\delta\sqrt{-\ln\alpha}\right)\,.$$

Обозначим

$$t=\sqrt{-\ln\alpha}\Rightarrow\alpha=e^{-t^2},0\le t<+\infty;\quad \alpha\to 1\Leftrightarrow t\to 0.$$

Тогда множество

$$D(t)=Q\left(\exp(-t^2)\right)$$

равно

$$D(t)=\varepsilon\sqrt{-\ln\left(1-\gamma+(1-\exp\left(-t^2\right))\gamma\right)}+(1-2\lambda)\left(b+\delta t\right).$$

Разлагая это выражения по степеням t и используя вид числа γ(6), получим

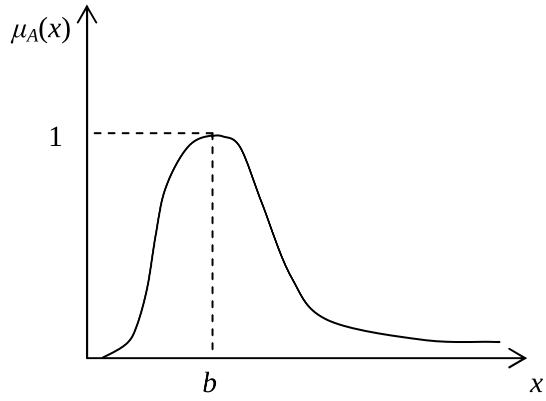

Рис. 2. График функции принадлежности «примерно *b* и не более»

$$D(t)=b\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2b^2}\left(1-\exp\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2\right)t^2\right)+(1-2\lambda)\left(b+\delta t\right)+o(t^2). \tag{7}$$

Запишем неравенство (5) в виде

$$D_i(t)\ge D_j(t) \text{ при малых } t>0. \tag{8}$$

Из формулы (7) получим, что, если $b_i > b_j$, то (8) будет выполнено. Пусть $b_i = b_j = b$. Тогда, если $\delta_i > \delta_j$, то (8) выполнено. Пусть $b_i = b_j = b$, $\delta_i = \delta_j = \delta$. Тогда (8) будет выполнено, если

$$\frac{e^{\tau_i}-1}{\tau_i}<\frac{e^{\tau_j}-1}{\tau_j},\tau=\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2.$$

Поскольку функция $\dfrac{e^{\tau}-1}{\tau}$ возрастает при $\tau > 0$, то предыдущее неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $\varepsilon_i > \varepsilon_j$. Если $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, то, как следует из формулы (6), нечеткие числа A_i и A_j совпадают.

В общем случае анализ слабой предпочтительности нечетких чисел можно проводить с помощью разложения в степенные ряды функции принадлежности.

Из формул (2) и (4) следует, что неравенство (5) равносильно следующему неравенству:

$$\varepsilon_i f_i(\alpha)-\varepsilon_j f_j(\alpha)+(1-2\lambda)(\delta_j\varphi_j(\alpha)-\delta_i\varphi_i(\alpha))\ge a_j-a_i+(1-2\lambda)(b_j-b_i). \tag{9}$$

Из формулы (9) и из условий $f_S(1)=\varphi_S(1)=0$ следует, что, если

$$a_i+(1-2\lambda)b_i>a_j+(1-2\lambda)b_j, \tag{10}$$

то нечеткое число A_i предпочтительнее в слабом смысле нечеткого числа A_j.

Рассмотрим случай, когда в формуле (10) стоит равенство. Будем предполагать, что функции $f_S(\alpha)$ и $\varphi_S(\alpha)$ представимы рядом Тейлора

$$f_S(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}f_S^{(k)}(1),\varphi_S(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\varphi_S^{(k)}(1).$$

Подставим эти формулы в (9). Получим:

$$f_S(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\left(\varepsilon_i f_i^{(k)}(1)-\varepsilon_j f_j^{(k)}(1)+(1-2\lambda)\left(\delta_i\varphi_j^{(k)}(1)-\delta_i\varphi_i^{(k)}(1)\right)\right)\ge 0.$$

Отсюда видно, что если

$$\varepsilon_i f_i'(1)-(1-2\lambda)\delta_i\varphi_i'(1)<\varepsilon_j f_j'(1)-(1-2\lambda)\delta_j\varphi_j'(1), \tag{11}$$

то найдется число $0<\gamma<1$, такое, что неравенство (9) будет выполнено при всех $\gamma<\alpha\le 1$.

