

ПРОГРЕССИРУЮЩЕЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ДИСКОВ ПРИ ТЕПЛОСМЕНАХ БЕЗ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК¹

О.Ф. Чернявский²

Показано, что циклическое перемещение теплового фронта или волны по радиусу диска может приводить к непрекращающемуся остаточному увеличению или уменьшению его радиуса при небольших перепадах температуры: от нескольких десятков градусов для стальных дисков. На примере изгиба диска показано, что аналогичные явления могут быть обусловлены также температурно-временной зависимостью свойств материала.

Ключевые слова: приспособляемость; прогрессирующее формоизменение; ползучесть; диски.

Плоский диск из изотропного идеально упругопластического материала с постоянным пределом текучести σ_s подвергается циклическим воздействиям подвижного температурного поля типа теплового фронта или волны. Для отчетливого выявления качественных особенностей процесса деформирования принята простейшая схематизация распределения температуры: последняя постоянна и равна t в одной части диска и нулю в другой его части. Рассматривается три возможных варианта: движение границы нагретой периферийной части диска от периферии к центру и обратно, $t \geq 0$ (рис. 1, а), расширение и последующее сужение нагретой центральной зоны, $t \leq 0$ (рис. 1, б) и движение горячей волны (рис. 1, в).

$t > 0$

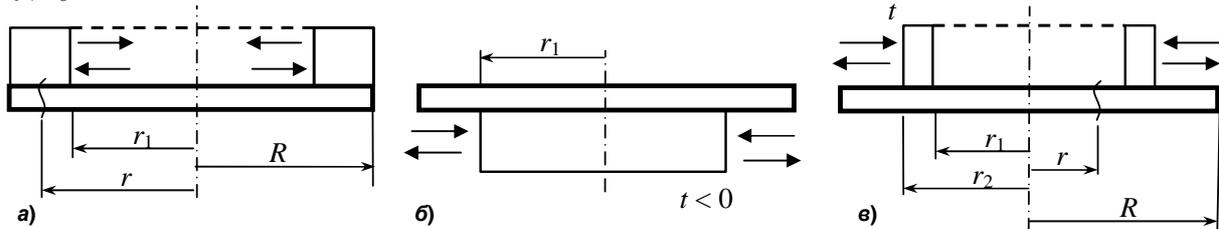


Рис. 1. Температурное поле диска

Целью расчета является определение температуры t , при которой начинается стабильное (не прекращающееся с ростом числа циклов) накопление остаточных перемещений в диске, а также распределения этих перемещений по радиусу. Решение этих задач выполняется в предположении полной круговой симметрии на основе кинематической и статической теорем теории приспособляемости в форме, приведенной в [1]. В соответствии с кинематической теоремой прогрессирующее накопление остаточных перемещений в диске реализуется, если существуют какие-либо приращения остаточных радиальных перемещений за цикл Δu и связанных с ними условиями совместности приращений радиальных и окружных пластических деформаций $\Delta \varepsilon_r$, $\Delta \varepsilon_\varphi$, для которых

$$\int_v \min_{\tau} \left[(\sigma_r - \sigma_r^{(e)}) \Delta \varepsilon_r + (\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^{(e)}) \Delta \varepsilon_\varphi \right] dv + \int_{S_\mu} \min_{\tau} (\sigma_s - \sigma_r^{(e)}) \Delta u' dS \leq 0. \quad (1)$$

Здесь σ_r , σ_φ – напряжения на поверхности текучести материала, связанные с приращениями пластических деформаций $\Delta \varepsilon_r$, $\Delta \varepsilon_\varphi$ ассоциированным законом течения; $\sigma_r^{(e)}$, $\sigma_\varphi^{(e)}$ – температурные напряжения, вычисленные в предположении идеальной упругости материала, σ_s – расчетный предел текучести материала [1], v – объем диска, $\Delta u'$ – разрыв приращения радиального перемещения на поверхности S_μ .

