Математика

УДК 517.946

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р.А. Алиев[1]

Рассмотрена обратная задача определения коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике. Задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов приводят к подобным обратным задачам. Использованием метода оценок типа Карлемана доказывается теорема единственности поставленной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача; эллиптическое уравнение.

Обратные задачи для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах [1–9]. В работах [2, 10] используя метод оценок типа Карлемана [11–12] получена теорема единственности для широкого класса обратных задач. В работе с использованием этой идеи получена теорема единственности для уравнения эллиптического типа.

Рассмотрим задачу об определении $\{q(u), u(x,y), \phi_2(y)\}$ из следующих условий

$$-\Delta u + u = h_1(x,y)q(u) + h_2(x,y), \ \ (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$u_x(0,y) = \phi_1(y), u_x(l_1,y) = \phi_2(y), \ \ 0 \le y \le l_2, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_y(x,l_2) = \varphi_2(x), \ 0 \le x \le l_1, \tag{3}$$

$$u(d_0,y) = \chi(y), 0 < d_0 < l_1, \ 0 \le y \le l_2, \tag{4}$$

$$u_y\Big|_{y=0} = g(x), \ 0 \le x \le l_1, \tag{5}$$

удовлетворяющих условиям $\varphi_{1x}(0) = \phi_1(0), \varphi_{1x}(l_1) = \phi_2(0), \varphi_{2x}(0) = \phi_{1y}(l_2), \varphi_{2x}(l_1) = \phi_{2y}(l_2)$, $\phi_{1y}(0) = g_x(0), \phi_{2y}(0) = g_x(l_1)$, $\varphi_1(d_0) = \chi(0), \varphi_2(d_0) = \chi_y(l_2)$. Здесь $D = \{(x,y) \big| 0 < x < l_1$, $0 < y < l_2\}, h_i(x,y)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1,2, \phi_1(y), \chi(y), g(x)$ – известные функции, $h_i(x,y) \in C^{3+\alpha}(\bar{D}), i = 1,2, \varphi_1(x) \in C^{4+a}[0,l_1], \varphi_2(x) \in C^{3+a}[0,l_1], \phi_1(y) \in C^{3+\alpha}[0,l_2]$, $\chi(y) \in C^{4+\alpha}[0,l_2]$, $g(x) \in C^{3+a}[0,l_1]$, $R_1 = \varphi_1(0), R_2 = \chi(l_2)$, $0 < \alpha < 1$.

Определение. Функции $\{q(u), u(x,y), \phi_2(y)\}$ назовем решением задачи (1)–(5), если функции $q(u), \phi_2(y)$ принадлежат соответственно классам $\mathcal{M}[R_1,R_2]$ и $\mathcal{N}[0,l_2]$, в которых $0 < \mu_1 \le$ $\le q(u) \le \mu_2, \nu_1 \le q'(u) \le \nu_2 < 0, q(u) \in C^2[R_1,R_2], \phi_2(y) \ge \mu > 0, \phi_{2y}(y) \ge 0, \phi_2(y) \in C^3[0,l_2]$, $u(x,y) \in$ $C^4(\bar{D})$ и удовлетворяют соотношениям (1)–(5).

Обозначим через $\alpha_0 = \varphi_1(0), \alpha_1 = \varphi_1(l_1), \alpha_2 = \chi(l_2)$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Для каждого $z \in [\alpha_1, \alpha_2]$ через $s_z(x)$ обозначим функцию $y = s_z(x)$, являющуюся решением уравнения $u(x, s_z(x)) = z$, $(x, s_z(x)) \in \bar{D}$. Введем обозначение: $D_z = \{(x,y) \in D, \ u(x,y) < z\}$. Для каждого $z \in [\alpha_1, \alpha_2]$ обозначим $u(x, s_z(d_0)) = f_z(x)$. Очевидно, что $f_z(d_0) = z$. Пусть $\chi'(y) > 0$ и $\gamma(z)$ обратная функция $\chi(y)$, тогда $\gamma(z) = s_z(d_0)$.

Теорема 1. Пусть $a_{ij}(x,y) \in C^2(\bar{D})$, $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda_1 \sum\limits_{i=1}^{2} \xi_i^2, \lambda_1 > 0$ и функция $u(x,y) \in C^2(D) \cap$ $\cap C(\bar{D})$ и удовлетворяет в области D условию

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + b_3(x,y)u \, ,$$

[1] Алиев Рамиз Аташ оглы – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и информационных систем, Азербайджанский университет кооперации, г. Баку, Азербайджан.
E-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

где $b_i(x,y), i=1,2,3$ – ограниченные функции на $\bar{D}$. Если в области D

$$\left|a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}\right|\le M\left[\left|u_x\right|+\left|u_y\right|+\left|u\right|\right],\ M>0,\ (x,y)\in D,$$

$$u(l_1,y)=0, u_x(l_1,y)=0,\quad y\in[0,l_2],$$

тогда $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}$ [11, с. 99].