Если в неравенстве (11) стоит знак равенства, то рассмотрим следующие слагаемые и так далее.

Таким образом, задача сводится к нахождению оптимального в лексикографическом смысле решения многокритериальной задачи

$$a_i + (1-2\lambda)b_i \to \max, (-1)^k \left(\varepsilon_i f_i^{(k)}(1) - (1-2\lambda)\delta_i \varphi_i^{(k)}(1) \right) \to \max, i = 1,2. \qquad (12)$$

Пример 2. Рассмотрим случай трапецеидальных чисел (см. рис. 3). Их лингвистическое описание имеет вид A = «примерно в интервале $[a, b]$, но не менее $a-\varepsilon$ и не более $b+\delta$».

Формула (2) примет вид:

$$A(\alpha) = [a + (\alpha-1)\varepsilon; b - (\alpha-1)\delta], 0 < \alpha \le 1 .$$

В этом примере $f_S(1) = \varphi_S(1) = \alpha - 1$, при $s = 1, 2$. Поэтому $f_S'(1) = \varphi_S'(1) = 1$, $f_S^{(k)}(1) = \varphi_S^{(k)}(1) = 0$, $k \ge 2$. Задача (9) примет вид

$$a_i + (1-2\lambda)b_i \to \max, -\varepsilon_i + (1-2\lambda)\delta_i \to \max, i = 1,2. \qquad (13)$$

В случае $\lambda = 0$ задачу (13) запишем в виде

$$a_i + b_i \to \max, -\varepsilon_i + \delta_i \to \max, i = 1,2.$$

Допустим, что нечеткое число A_i предпочтительнее A_j, но $a_i + b_i = a_j + b_j$. Тогда из второго критерия получим, что $\delta_i - \varepsilon_i \ge \delta_j - \varepsilon_j$. Как видно из рис. 3, разность $\delta_S - \varepsilon_S$ равна разности $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ площадей треугольников.

Таким образом, если середины отрезков, являющиеся ядрами нечетких чисел A_i и A_j [7], совпадают, то предпочтительней из них в слабом смысле то, у которых разность $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ больше.

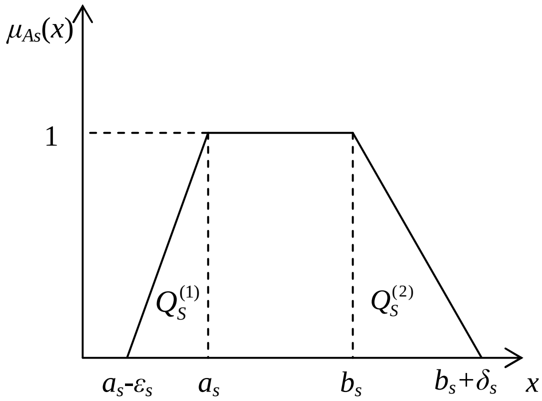

Рис. 3. К иллюстрации оптимальности в лексикографическом смысле

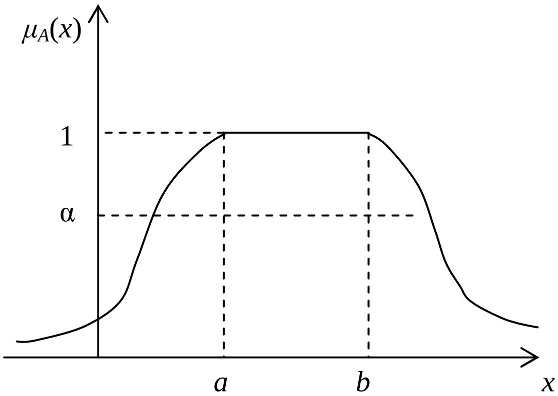

Рис. 4. График функции принадлежности колоколообразного числа

Сильная предпочтительность нечетких чисел

Определение 2. Будем говорить, что нечеткое число A_i предпочтительней нечеткого числа A_j в сильном смысле, если неравенство (5) выполнено при всех $0 < \alpha \le 1$.

