

# АНАЛИЗ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ДЛЯ КОНТАКТНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

А.В. Дмитриев<sup>2</sup>, А.А. Ершов<sup>3</sup>

Рассмотрена двумерная задача протекания электрического тока через прямоугольную пластину с контактами малой площади, пропорциональной малому параметру. Найден главный член асимптотики  $x_p$  – толщины слоя, в котором выделяется часть  $p$  от энергии, связанной с контактным сопротивлением при площади контактов, стремящейся к нулю.

*Ключевые слова:* краевая задача; пластинчатый кристалл графита; асимптотическое разложение; малый параметр; толщина дефектного слоя; композиционный материал; сеть сопротивлений; цепочечная модель; преобладание контактного электрического сопротивления.

## Введение

В работе [1] приведен анализ влияния поверхностного слоя на диссипацию энергии в области контактов проводников применительно к композиции на основе природного чешуйчатого графита. Полагается, что на поверхности пластинчатых зерен наполнителя имеется тонкий дефектный слой. В качестве критерия использовали  $x_{0,5}$  как толщину слоя, в котором выделяется 50 % энергии, связанной с контактным сопротивлением. Считали, что толщина слоя характеризуется  $x_{0,5}$ , что влияет на магнетосопротивление материала через магнетосопротивление микроконтактов. Оно изменилось при переходе от прижимных контактов к спеченным при помощи закоксованных мостиков пека связующего. Если поверхностный дефектный слой совпадает с  $x_{0,5}$ , то в удельное электрическое сопротивление композиции с непроводящей матрицей входит соответствующая доля сопротивления. Интерес представляет определение зависимости между долей вклада в удельное электрическое сопротивление чешуек и толщиной слоев графита, в которой эта доля энергии выделяется. Для простоты рассматриваем двумерный случай, параметрами являются размеры пластинчатых проводников и сечения электрических пятен контактов между ними. Ранее в работе [1] это было вычислено для  $x_{0,5}$  с помощью метода сеток [2, гл. 3, п. 45], результаты линейно интерполированы на область при малых значениях сечения контактов, где метод сеток неприменим. Однако интерес представляет получение аналитической зависимости величины толщины слоя  $x_p$  для  $p$ -ой доли диссипации энергии от сечения контактов  $2\varepsilon$ , стремящегося к нулю. Эта зависимость, как выяснилось при аккуратном асимптотическом исследовании, отличается от линейной.

## 1. Первый случай (контакты на разных сторонах)

Рассмотрим прохождение электрического тока через пластину единичной толщины по следующей схеме (рис. 1).

Если контакты параллельны кристаллографическим плоскостям, то с точностью до линейных замен образец можно считать анизотропным. Для простоты будем считать, что проводимость данного образца равна единице ( $\sigma_x = \sigma_y = 1$ ). Как показано в работе [3], хорошим математическим приближением потенциала электрического поля этого образца при малых контактах может быть решение следующей краевой задачи:

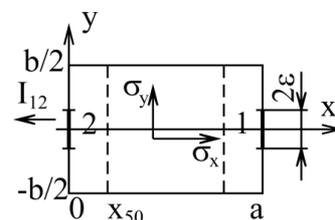


Рис. 1

<sup>1</sup> Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ № 12-01-00259-а, ФЦП № 02.740.11.0612, госбюджет № 1.731.2011 и «Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса».

<sup>2</sup> Дмитриев Антон Владимирович – кандидат технических наук, преподаватель, кафедра химии твердого тела и нанопроцессов, Челябинский государственный университет.

E-mail: admittiev@csu.ru

<sup>3</sup> Ершов Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Челябинский государственный университет.

E-mail: ale10919@yandex.ru

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D = \{0 < x < a, -b/2 < y < b/2\}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=-b/2, b/2} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0, a} = 0, \quad \text{при} \quad y \in (-b/2, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b/2), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0, a} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, \quad \text{при} \quad y \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{array} \right.$$

Полную выделяемую энергию можно вычислить по формуле  $W = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 u(x, y) dy dx$ . В ней

можно выделить часть, связанную с контактным сопротивлением, возникающим из-за того, что контакты занимают не всю сторону образца, т.е.

$$W_{\text{конт.}} = W - I^2 R_{\text{ом.}} = W - 1 \cdot \frac{a}{b},$$

где  $I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) dy = 1$  – сила тока, протекающего через образец,  $R_{\text{ом.}} = \frac{a}{b}$  – омическое сопротивление.