Лемма 1. Пусть решение задачи (1)–(5) существует и выполнены следующие условия

$$h_1(x,y)>0, h_{ix}(x,y)>0, h_{iy}(x,y)>0, i=1,2,\ \varphi_{1x}(x)\ge\mu,$$

$$\varphi_2(x)\ge\mu, \phi_1(y)\ge\mu, g(x)\ge\mu, \phi_{1y}(y)\le 0.$$

Тогда верны следующие оценки

$$u_x(x,y), u_y(x,y)\ge\lambda_2>0, \tag{6}$$

где

$$\mu=\min\{\min_x g(x), \min_x\varphi_{1x}(x), \min_x\varphi_2(x), \min_y\phi_1(y)\},$$

$$\lambda_2=\min\{\mu, \min_{\bar{D}}\frac{\mu_1 h_{1x}(x,y)+h_{2x}(x,y)}{1-\nu_1 h_1(x,y)},\ \min_{\bar{D}}\frac{\mu_1 h_{1y}(x,y)+h_{2y}(x,y)}{1-\nu_1 h_1(x,y)}\}.$$

Доказательство. Задачу $(1)-(3)$ продифференцируем соответственно по x и y, учитывая условия леммы и используя принцип максимума, получим оценки (6). Лемма доказана.

В силу (6) функция $s_z(x)$ корректно определена для всех x, таких, что $u(x,l_2)\ge z$ и в частности, для всех $x\in[d_0,l_1]$.

Теорема. Пусть $\alpha_1<\alpha_2$ и функция $q(z)$ известна при $z\in(\alpha_0,\alpha_1)$. Тогда найдется не более одной вектор-функции $(u,q,\phi_2(y))\in C^4(\bar{D}_{\alpha_2})\times\ \mathcal{M}[\alpha_0,\alpha_2]\times\mathcal{N}[0,s_{\alpha_2}(d_0)]$ удовлетворяющей (1)–(5), (6) и такой, что $u(x,y)\in C^4(\bar{D})$.

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 2. Пусть числа $c\in[\alpha_1,\alpha_2], q(z)$ известны при $z\in[\alpha_0,c]$. Тогда функция $u(x,y)$ в области D_c определяется единственным образом.

Доказательство. В силу (6) $s_c(d_0)\in(0,l_2), \chi(s_c(d_0))=c$ и число $s_c(d_0)$ известно, так как функция χ известна. Обозначим $G_{\alpha_1}=(0,d_0)\times(0,s_{\alpha_1}(d_0)),\ G_c=(0,d_0)\times(s_{\alpha_1}(d_0),s_c(d_0))$ при $c>\alpha_1$ и $G=(0,d_0)\times(0,s_c(d_0))$. Очевидно, что $G=G_{\alpha_1}\cup G_c$.

Введем функцию

$$L(x,y)=\begin{cases}q(\varphi_1(x)),(x,y)\in G_{\alpha_1},\\ q(\chi(y)),(x,y)\in G_c.\end{cases}$$

В области $G=(0,d_0)\times(0,s_c(d_0))$ рассмотрим обратную задачу об определении функции $\{f(x),u(x,y)\}$ из следующих условий

$$-\Delta u+u=h_1(x,y)L(x,y)+h_2(x,y), (x,y)\in G, \tag{7}$$

$$u_x(0,y)=\phi_1(y), u(d_0,y))=\chi(y),\ y\in(0,s_c(d_0)), \tag{8}$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x), u(x,s_c(d_0))=f_c(x),\ x\in(0,d_0), \tag{9}$$

$$u_y\big|_{y=0}=g(x), x\in(0,d_0), \tag{10}$$

удовлетворяющих условиям $\varphi_{1x}(0)=\phi_1(0), \varphi_1(d_0)=\chi(0), f_{cx}(0)=\phi_1(s_c(d_0)),\ f_c(d_0)=\chi(s_c(d_0)),$ $\chi_y(0)=g(d_0), \phi_{1y}(0)=g_x(0).$