Рассмотрим случай, когда $f_S(\alpha) = \varphi_S(\alpha) = \psi(\alpha), s = 1,2$. Функция $\psi : (0;1] \to (-\infty; 0]$ не убывает и $\psi(1) = 0$. Обозначим $t = \psi(\alpha)$ и

$$t_* = \lim_{\alpha \to 0-} \psi(\alpha) . \qquad (14)$$

Тогда неравенство (9) можно записать в следующем виде:

$$\left((\varepsilon_i - \varepsilon_j) - (1-2\lambda)(\delta_i - \delta_j) \right) t + a_i - a_j + (1-2\lambda)(b_i - b_j) \ge 0 \text{ при } t \le 0 . \qquad (15)$$

Случай $t_* = -\infty$. Тогда неравенство (15) выполнено при всех $t \le 0$ в том и только том случае, когда выполнено неравенство (10) и

$$\varepsilon_i - (1-2\lambda)\delta_i \le \varepsilon_j - (1-2\lambda)\delta_j . \qquad (16)$$

Случай $t_* > -\infty$. В этом случае неравенство (15) выполнено при всех $t_* < t \le 0$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (10) и

$$\left(\varepsilon_i - (1-2\lambda)\delta_i \right) t_* + a_i + (1-2\lambda)b_i \ge \left(\varepsilon_j - (1-2\lambda)\delta_j \right) t_* + a_j + (1-2\lambda)b_j . \qquad (17)$$

Пример 3. Рассмотрим случай колоколообразных нечетких чисел A, у которых функция принадлежности имеет вид (см. рис. 4):

$$\mu_A(x)=\exp\left(-\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)^2\right) \text{ при } x \le a;\ \mu_A(x) = 1 \text{ при } a \le x \le b;$$

$$\mu_A(x)=\exp\left(-\left(\frac{x-b}{\delta}\right)^2\right) \text{ при } b \le x.$$

Здесь числа $a \le b, \varepsilon > 0, \delta > 0$ заданы. Лингвистическое описание таких нечетких чисел имеет вид A = «примерно в интервале $[a, b]$». Для таких нечетких чисел множества уровня равны

$$A(\alpha)=\left[a+\varepsilon\psi(\alpha), b-\delta\psi(\alpha)\right],\ \psi(\alpha)=\sqrt{-\ln\alpha}\ . \quad (18)$$

Из формул (12) и (14) получим, что $t_* = -\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 0$. Тогда неравенства (10) и (16) примут вид:

$$a_i + b_i \ge a_j + b_j,\ \varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j .$$

Дадим геометрическую интерпретацию (см. рис. 4). Условие $a_i + b_i \to \max$ означает, что для ЛПР предпочтительнее то число, у которого середина отрезка больше.

Выясним смысл условия $\varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j$. Для этого вычислим площадь $Q_S^{(1)}$ (см. рис. 5). Используя формулу для значения интеграла Лапласа [8, с. 248], получим

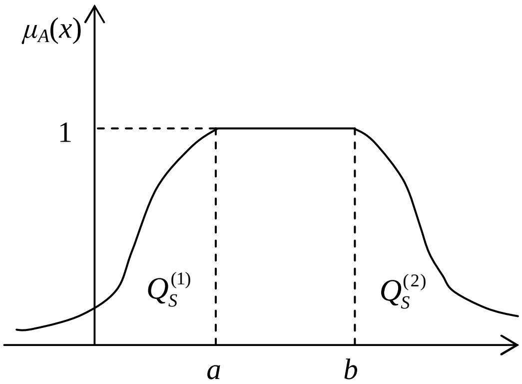

Рис. 5. Геометрическая интерпретация

$$Q_S^{(1)} = \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon_S{}^2}\right)dx = \varepsilon_S \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-t^2\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\varepsilon_S\ .$$

Аналогично,

$$Q_S^{(2)} = \int_{b}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{\delta_S{}^2}\right)dx = \delta_S \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta_S\ .$$

Поэтому $\varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j \Leftrightarrow Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)} \le Q_j^{(2)} - Q_j^{(1)}$. Таким образом, если середины отрезков, являющиеся ядрами нечетких чисел, совпадают, то предпочтительней из них в сильном смысле будет то, у которого разность $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ больше.