Контактное электрическое сопротивление является переходным электрическим сопротивлением между проводниками. При расчете омического сопротивления сечение пятен контактов выбирается так, чтобы в проводнике плотность электрического тока и напряженность электрического поля были однородными во всем объеме. При уменьшении сечения пятен контактов образуется контактное электрическое сопротивление за счет стягивания линий тока к пятнам контактов, вычисляемое как добавка к омическому электрическому сопротивлению проводника [4]. Если области стягивания линий тока к пятнам контактов перекрываются, то омическое сопротивление, связанное с прямолинейным протеканием электрического тока в объеме проводника, отсутствует. Следует отметить, что электрическое сопротивление из-за стягивания линий тока к пятнам контактов значительно превышает омическое для того же электрического тока через проводник при его однородном протекании. Для чешуек графита это связано со значительной анизотропией проводимости вдоль и поперек слоев, так что при подключении по варианту с расположением контактов по одну сторону оснований наибольшая плотность тока приходится на слои, прилегающие к пятнам контактов. В отдаленных слоях плотность электрического тока оказывается пренебрежимо малой. Судя по снижению магнетосопротивления на порядок, при переходе к прижимным контактам именно они и определяют диссипацию электрической энергии. В этом случае омическим сопротивлением можно пренебречь. Учет омического сопротивления при случае спеченных контактов требует учета подключения чешуек вдоль и поперек слоев. Как показано в [1, 5], электрофизические свойства характеризуются контактным электрическим сопротивлением, и омическая составляющая невелика по сравнению с контактной. Подробно образование контактного электрического сопротивления и его свойства применительно к пластинчатым кристаллам графита исследованы методом электрогидродинамического моделирования на пластинках отожженного пирографита (см. [5]). При решении соответствующих граничным условиям задач в настоящей работе омическое сопротивление, свойственное прямолинейному протеканию электрического тока, вычисляется отдельно и вычитается из общего электрического сопротивления, определяемого вычислением, так что в результате определяется только электрическое контактное сопротивление, связанное с искривлением линий тока при его стягивании к пятнам контактов.

Введём обозначения:

$$W_p = \int_0^{x_p} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 u dy dx - \text{энергия, выделяемая в слое толщины } x_p,$$

$W_{p, \text{конт.}} = W_p - \frac{x_p}{b}$  – контактная энергия, выделяемая в том же слое.

Величину  $x_p$  определим так, чтобы в ней выделялась  $p$ -ая часть контактной энергии, связанной с одним контактом, т.е.  $x_p$  определяется из следующего уравнения

$$W_{p, \text{конт.}} = p \cdot \frac{W_{\text{конт.}}}{2}. \quad (1)$$

Итак, наша задача состоит в том, чтобы найти асимптотику  $x_p(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Стандартным методом Фурье несложно найти

$$u(x, y) = \frac{x}{b} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \text{sh}\left(\frac{2\pi n}{b} a\right)} \left( \text{ch}\left(\frac{2\pi n}{b} x\right) - \text{ch}\left(\frac{2\pi n}{b} (a-x)\right) \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{b} y\right),$$

где  $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$  – функция Бесселя.

Пользуясь этим решением, вычислим в виде рядов

$$W = \int_0^{a/b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 u(x, y) dy dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \text{sh}^2\left(\frac{2\pi n}{b} a\right)} \left( \text{sh}\left(\frac{4\pi n}{b} a\right) - 2 \text{sh}\left(\frac{2\pi n}{b} a\right) \right) + \frac{a}{b},$$

$$W_p = \int_0^{x_p/b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 u(x, y) dy dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \text{sh}^2\left(\frac{2\pi n}{b} a\right)} \times$$

$$\times \left( \frac{\text{sh}\left(\frac{4\pi n}{b} x_p\right)}{2} + \text{sh}\left(\frac{2\pi n}{b} (a-2x_p)\right) - \text{sh}\left(\frac{2\pi n}{b} a\right) + \frac{\text{sh}\left(\frac{4\pi n}{b} (a-x_p)\right)}{2} + \frac{\text{sh}\left(\frac{4\pi n}{b} a\right)}{2} \right) + \frac{x_p}{b}.$$