Предположим, что существуют два решения: $\{u_1(x,y), f_{1c}(x)\}$ и $\{u_2(x,y), f_{2c}(x)\}$. Обозначим $\tilde{u}(x,y)=u_2(x,y)-u_1(x,y),\ \tilde{f}_c(x)=f_{2c}(x)-f_{1c}(x)$. Тогда получим

$$\Delta\tilde{u}+\tilde{u}=0, \tag{11}$$

$$\tilde{u}_x(0,y)=0,\ \tilde{u}(d_0,y)=0, \tag{12}$$

$$\tilde{u}(x,0)=0,\ \tilde{u}(x,s_c(d_0))=\tilde{f}_c(x) \qquad (13)$$

$$u_y\Big|_{y=0}=0\,. \qquad (14)$$

С помощью метода разделения переменных решение задачи (11)–(13) ищем, как обычно, в виде ряда

$$\tilde{u}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\{\mathrm{sh}[(\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}y\}\cos\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi x\,.$$

Условие при $y=d\equiv s_c(d_0)$ дает

$$A_n=\frac{\tilde{\rho}_n}{\mathrm{sh}[(\frac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}d}\,,$$

где

$$\tilde{\rho}_n=\tfrac{2}{d_0}\int_0^{d_0}\tilde{f}_c(\xi)\cos\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi\xi d\xi\,.$$

Тогда получим

$$\tilde{u}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\rho}_n\frac{\mathrm{sh}[(\frac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}y}{\mathrm{sh}[(\frac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}d}\cos\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi x\,.$$

Отсюда, учитывая условия (14), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}\frac{\tilde{\rho}_n}{\mathrm{sh}[(\frac{2n+1}{2d_0}\pi)^2+1]^{1/2}d}\cos\tfrac{2n+1}{2d_0}\pi x=0\,.$$

В силу единственности разложения $\rho_n=0$ для любого n, так как система $\{\cos\frac{2n+1}{2d_0}\pi x\}$ замкнута, $\tilde{f}_c(x)=0$. Значит решение единственно. Лемма доказана.

Сделаем преобразование годографа в области $[d_0,l_1]\times[0,l_2]$ по формулам $u(\omega(z,y),y)=z$. Тогда вместо (1)–(4) получим

$$(\frac{1}{\omega_z^3}+\frac{\omega_y^2}{\omega_z^3})\omega_{ZZ}-2\frac{\omega_y}{\omega_z^2}\omega_{zy}+\frac{1}{\omega_z}\omega_{yy}=q(z)h_1(\omega,y)+h_2(\omega,y),\ \varphi_1(d_0)<z<\chi(l_2),0<y<\gamma(z), \qquad (15)$$

$$\omega(z,\gamma(z))=d_0\,. \qquad (16)$$

При условии (6) уравнение (15) сохраняет условие равномерной эллиптичности. Обозначим $D_c(d_0)=D_c\cap\{y\in(0,\gamma(c))\}$. Рассмотрим теперь область $H_c=\{(z,y):\varphi_1(d_0)<z<c,$ $0<y<\gamma(z)\}$ – образ области $D_c(d_0)\setminus G$ при преобразовании годографа. Отрезок прямой $\{x=d_0,$ $0<y<\gamma(z)\}$ перешел при преобразовании годографа в кривую $\{y=\gamma(z),\ \ \varphi_1(d_0)<z<c\}$. Предположим, что существуют два решения $\omega_1(z,y)$ и $\omega_2(z,y)$ задачи (15)–(16). Обозначим $\tilde{\omega}(z,y)=$ $=\omega_2(z,y)-\omega_1(z,y)$. Так как функции $\tilde{u}(d_0,y),\tilde{u}_x(d_0,y)$ известны при $y\in(0,\gamma(z))$, то известны и функции $\tilde{\omega}(z,\gamma(z))$, $\tilde{\omega}_z(z,\gamma(z))$. Действительно, учитывая что $\omega_z(z,\gamma(z))\ =\dfrac{1}{u_x(d_0,\gamma(z))}$, получим $\tilde{\omega}(z,\gamma(z))=\tilde{\omega}_z(z,\gamma(z))=0$. Кроме того, функция $q(z)$ также известна в D_c. Тогда $\tilde{\omega}(z,y)$ в D_c определяется единственным образом. Действительно, для $\tilde{\omega}(z,y)$ получим следующую задачу

$$k_1\tilde{\omega}_{zz}+2k_2\tilde{\omega}_{zy}+k_3\tilde{\omega}_{yy}+k_4\tilde{\omega}_z+k_5\tilde{\omega}_y+k_6\tilde{\omega}=0,\ \varphi_1(d_0)<z<c,0<y<\gamma(z), \qquad (17)$$