Условия совместности приращений пластических деформаций и перемещений за цикл имеют для диска вид [2]

¹ Работа выполнялась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта «Создание производства модельного ряда микротурбинных энергоустановок нового поколения» по договору № 02.G25.31.0078 от 23.05.2013 г.

² Чернявский Олег Федорович – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, профессор кафедры прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: a.o.cher@mail.ru

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{d(\Delta u)}{dr}, \quad \Delta \varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}. \quad (2)$$

Изображенному на рис. 1, а мгновенному распределению температур соответствуют термоупругие напряжения [2]

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(e)} = \sigma_\varphi^{(e)} &= \frac{\alpha Et}{2} (1 - \rho_1^2) \text{ при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 \quad \left(\rho = \frac{r}{R}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{R} \right), \\ \sigma_r^{(e)} &= \frac{\alpha Et}{2} \frac{\rho_1^2}{\rho^2} (1 - \rho^2), \quad \sigma_\varphi^{(e)} = -\frac{\alpha Et}{2} \frac{\rho_1^2}{\rho^2} (1 + \rho^2) \text{ при } \rho_1 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Рис. 2 иллюстрирует изменение этих напряжений по радиусу при различных значениях ρ_1 (т.е. в разные моменты времени цикла) при положительном перепаде температур (рис. 1, а). Радиальным и окружным напряжениям соответствуют сплошные линии на рис. 2; штриховыми линиями показано объемлющее распределение. Максимальное значение радиальных и минимальное значение окружных напряжений достигаются в каждой точке диска одновременно – в момент прохождения через нее теплового фронта ($\rho = \rho_1$). Разность этих напряжений больше каждого из них:

$$\begin{aligned} \max_\tau (\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}) &= \alpha Et, \\ \min_\tau (\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При действии температурного поля, изображенного на рис. 1, б, напряжения отличаются от представленных на рис. 2 только знаком. При этом

$$\max_\tau (\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}) = 0, \quad \min_\tau (\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}) = -\alpha Et. \quad (5)$$

В соответствии с приближенным кинематическим методом теории приспособляемости примем, что приращения за цикл остаточных радиальных перемещений в диске при $t \geq 0$

$$\Delta u = \frac{C}{r}, \quad C = \text{const}, \quad C \leq 0. \quad (6)$$

Тогда в соответствии с (2)

$$\Delta \varepsilon_r = -\frac{C}{r^2}, \quad \Delta \varepsilon_\varphi = \frac{C}{r^2}, \quad \Delta \varepsilon_r \geq 0. \quad (7)$$

При условии текучести Треска–Сен-Венана

$$\max(|\sigma_r|, |\sigma_\varphi|, |\sigma_r - \sigma_\varphi|) = \sigma_s \quad (8)$$

приращения пластических деформаций (7) соответствуют (согласно ассоциированному закону течения) напряжения на поверхности текучести

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = \sigma_s. \quad (9)$$

Подставляя в баланс работ (1) соотношения (7), (9) и (4), получим верхнюю оценку условий начала прогрессирующего формоизменения:

$$\alpha Et_f = \sigma_s. \quad (10)$$

Здесь t_f – значение температуры t , при котором начинается прогрессирующее формоизменение. Нетрудно доказать, что эта верхняя оценка совпадает с точным решением, поскольку при напряжениях (3), условия (10) и нулевых значениях, не зависящих от времени остаточных напряжений, выполняются все требования статической теоремы теории приспособляемости [1].

Таким образом, в диске из материала с несущественным деформационным упрочнением повторные перемещения по радиусу границы нагретой периферийной зоны приводят при условии