Асимптотика  $W$  была уже ранее найдена в работе [3], для этого она была выражена с помощью альтернативной формулы

$$W = I \cdot \Delta U = 1 \cdot \left( \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{b}{\pi \varepsilon}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi a}{b} n}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi a}{b} n\right)} + O(\varepsilon) \right),$$

где разность потенциалов

$$\Delta U = u(a, 0) - u(0, 0) + O(\varepsilon) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n} \text{th}\left(\frac{\pi n a}{b}\right) + O(\varepsilon) =$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{b}{\pi \varepsilon}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi a}{b} n}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi a}{b} n\right)} + O(\varepsilon).$$

Заметим, что

$$\int_0^{a/b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 u(x, y) dy dx - I \cdot \Delta U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n} \text{th}\left(\frac{\pi n}{b} a\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{2\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n} \text{th}\left(\frac{\pi n}{b} a\right) = O(\varepsilon),$$

небольшое различие объясняется тем, что данное решение  $u(x, y)$  является постоянным на отрезках подключения только с точностью  $O(\varepsilon)$ . Однако вычисление асимптотики по альтернативной формуле проще.

Соответственно,

$$W_{\text{конт.}} = \frac{2}{\pi} \left( \ln \left( \frac{b}{\pi \varepsilon} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi a}{b} n}}{n \cdot \text{ch} \left( \frac{\pi a}{b} n \right)} + O(\varepsilon) \right),$$

$$W_{p, \text{конт.}} = \frac{W_{\text{конт.}}}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \left( \frac{\text{sh} \left( \frac{4\pi n}{b} x_p \right)}{2} + \text{sh} \left( \frac{2\pi n}{b} (a - 2x_p) \right) + \frac{\text{sh} \left( \frac{4\pi n}{b} (a - x_p) \right)}{2} \right)$$

$$= \frac{W_{\text{конт.}}}{2} + \frac{1}{\pi} (S_1 + S_2 + S_3).$$

Рассмотрим отдельно асимптотику каждой из трёх сумм  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Полную равномерную асимптотику этих рядов найти довольно сложно, поэтому будем искать ответ в предположении, что  $x_p \sim \varepsilon^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ .

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \frac{\text{sh} \left( \frac{4\pi n}{b} x_p \right)}{2} = O(x_p),$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \text{sh} \left( \frac{2\pi n}{b} (a - 2x_p) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \text{sh} \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} + O(x_p),$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \frac{\text{sh} \left( \frac{4\pi n}{b} (x_p - a) \right)}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} a} \cdot e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{4} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n \cdot \text{sh}^2 \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} a}}{4} + O(x_p) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi n}{b} a}}{n \cdot \text{sh} \left( \frac{2\pi n}{b} a \right)} + O(x_p).$$

Рассмотрим отдельно асимптотику суммы  $S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0^2 \left( \frac{2\pi n}{b} \varepsilon \right)}{n} e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}$ . Воспользуемся оценками  $J_0(x) = 1 + O(x)$  и  $J_0^2(x) = 1 + O(x)$ . Заметим, что они выполняются для любого  $x > 0$ , т.е. существует постоянная  $M > 0$  такая, что  $|J_0^2(x)| \leq 1 + Mx$  при  $x > 0$ . С учетом этой оценки

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + O(n\varepsilon))}{n} e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} + O \left( \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} + O \left( \varepsilon \frac{e^{-\frac{4\pi}{b} x_p}}{1 - e^{-\frac{4\pi}{b} x_p}} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} + O \left( \frac{\varepsilon}{x_p} \right).$$

Для вычисления  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n}$  воспользуемся заменой суммы на интеграл [6, гл. 2]:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p}}{y} dy + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} - 1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y} dy \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dy}{y} \right) = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p}}{y} dy + C + R, \end{aligned}$$

где  $C = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dy}{y} \right)$  – постоянная Эйлера,  $R = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} - 1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y} dy \right)$ .