$$\tilde{\omega}(z,\gamma(z))=\tilde{\omega}_z(z,\gamma(z))=0\,, \qquad (18)$$

где

$$k_1(z,y)=\frac{1}{\omega_{2z}^3}(1+\omega_{2y}^2),k_2(z,y)=-\frac{1}{\omega_{2z}^2}\omega_{2y},k_3(z,y)=\frac{1}{\omega_{2z}},\ k_4(z,y)=\frac{k_3}{\omega_{1z}}[-\omega_{1yy}-(1+\omega_{1y}^2)(k_3^2+\frac{1}{\omega_{1z}}k_3+$$

$$+\frac{1}{\omega_{1z}^2})\omega_{1zz} + 2\omega_{1y}(k_1+\frac{1}{\omega_{1z}})\omega_{1zy}],\, k_5(z,y)=k_3^2[k_3(\omega_{1y}+\omega_{2y})\omega_{1zz}-2\omega_{1zy}],\; k_6(z,y)=-q(z)h_{1\omega}-h_{2\omega}.$$

Из (17)–(18) получим

$$\left|k_1\tilde{\omega}_{zz}+2k_2\tilde{\omega}_{zy}+k_3\tilde{\omega}_{yy}\right|\le M[\left|\tilde{\omega}_z\right|+\left|\tilde{\omega}_y\right|+\left|\tilde{\omega}\right|],\ (z,y)\in H_c, \tag{19}$$

$$\tilde{\omega}(z,\gamma(z))=\tilde{\omega}_z(z,\gamma(z))=0. \tag{20}$$

Отсюда по теореме 1 нетрудно вывести, что $\tilde{\omega}(z,y)\equiv 0,(z,y)\in H_c$. В силу взаимной однозначности преобразования функции $u(x,y)$ определяется единственным образом в D_c. Лемма доказана. Из леммы 2 очевидно вытекает

Лемма 3. Функция $u(x,y)$ в области D_{α_1} определяется единственным образом. В частности, функция $u(x,y)$ определяется единственным образом в области $\{(x,y):\left|x-d_0\right|<\sigma,\quad y\in(0,s_{\alpha_1}(x))\}$ для некоторого малого $\sigma>0$.

Пусть $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. Обозначим

$$G_\varepsilon=\{(z,y)\big|z\in(\alpha_1-\varepsilon,\alpha_1),\left|y-\gamma(z)\right|<\varepsilon\},\ S_\varepsilon=\{(z,y)\big|z\in(\alpha_1,\alpha_1+\varepsilon,),\left|y-\gamma(z)\right|<\varepsilon\}.$$

Из леммы 2 вытекает, что функция $u(x,y)$ определяется единственным образом в G_ε. Предположим, что есть два решения задачи (1)–(5). Тогда имеются две функции $\omega_i(z,y),q_i(z),i=1,2.$ Пусть $\tilde{\omega}(z,y)=\omega_2(z,y)-\omega_1(z,y),\tilde{q}(z)=q_2(z)-q_1(z).$ Используя (14)–(15) и леммы 3 для функции $\{\tilde{\omega}(z,y),\tilde{q}(z)\}$, имеем

$$k_1\tilde{\omega}_{zz}+2k_2\tilde{\omega}_{zy}+k_3\tilde{\omega}_{yy}+k_4\tilde{\omega}_z+k_5\tilde{\omega}_y+k_6\tilde{\omega}=h_1(\omega_1,y)\tilde{q}(z),(z,y)\in S_\varepsilon, \tag{21}$$

$$\tilde{\omega}(z,\gamma(z))=0, \tag{22}$$

$$\tilde{\omega}(\alpha_1,y)=\tilde{\omega}_z(\alpha_1,y)=0,(z,y)\in S_\varepsilon. \tag{23}$$

Заменим переменные в $(21)-(23)$, положив $z'=z-\alpha,y'=y$.

Для краткости записи сохраним прежние обозначения для новых переменных и функций. При замене функция $\gamma(z)$ перейдет в функцию вида $\beta(z)=\gamma(\alpha_1+z),\left|\beta'(z)\right|\le K_1,K_1>0.$

Обозначим $S'_\varepsilon=\{(z,y)\big|z\in(0,\varepsilon),\left|y-\beta(z)\right|<\varepsilon\}.$ Тогда получим

$$k_1\tilde{\omega}_{zz}+2k_2\tilde{\omega}_{zy}+k_3\tilde{\omega}_{yy}+k_4\tilde{\omega}_z+k_5\tilde{\omega}_y+k_6\tilde{\omega}=h_1(\omega_1,y)\tilde{q}(z),(z,y)\in S'_\varepsilon, \tag{24}$$