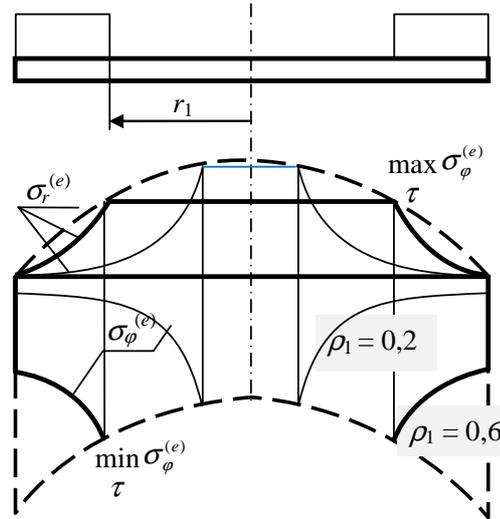


Рис. 2. Термоупругие напряжения в пластине в разные моменты времени

(10) к прогрессирующему перемещению всех точек в направлении центра диска (уменьшению любого заданного радиуса r по закону (6)). При этом вследствие пластического деформирования ликвидируются любые имевшиеся ранее остаточные напряжения. Из условия несжимаемости материала при пластическом деформировании следует, что при этом толщина диска не меняется.

В качестве примера отметим, что при рассматриваемых здесь воздействиях для диска из стали 12Х18Н9 (коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 18,2$ 1/град, модуль упругости $E = 165$ ГПа, расчетный предел текучести $\sigma_s = 118$ МПа при температуре 500 °С) температурный перепад начала прогрессирующего формоизменения t_f составляет 40 °С. С уменьшением расчетного предела текучести эта величина уменьшается.

Следует отметить, что приращения остаточных перемещений и деформаций за цикл (6) и (7) соответствуют движению изображенного на рис.1, а температурного фронта по всему диску – от центра до периферии. Очевидно, что в центральной части диска такое поле температур не может существовать по условиям теплообмена. Чтобы приблизить условия нагружения диска к реальным, примем, что в центральной части диска с радиусом a температура не изменяется в течение цикла, а приращения перемещений здесь равны нулю. С учетом разрыва приращений перемещений из (1) тогда следует, что

$$\alpha Et_f = \sigma_s \left(1 + \ln \frac{R}{a} \right) / \ln \frac{R}{a}.$$

При повторных перемещениях границы между холодной периферией и горячим центром диска результаты аналогичного расчета отличаются только знаком константы C в (6), т.е. при перепаде температуры, превышающем определенный из (10), имеет место прогрессирующее увеличение радиуса диска.

Рассмотрим теперь циклические воздействия тепловой волны, изображенной на рис. 1, в. Термоупругие напряжения в этом случае могут быть вычислены как комбинация решений для полей, изображенных на рис. 1, а и б. С учетом обозначений, показанных на рис. 1, в, получим

$$\sigma_r^{(e)} = \sigma_\varphi^{(e)} = \frac{\alpha Et}{2} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 \quad \left(\rho = \frac{r}{R}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{R} \right).$$

При $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$

$$\sigma_r^{(e)} = -\frac{\alpha Et}{2} \left[1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} - (\rho_2^2 - \rho_1^2) \right], \quad \sigma_\varphi^{(e)} = -\frac{\alpha Et}{2} \left[1 + \frac{\rho_1^2}{\rho^2} - (\rho_2^2 - \rho_1^2) \right]. \quad (11)$$

При $\rho_2 \leq \rho \leq 1$

$$\sigma_r^{(e)} = -\frac{\alpha Et}{2} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \frac{1 - \rho^2}{\rho^2}, \quad \sigma_\varphi^{(e)} = \frac{\alpha Et}{2} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2}.$$

Распределение этих напряжений по радиусу диска иллюстрирует рис. 3 для двух значений ρ_1 при $\rho_2 - \rho_1 = 0,1$. Максимальное значение разности радиальных и окружных напряжений (превышающее максимальные значения каждой составляющей) достигается на внутренней стороне горячей волны:

$$\max_{\tau} (\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}) = \alpha Et,$$

и условие начала прогрессирующего формоизменения для «узкой» волны, когда $\rho_2 - \rho_1 \ll 1$, практически совпадает с (10). Однако в отличие от движущегося теплового фронта, минимальное