Литература

1. Zadeh, L.A. Fuzzy Sets / L.A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

2. Dutta, P. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study / P. Dutta, H. Boruah, T. Ali // International Journal of Latest Trends in Computing. – March 2011. – Vol. 2. – P. 99–107.

3. Bansal, A. Trapezoidal Fuzzy Numbers (a.b.c.d.): Arithmetic Behavior / A. Bansal // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 2, № 1. – P. 39–44.

4.Chen, S. Fuzzy multiple attribute decision making methods and applications / S. Chen, C. Hwang. – Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1992.

5. Ухоботов В.И. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел / В.И. Ухоботов, П.В. Щичко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 10. – № 37(254). – С. 54–62.

6. Галлямов, Е.Р. Компьютерная реализация операций с нечеткими числами / Е.Р. Галлямов, В.И. Ухоботов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2014. – Т. 3, № 3. – С. 97–108.

7. Ухоботов, В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск, Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 266 с.

Поступила в редакцию 3 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 32–37

AN APPROACH TO THE COMPARISON OF FUZZY NUMBERS IN DECISION-MAKING PROBLEMS

***V.I. Ukhobotov*[1], *E.S. Mihailova*[2]**

In decision-making problems, when a decision maker has information about unmanageable factors in fuzzy numbers, the problem of its comparison appears. Nowadays, a lot of different methods of comparing fuzzy numbers have been proposed. However, none of them is universal. Moreover, almost each method has pitfalls such as the difficulty of interpretation and inconsistency with human intuition. In the decision making theory the character of the applied problem is a dominant factor of choosing the method of comparing fuzzy numbers.

In this paper an approach of comparing fuzzy numbers has been proposed based on the comparison of α-cuts. Conceptions of strong and soft preferences are proposed. According to these definitions trapezoidal and bell-shaped fuzzy numbers have been compared. This method leads to finding the solution in the lexicographic meaning of a certain multi-objective problem for some classes of fuzzy numbers. Geometrical interpretation has been given for trapezoidal and bell-shaped fuzzy numbers.

Keywords: fuzzy set; fuzzy number; comparison of fuzzy numbers; α-cut.

References

1. Zadeh L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control.* 1965. Vol. 8. pp. 338–353.

2. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study. *International Journal of Latest Trends in Computing.* March 2011. Vol. 2. pp. 99–107.

3. Bansal A. Trapezoidal Fuzzy Numbers (a.b.c.d.): Arithmetic Behavior. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 2, no. 1. pp. 39–44.

4. Chen S., Hwang C. *Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications.* Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1992.

5. Ukhobotov V.I., Shchichko P.V. Ob odnom podhode k sravneniu nechetkih chisel (An approach to ranking fuzzy numbers). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie I programmirovanie"*. 2011. Issue 10. no. 37(254). pp. 54–62. (in Russ.).

6. Gallyamov E.R., Ukhobotov V.I. Komp'uternaya realizasia operasii s nechetkimi chislami. (Computer implementation of operations with fuzzy numbers). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Vychislitel'naya matematika i informatika"*. 2014. Issue 3. no. 3. pp. 97–108. (in Russ.).

7. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkix mnozhestv: uchebnoe posobie* (The Selected Chapters of the Theory of Fuzzy Sets: study guide). Chelyabinsk, Publishing of Chelyabinsk State University, 2011. 245 p. (in Russ.).

8. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki.* (The Course of Higher Mathematics). Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1974. 266 p. (in Russ.).

Received 3 December 2014

[1] Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, The Head of Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: ukh@csu.ru

[2] Mihailova Ekaterina Sergeevna is Post-Graduate Student, Theory of the Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com