$$\tilde{\omega}(z,\beta(z))=0, \tag{25}$$

$$\tilde{\omega}(0,y)=\tilde{\omega}_z(0,y)=0. \tag{26}$$

Для $\tilde{q}(z)$ из (24) получим

$$q(z)=Q(z,y)(\tilde{\omega}_{zz}+2\bar{k}_2\tilde{\omega}_{zy}+\bar{k}_3\tilde{\omega}_{yy})+a_1\tilde{\omega}_z+a_2\tilde{\omega}_y+a_3\tilde{\omega}, \tag{27}$$

$$\tilde{\omega}(0,y)=\tilde{\omega}_z(0,y)=0, \tag{28}$$

где

$$Q(z,y)=-\frac{1}{h_1},\bar{k}_2(z,y)=\frac{k_2}{k_1},\bar{k}_3(z,y)=\frac{k_3}{k_1},a_1(z,y)=-\frac{1}{h_1}k_4,a_2(z,y)=-\frac{1}{h_1}k_5,\ a_3(z,y)=\frac{q_2}{h_1}h_{1\omega}.$$

Продифференцируем равенство (27) по y. Слева получим нуль. Введем обозначения

$$P(z,y)=\tilde{\omega}_y+[\frac{\partial}{\partial y}(\ln\left|Q\right|)]\tilde{\omega}.$$

Тогда получим

$$P_{zz}++2\bar{k}_2P_{yz}+\bar{k}_3P_{yy}=\bar{l}_1(z,y)P_z(z,y)+\bar{l}_2(z,y)P_y(z,y)+\bar{l}_3(z,y)P(z,y)+$$
$$+\bar{l}_4(z,y)\tilde{\omega}_z(z,y)+\bar{l}_5(z,y)\tilde{\omega}(z,y),\ (z,y)\in S'_\varepsilon, \tag{29}$$

$$P(0,y)=P_z(0,y)=0, \tag{30}$$

где

$$\theta(z,y)=Q_y/Q,\bar{k}_4(z,y)=\frac{k_4}{k_1},\bar{k}_5(z,y)=\frac{k_5}{k_1},\ \bar{l}_1(z,y)=-2\bar{k}_{2y}-\bar{k}_4,$$

$$\overline{l}_2(z,y) = -2\overline{k}_{3y} - \overline{k}_5,\ \overline{l}_3(x,y) = 2\overline{k}_2\theta_z + 2\overline{k}_3\theta_y - \overline{l}_2\theta - \frac{a_{2y}}{Q},$$

$$\overline{l}_4(x,y) = 2\theta_z - (\overline{l}_1 - 2\overline{k}_2)\theta - \frac{a_{1y}}{Q},\ \overline{l}_5(x,y) = \theta_{zz} + 2\overline{k}_2\theta_{zy} + \overline{k}_3\theta - \overline{l}_1\theta_z - \overline{l}_2\theta_y - \frac{a_{3y}}{Q}.$$

Отсюда получаем

$$\left|P_{zz} + 2\overline{k}_2 P_{yz} + \overline{k}_3 P_{yy}\right| \le M[|P_z| + |P_y| + |P| + |\tilde{\omega}_y| + |\tilde{\omega}|], M > 0, \tag{31}$$

$$P(0,y) = P_z(0,y) = 0. \tag{32}$$

Здесь и всюду через M и C будем обозначать, вообще говоря, различные константы.

Лемма 4. Справедливо следующее интегральное представление

$$\tilde{\omega}(z,y) = \rho_1(z,y) \int_{\beta(z)}^{y} \rho_2(z,\tau)P(z,\tau)d\tau,\quad \rho_i(z,y) \in C^1(S'_\varepsilon), i = 1,2, \tag{33}$$

и неравенство

$$|\tilde{\omega}_z(z,y)| \le M\left[\left|\int_{\beta(z)}^{y} |P_z| d\tau\right| + \int_{\beta(z)}^{y} |P_y(z,\tau)| d\tau + \left|\int_{\beta(z)}^{y} |P| d\tau\right| + |P|\right], M > 0. \tag{34}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу

$$\tilde{\omega}_y + \frac{Q_y}{Q}\tilde{\omega} = P(z,y), \tag{35}$$

$$\tilde{\omega}(z,\beta(z)) = 0. \tag{36}$$

Решая задачу (35)–(36), получим (33). Дифференцируя (33) по z и учитывая, что

$$P(z,\beta(z)) = P(z,y) - \int_{\beta(z)}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(z,\tau)d\tau.$$

Тогда получим

$$\tilde{\omega}_z(z,y) = \rho_{1z}(z,y) \int_{\beta(z)}^{y} \rho_2(z,\tau)P(z,\tau)d\tau + \rho_1(z,y)\{-[P(z,y) + \int_{\beta(z)}^{y} P_y(z,\tau)d\tau]\beta'(z) +$$

$$+ \int_{\beta(z)}^{y} \rho_{2z}(z,\tau)P(z,\tau)d\tau + \int_{\beta(z)}^{y} \rho_2(z,\tau)P_z(z,\tau)d\tau\}.$$

Учитывая это, получим (34). Лемма доказана.