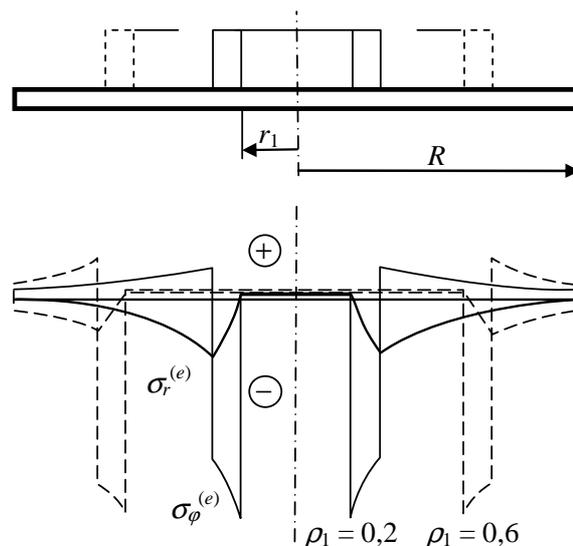


Рис. 3. Термоупругие напряжения при движении тепловой волны

значение разности термоупругих радиальных и окружных напряжений не равно нулю; оно достигается в холодной зоне на внешней границе горячей тепловой волны:

$$\max_{\tau} (\sigma_r^{(e)} - \sigma_{\varphi}^{(e)}) = -\alpha E t \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho^2}. \tag{12}$$

В результате в небольшой центральной части диска реализуется знакопеременное неупругое деформирование, начинающееся раньше, чем прогрессирующее формоизменение. Как и в случае движения теплового фронта, особенности решения в центре диска исчезают, если принять, что в центральной части температура постоянна в течение цикла. Можно, по-видимому, ожидать, что при одинаковых максимальных температурах повторные проходы тепловой волны приведут к меньшим остаточным перемещениям, чем проходы теплового фронта. Количественная оценка различий требует расчета кинетики неупругого деформирования.

В рассмотренных примерах необходимое условие существования прогрессирующего формоизменения (неизохронность неупругого деформирования [1]) выполнялось за счет движения зоны действия максимальных напряжений. Покажем теперь, что накопление остаточных перемещений и деформаций при теплосменах без механической нагрузки возможно даже при однопараметрических тепловых воздействиях, если температурно-временная зависимость свойств материала приводит к неодновременности неупругого деформирования по объему диска. Диск постоянной толщины $2h$ с жестким ободом, изображенный на рис. 4, а, подвергается повторным нагревам и охлаждениям с линейным распределением температуры по толщине в каждый момент времени цикла (рис. 4, б) при равномерном нагреве обода до средней температуры диска. На кратковременных режимах нагрева и охлаждения перепад температуры по толщине отличен от нуля (температуры в разные моменты времени иллюстрируют тонкие линии на рис. 4, б, максимальному значению перепада $\Delta t = t_1 - t_2$ соответствует линия 1). При этом расчетный предел текучести σ_S (равный пределу прочности материала [3]) остается постоянным, а термоупругие напряжения

$$\sigma_r^{(e)} = \sigma_{\varphi}^{(e)} = \frac{\alpha E \Delta t(\tau) z}{2(1-\mu) h}. \tag{13}$$

На длительном стационарном режиме температура t_0 постоянна по толщине (линия 2 на рис. 4, б) и термоупругие напряжения отсутствуют, а предел длительной прочности $\sigma_{S\tau}$ меньше, чем σ_S .