Заметим, что  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p}}{y} dy = E_1\left(\frac{4\pi y}{b} x_p\right) = -C - \ln\left(\frac{4\pi}{b} x_p\right) + O(x_p)$  при  $x_p \rightarrow 0$ , где

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y} dy = [xy = z] = \int_x^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = -C - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!n} - \text{интегральная показательная функция [7].}$$

Чтобы оценить остаток  $R$ , введём вспомогательную функцию  $F(y) = \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y}$ . Легко вычислить ее вторую производную  $F''(y) = \frac{16\pi^2 x_p^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p}}{y} + \frac{4\pi x_p}{b} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p}}{y^2} + \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y^3}$ . Также воспользуемся разложением этой функции в ряд Тейлора с остаточным членом в дифференциальной форме. Тогда

$$\begin{aligned} |R| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} - 1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y} dy \right) \right| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p} - 1}{n} - \int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{e^{-\frac{4\pi y}{b} x_p} - 1}{y} dy \right) \right| + O(x_p) \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} F''(n + \theta_n) \int_{n-1/2}^{n+1/2} (y-n)^2 dy \right| + O(x_p) \leq M_1 x_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} + M_2 x_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n^2} + M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n^3} + \\ &+ O(x_p) \leq M_1 x_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi n}{b} x_p}}{n} + M_2 x_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi n x_p}{bn^3} + O(x_p) = O(x_p). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} W_{p, \text{конт.}} &= \frac{W_{\text{конт.}}}{2} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{4\pi x_p} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{\pi \varepsilon} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{4\pi x_p} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4\pi x_p}{\varepsilon} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right). \end{aligned}$$

Подставив эту асимптотику для  $W_{p, \text{конт.}}$  в (1), получим следующее уравнение для  $x_p$ :

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{\pi \varepsilon} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{4\pi x_p} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) = p \cdot \frac{W_{\text{конт.}}}{2} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right).$$

Отсюда, пользуясь асимптотическим разложением для  $W_{\text{конт.}}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно получить, что

$$\ln \frac{b}{4\pi x_p} = (1-p) \ln \frac{b}{\pi \varepsilon} + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right).$$

Из последнего равенства выразим  $x_p$ , получив окончательный ответ:

$$x_p = \frac{b}{4\pi} \left(\frac{\pi \varepsilon}{b}\right)^{1-p} e^{-p Q_1} (1 + O(\varepsilon^{1-p}) + O(\varepsilon^p)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ где } Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)}.$$

Заметим, что при достаточно больших соотношениях  $\frac{a}{b}$  постоянная  $e^{-p Q_1}$  достаточно близка к единице. В реальном случае, когда проводимость не равна единице, вместо уравнения Лапласа имеет место уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , но после соответствующих линейных замен можно получить формулу:

$$x_p = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}} \frac{b}{\pi} \left(\frac{\pi \varepsilon}{b}\right)^{1-p} \exp \left( -p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}}}{n \cdot \text{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}\right)} \right) (1 + O(\varepsilon^{1-p}) + O(\varepsilon^p)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

## 2. Второй случай (контакты на одной стороне)

Рассмотрим прохождение электрического тока через пластину единичной толщины в случае, когда контакты расположены на одной стороне, как показано на рис. 2.

В этом случае для потенциала электрического поля этого образца при малых контактах можно поставить следующую задачу.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ в } D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0, b} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, & \text{при } y \in (0, \varepsilon), \\ 0 & \text{при } y \in (\varepsilon, b - \varepsilon), \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, & \text{при } y \in (b - \varepsilon, b). \end{cases} \end{array} \right.$$

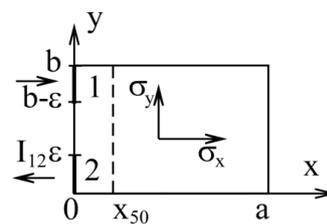


Рис. 2

$$\text{Полная выделяемая энергия равна } W = \int_0^a \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dy dx.$$

В этом случае не будем выделять из нее какие-либо части, сопротивление можно считать полностью контактным, т.е. будем считать, что  $W_{\text{конт.}} = W$ .

Также обозначим за  $W_{p, \text{конт.}} = \int_0^{x_p} \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dy dx$  энергию, выделяемую в слое толщины  $x_p$ .