Пусть $\lambda, \nu = \text{const} > 0,\ \varepsilon \in (0,\frac{1}{2}), \delta \in (0,\varepsilon^2)$. Введем обозначения:

$$\phi(z,y) = z + (y - \beta(z))^2 + \frac{1}{4}, \varphi(z,y) = \exp(2\lambda\phi^{-\nu}),$$

$$H_\delta = \{(z,y) \mid \phi(z,y) < \delta + \frac{1}{4}, z > 0\} \Rightarrow H_\delta \subset S'_\varepsilon,\ A_\delta = \{(z,y) \in \overline{H}_\delta \mid \phi(z,y) = \delta + \frac{1}{4}\}. \tag{37}$$

Пусть ∂H_δ – граница области H_δ. Очевидно, что

$$\partial H_\delta = A_\delta U\{\ |(z,y) \in \overline{H}_\delta : z = 0\}. \tag{38}$$

Лемма 5. Для любой функции $H(z,y) \in C(\overline{H}_\delta)$ справедливо неравенство

$$\int_{H_\delta} \varphi[\int_{\beta(z)}^{y} H(z,\tau)d\tau]^2 dzdy \le (\frac{1}{4} + \varepsilon)^{\nu+1}(4\lambda\nu)^{-1}\{\int_{H_\delta} H^2\varphi dzdy + \exp[2\lambda(\frac{1}{4} + \delta)^{-\nu}]\int_{H_\delta} H^2 dzdy\}. \tag{39}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$H_{\delta'+} = H_\delta \cap \{y > \beta(z)\}, H_{\bar{\delta}} = H_\delta \cap \{y < \beta(z)\}, d(z) = \beta(z) + (\delta - z)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, теорему Фубини и учитывая (38)–(39), получим

$$\int_{H_{\delta+}} \varphi[\int_{\beta(z)}^{y} H(z,\tau)d\tau]^2 dzdy \le \int_0^\delta dz \int_{\beta(z)}^{d(z)} H^2(z,\tau)d\tau \int_\tau^{d(z)} \varphi[y - \beta(z)]dy \le (\frac{1}{4} + \varepsilon)^{\nu+1}(4\lambda\nu)^{-1} \times$$

$$\times\int_0^\delta dz[\int_{\beta(z)}^{d(z)} H^2(z,\tau)d\tau\int_\tau^{d(z)}(-\frac{\partial\varphi}{\partial y})dy] = (\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}(4\lambda\nu)^{-1}\{\int_{H_{\delta^+}} H^2\varphi dzdy + \exp[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}]\int_{H_{\delta^+}} H^2 dzdy\}.$$

Поступая аналогично в случае H_{δ^-}, приходим к утверждению леммы.

Лемма 6. Найдутся достаточно большие положительные числа λ, ν, зависящие от коэффициентов $\bar{k}_2, \bar{k}_3$, и константа C, такие, что справедлива следующая оценка типа Карлемана [11, с. 93].

$$\lambda\nu\varphi|\nabla P|^2 + \lambda^3\nu^4\varphi^{-2\nu-2}\varphi P^2 \le C\lambda\nu\varphi(P_{zz} + 2\bar{k}_2 P_{yz} + \bar{k}_3 P_{yy})P +$$

$$+C\phi^{\nu+2}\varphi(P_{zz} + 2\bar{k}_2 P_{yz} + \bar{k}_3 P_{yy})^2 + \operatorname{div}U, \quad (z,y)\in H_\delta,\ \lambda\ge\lambda_0, \nu\ge\nu_0, \tag{40}$$

где

$$|U| \le C\nu^3\lambda^3\phi^{-2\nu-2}\varphi[P_z^2 + P_y^2 + P^2]. \tag{41}$$

Доказательство теоремы (подробности [11, с. 93–99]). Из неравенства (40), учитывая (33) и (34), получим

$$\lambda\nu\varphi|\nabla P|^2 + \lambda^3\nu^4\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2 \le MC\lambda\left(\nu\varphi|P||P_z| + \nu\varphi|P||P_y| + \nu\varphi P^2\right) +$$

$$+C\left(M\lambda\nu + M^2\phi^{\nu+2}\right)\varphi\{\left[\int_{\beta(z)}^y |P_z|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P_y|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P|d\tau\right]^2\} +$$

$$+CM^2\phi^{\nu+2}\varphi\left(P^2 + |\nabla P|^2\right) + \operatorname{div}U.$$