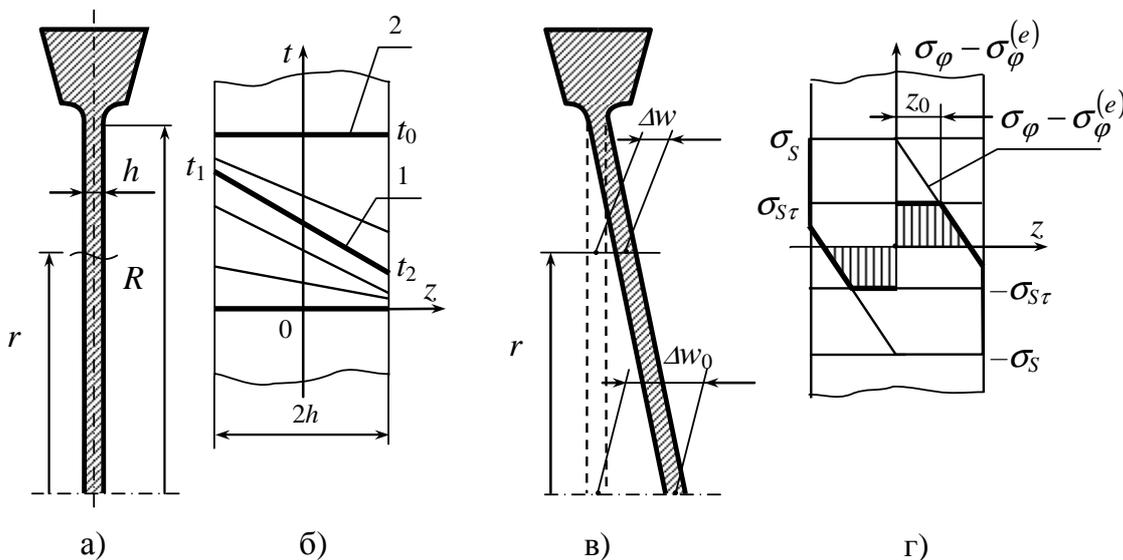


Рис. 4. Прогрессирующий изгиб диска

Предположим, что приращения прогибов диска за один стабильный цикл распределяются как показано на рис. 4, в:

$$\Delta w = \Delta w_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{14}$$

Им соответствуют приращения радиальных и окружных неупругих деформаций

$$\Delta \varepsilon_r = -z \frac{d^2(\Delta w)}{dr^2} \equiv 0, \quad \Delta \varepsilon_\varphi = -\frac{z}{r} \frac{d(\Delta w)}{dr} = \frac{z}{r} \frac{\Delta w_0}{R}. \quad (15)$$

На цилиндрической поверхности $r = R$, $-h \leq z \leq h$ имеет место разрыв приращений радиальных перемещений за цикл на величину

$$\Delta u' = -z \frac{\Delta w_0}{R}. \quad (16)$$

Соотношение (1) принимает тогда вид

$$\int_0^R r \int_{-h}^h \min_{\tau} \left[\left(\sigma_\varphi \operatorname{sign} z - \sigma_\varphi^{(e)} \right) \frac{z \Delta w_0}{r R} \right] dz + R \int_{-h}^h \min_{\tau} \left[\left(\sigma_r \operatorname{sign}(-z) - \sigma_r^{(e)} \right) \left(-z \frac{\Delta w_0}{R} \right) \right] dz \leq 0. \quad (17)$$

Определение значений разности окружных напряжений на поверхности текучести $\sigma_\varphi \operatorname{sign} z$ при условии текучести Треска–Сен-Венана и термоупругих напряжений $\sigma_\varphi^{(e)}$, которые доставляют минимум первому подынтегральному выражению в (17), иллюстрирует рис. 4, з. В приповерхностных слоях диска (при $|z| \geq z_0$) они достигаются (т.е. реализуется неупругое деформирование) на кратковременном переходном режиме при достаточно больших максимальных термических напряжениях. В остальной части неупругое деформирование реализуется в виде ползучести на стационарном режиме.

В зоне разрыва приращений перемещений (16) минимальное значение второго подынтегрального выражения в (17) достигается всюду на стационарном режиме. Таким образом, выполняется необходимое условие существования прогрессирующего накопления остаточных перемещений: неизохронность неупругого деформирования. Из соотношения (17) после подстановки значений напряжений, показанных на рис. 4, з, следует достаточное условие:

$$q + \frac{(1-a)^3}{2q^2} - \frac{3}{2}(1+a) \geq 0, \quad q \geq 1-a, \quad q = \frac{\alpha E \Delta t_f}{2(1-\mu)\sigma_S}, \quad \Delta t_f = t_1 - t_2, \quad a = \frac{\sigma_{S\tau}}{\sigma_S}.$$

Зависимость предельного перепада температуры от величины a иллюстрирует рис. 5. Для сравнения отметим, что условие реализации знакопеременного течения имеет вид [3]

$$\frac{\alpha E \Delta t_f}{2(1-\mu)} \geq \sigma_{0,2} + \sigma_{0,2/\tau},$$

где $\sigma_{0,2}$ – предел текучести, а $\sigma_{0,2/\tau}$ – предел ползучести при длительности выдержки в одном цикле. Очевидно, что при характерной для повышенных температур небольшой разнице величин σ_S , $\sigma_{0,2}$, $\sigma_{0,2/\tau}$ прогрессирующее формоизменение реализуется при меньших перепадах температуры, чем знакопеременное течение.