Отсюда имеем

$$\lambda\nu\varphi|\nabla P|^2 + \lambda^3\nu^4\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2 \le \left[(M+M^2)C\lambda\varphi\right](\nu^{1/2}|\nabla P|^2 + \nu^{3/2}P^2) +$$

$$+C\left(M\lambda\nu + M^2\phi^{\nu+2}\right)\varphi\left\{\left[\int_{\beta(z)}^y |P_z|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P_y|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P|d\tau\right]^2\right\} + \operatorname{div}U,$$

с некоторой новой постоянной C. Из последнего неравенства имеем

$$\lambda\nu\left[1-(M+M^2)\nu^{-1/2}C\right]\varphi|\nabla P|^2 + \lambda^3\nu^4\phi^{-2\nu-2}\left[1-(M+M^2)\nu^{-5/2}C\right]\varphi P^2 \le$$

$$\le (M+M^2)C\lambda\nu\varphi\left\{\left[\int_{\beta(z)}^y |P_z|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P_y|d\tau\right]^2 + \left[\int_{\beta(z)}^y |P|d\tau\right]^2\right\} + \operatorname{div}U,$$

с некоторой новой постоянной C. Интегрируя получающееся при этом неравенство по области H_δ и учитывая (37)–(39) и (41), имеем

$$\lambda\nu\left[1-(M+M^2)\nu^{-1/2}C\right]\int_{H_\delta}\varphi|\nabla P|^2 dzdy + \lambda^3\nu^4\left[1-(M+M^2)\nu^{-5/2}C\right]\times$$

$$\times\int_{H_\delta}\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2 dzdy \ \le\ (M+M^2)C(\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}\left\{\int_{H_\delta}\left(\phi^{-2\nu-2}P^2 + |\nabla P|^2\right)\varphi dzdy +\right.$$

$$\left.+\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\int_{H_\delta}(P^2 + |\nabla P|^2)dzdy\right\} + C\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\int_{A_\delta}(P^2 + |\nabla P|^2)ds.$$

Отсюда получаем

$$\lambda\nu\left[1-(M+M^2)\nu^{-1/2}C - (M+M^2)\nu^{-1}C(\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}\right]\int_{H_\delta}\varphi|\nabla P|^2 dzdy +$$

$$+\lambda^3\nu^4[1-(M+M^2)\nu^{-5/2}C(\frac{1}{4}+\ \varepsilon)^{\nu+1} - (M+M^2)C\nu^{-4}(\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}]\int_{H_\delta}\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2 dzdy \le$$

$$\le C\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\int\limits_{H_\delta}(P^2+|\nabla P|^2)dzdy\} + C\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\int\limits_{A_\delta}(P^2+|\nabla P|^2)ds .$$

Если ν достаточно велико, то можно считать

$$(M+M^2)C\nu^{-1/2}+(M+M^2)C\nu^{-1}(\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}\le\frac{1}{2},$$

$$(M+M^2)C\nu^{-5/2}+(M+M^2)C\nu^{-4}(\frac{1}{4}+\varepsilon)^{\nu+1}\le\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что ν выбрано таким образом, получим

$$\lambda\nu\int\limits_{H_\delta}\varphi|\nabla P|^2\,dzdy+\lambda^3\nu^4\int\limits_{H_\delta}\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2dzdy\le C\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\times$$

$$\times\int\limits_{H_\delta}(P^2+|\nabla P|^2)dzdy+C\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right]\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\int\limits_{A_\delta}(P^2+|\nabla P|^2)ds .$$

Отсюда получим, что при достаточно большом λ

$$\lambda^3\nu^4\int\limits_{H_\delta}\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2dzdy\le C\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right].$$

Пусть $\delta_1\in(0,\delta)$ – произвольное число. Из (37) следует, что

$$\phi(z,y)<\frac{1}{4}+\delta_1,(z,y)\in H_{\delta_1} .$$

Тогда получим

$$\lambda^3\nu^4\int\limits_{H_{\delta_1}}\phi^{-2\nu-2}\varphi P^2dzdy\le C\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right].$$

Отсюда имеем

$$\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta_1)^{-2\nu-2}\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta_1)^{-\nu}\right]\int\limits_{H_{\delta_1}}P^2dzdy\le C\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta)^{-2\nu-2}\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}\right].$$

Отсюда разделим обе части неравенства на выражения

$$\lambda^3\nu^4(\frac{1}{4}+\delta_1)^{-2\nu-2}\exp\left[2\lambda(\frac{1}{4}+\delta_1)^{-\nu}\right].$$

Тогда получим

$$\int\limits_{H_{\delta_1}}P^2dzdy\le C\exp 2\lambda\left[(\frac{1}{4}+\delta)^{-\nu}-(\frac{1}{4}+\delta_1)^{-\nu}\right].$$