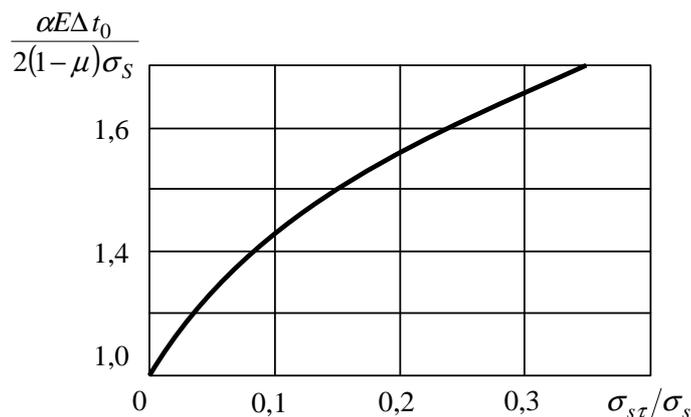


Рис. 5. Зависимость предельного перепада температуры от величины $\sigma_{S\tau}/\sigma_S$

Рассмотренные особенности накопления остаточных перемещений и деформаций могут оказывать существенное влияние на работоспособность дисков газотурбинных установок, подов нагревательных печей, плоских днищ термонапряженных сосудов.

Литература

1. Gokhfeld, D.A. Limit analysis of structures at thermal cycling / D.A. Gokhfeld, O.F. Cherniavsky – The Netherlands; – Rockville, USA: Sijthoff and Noordhoff. Int. Publ. Alphen aan den Rijn, 1980. – 577 p.

2. Малинин, Н.Н. Прочность турбомашин / Н.Н. Малинин. – М.: Mashgiz, 1962. – 291 с.

3. Чернявский, О.Ф. Приспособляемость конструкций в условиях ползучести / О.Ф. Чернявский // Динамика, прочность и износостойкость машин. – 2001. – № 8. – С. 43–56.

Поступила в редакцию 30 октября 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 42–47

**PROGRESSIVE DISC COLLAPSE AT THERMAL CYCLING
WITHOUT MECHANICAL LOADING**

O.F. Chernyavsky¹

The cyclic movement of the heat front or wave along the disk radius is shown to lead to the residual unceasing increase or decrease of its radius at small temperature differences – from a few tens of degrees for steel disks. By the example of a disk bending it was shown that similar effects can also be caused by time-temperature dependences.

Keywords: shakedown; progressive disc collapse; creep; disks; strength of turbomachinery.

References

1. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. *Limit analysis of structures at thermal cycling*. The Netherlands; Rockville, USA: Sijthoff and Noordhoff. Int. Publ. Alphen aan den Rijn, 1980. 577 p.

2. Malinin N.N. *Prochnost' turbomashin* (Strength of turbomachinery). Moscow, Mashgiz Publ., 1962. 291 p. (in Russ.).

3. Cherniavsky O.F. *Prisposoblyaemost' konstruksiy v usloviyakh polzuchesti* (Shakedown of structures at creep). *Dinamika, prochnost' i iznosostoykost' mashin* (Dynamics, strength and wear-resistance of machines). 2001. no. 8. pp. 43–56. (in Russ.).

Received 30 October 2014

¹ Cherniavsky Oleg Fedorovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Honoured Scientist and Engineer of Russian Federation, professor of applied mechanics, dynamics and durability of machines department, South Ural State University.

E-mail: a.o.cher@mail.ru