Устремив $\lambda\to\infty$, получим, что

$$\int\limits_{H_{\delta_1}}P^2dzdy=0 .$$

Отсюда получаем, что $P(z,y)=0$ на H_{δ_1}. Следовательно, в силу произвольности $\delta_1\in(0,\delta)$ получаем $P(z,y)=0,(z,y)\in H_\delta$. Тогда из (33) получаем $\tilde{\omega}(z,y)\equiv 0,\ (z,y)\in H_\delta$, а из (27) получим $q(z)\equiv 0, z\in(0,\delta)$. Пусть $\beta=\alpha_1+\delta.$ Согласно лемме 2 функция $u(x,y)$ в области D_β определяется единственным образом. Всю область D_{α_2} можно исчерпать после конечного числа вышеописанных шагов. Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Искендеров, А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Изв. АН Аз.ССР. – 1978. – № 2. – С. 80–85.

2. Клибанов, М.В. Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений / М.В. Клибанов // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 11. – С. 1947–1953.

3. Sylvester, J. A Global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem / J. Sylvester, G. Uhlmann // Annals of Mathematics. – 1987. – Vol. 125. – P. 153–169.

4. Вабищевич, П.Н. О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений / П.Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2125–2129.

5. Соловьев, В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике / В.В. Соловьев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 8. – С. 1365–1377.

6. Yang, R. Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations / R. Yang, Y. Ou // ANZIAM. – 2007. – Vol. 49, no. 2. – P. 271–279.

7. Вахитов, И.С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии–реакции / И.С. Вахитов // Дальневосточный математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 2. – С. 93–105.

8. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М.: Наука, 1995. – 206 с.

9. Алиев, Р.А. Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа / Р.А. Алиев // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 3–9.

10. Клибанов, М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений / М.В. Клибанов // Сибирский математический журнал. – 1986. – Т. 27, № 5. – С. 83–94.

11. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

12. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1965. – 379 с.

Поступила в редакцию 19 декабря 2012 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 2, pp. 5–13

INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION OF COEFFICIENT IN THE ELLIPTIC EQUATION

R.A. Aliyev[1]

The inverse problem of determination of coefficient in the elliptic equation in a rectangle is considered. Identification problem of unknown denseness of sources and coefficients lead to similar inverse problems. The theorem of uniqueness of the formulated inverse problem is proved using Karleman's evaluation method. Researches are carried out in a class of continuously differentiable functions derivatives of which satisfy the Holder condition.

Keywords: inverse problem; elliptic equation.

References

1. Iskenderov A.D. *Izvestiya AN Az.SSR.* 1978. no. 2. pp. 80–85. (in Russ.).
2. Klibanov M.V. *Differentsial'nye uravneniya.* 1984. Vol. 20, no. 11. pp. 1947–1953. (in Russ.).
3. Sylvester J., Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // *Annals of Mathematics.* 1987. Vol. 125. pp. 153–169.
4. Vabishchevich P.N. *Differentsial'nye uravneniya.* 1988. Vol. 24, no. 12. pp. 2125–2129. (in Russ.).
5. Solov'ev V.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 2007. Vol. 47, no. 8. pp. 1365–1377. (in Russ.).
6. Runsheng Yang and Yunhua Ou Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations. *ANZIAM.* 2007. Vol. 49, no. 2. pp. 271–279. http://dx.doi.org/10.1017/S1446181100012839
7. Vakhitov I.S. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal.* 2010. Vol. 10, no. 2. pp. 93–105. (in Russ.).
8. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* (Introduction into inverse problems theory). Moscow, Nauka Publ., 1995. 206 p. (in Russ.).
9. Aliev R.A. An Inverse Problem for Quasilinear Elliptic Equations. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2011. Vol. 11. Issue 1. pp. 3–9.
10. Klibanov M.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal.* 1986. Vol. 27, no. 5. pp. 83–94.
11. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* (Illposed problems of mathematical physics and analysis). Moscow, Nauka Publ., 1980. 286 c. (in Russ.).
12. Khermander L. *Lineynye differentsial'nye operatory s chastnymi proizvodnymi* (Linear differential operators with partial derivatives). Moscow, Mir Publ., 1965. 379 p. (in Russ.). [Hörmander L. Linear partial differential operators. Academic Press and Springer-Verlag, New York, 1963.]

Received 19 December 2012

[1] Aliyev Ramiz Atash oqli is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Information and Information System Department, Azerbaijan University of Cooperation, Baku, Azerbaijan.
E-mail: ramizaliyev3@rambler.ru