Величину  $x_p$  определим так, чтобы в ней выделялась  $p$ -ая часть всей энергии, т.е.  $x_p$  определяется из следующего уравнения

$$W_{p, \text{конт.}} = p \cdot \frac{W_{\text{конт.}}}{2}.$$

В этом случае тоже будем искать асимптотику  $x_p(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Стандартным методом Фурье несложно найти

$$u(x, y) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}\varepsilon\right)}{(2m+1) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}(a-x)\right) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}y\right).$$

Пользуясь этим решением, вычислим в виде ряда

$$W = \int_0^a \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dy dx = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}\varepsilon\right)}{(2m+1)} \operatorname{cth}\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right) = \frac{4}{\pi} \left( \ln\left(\frac{2b}{\pi\varepsilon}\right) + Q_2 \right) + O(\varepsilon),$$

где  $Q_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \exp\left(-\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)}{(2m+1) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)}$ .

Заметим, что если  $b \gg a$ , то мощность, связанная с омическим сопротивлением, начинает играть существенную роль. Это проявляется в том, что формулу мощности можно также записать следующим образом:

$$W = \frac{4}{\pi} \ln \frac{4b}{\pi\varepsilon} + \frac{b}{a} + O\left(\frac{a}{b}\right) + O(\varepsilon).$$

Применяя метод замены ряда на интеграл, как в предыдущем случае, можно получить следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} W_{p, \text{конт.}} &= \int_0^{x_p} \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dy dx = W - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}\varepsilon\right)}{(2m+1) \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi(2m+1)}{b}(a-x_p)\right) = \\ &= W - \frac{4}{\pi} \left( \ln \frac{b}{\pi x_p} + Q_2 \right) + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) = \frac{4}{\pi} \ln \frac{4b}{\pi\varepsilon} - \frac{4}{\pi} \ln \frac{b}{\pi x_p} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_{p, \text{конт.}} = \frac{4}{\pi} \ln \frac{4b}{\pi\varepsilon} - \frac{4}{\pi} \ln \frac{b}{\pi x_p} + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) = p \cdot W.$$

Подставив в это равенство асимптотику полной выделяемой энергии, получим уравнение

$$\ln \frac{b}{\pi x_p} = (1-p) \ln \frac{4b}{\pi\varepsilon} - p Q_2 + O(x_p) + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right),$$

из которого можно выразить толщину слоя, в котором выделяется  $p$ -ая часть энергии

$$x_p = \frac{1}{4} \frac{4b}{\pi} \left(\frac{\pi\varepsilon}{4b}\right)^{1-p} e^{p Q_2} (1 + O(\varepsilon^p) + O(\varepsilon^{1-p})), \text{ где } Q_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \exp\left(-\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)}{(2m+1) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2m+1)}{b}a\right)}.$$

### 3. Третий случай (контакты наноскоков)

В этом случае (рис. 3) для потенциала электрического поля этого образца при малых контактах можно поставить следующую задачу.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \{0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, & y \in (0, \varepsilon), \\ 0, & y \in (\varepsilon, b), \end{cases} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & y \in (0, b - \varepsilon), \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, & y \in (b - \varepsilon, b). \end{cases} \end{cases}$$

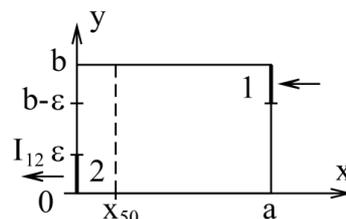


Рис. 3

Методом Фурье можно получить следующее решение этой задачи в рядах

$$u(x, y) = A_0 + \frac{x}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} \left( (-1)^n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{b} x\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{b} (a - x)\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right).$$

Используя это решение, можно вычислить силу тока  $I = 1$ , напряжение

$$\begin{aligned} U \approx u(a, b) - u(0, 0) &= \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} \left( (-1)^n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a\right) - 1 \right) \cos(\pi n) - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\pi n}{b} \varepsilon\right)}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} \left( (-1)^n - \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{b} a\right) \right) = \frac{a}{b} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a} - (-1)^n}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

и выделяемую мощность

$$W = \int_0^a \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dx dy = \frac{a}{b} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a} - (-1)^n}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O(\varepsilon).$$

Эту мощность можно также разделить на омическую  $W_{\text{ом.}} = \frac{a}{b}$  и контактную

$$W_{\text{конт.}} = \frac{4}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} a} - (-1)^n}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O(\varepsilon).$$

Аналогично предыдущим случаям можно найти энергию, выделяемую в слое толщины  $x_p$ :

$$\begin{aligned} W_p &= \int_0^{x_p} \int_0^b \nabla^2 u(x, y) dx dy = \frac{x_p}{b} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\pi n}{b} a\right)}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{2\pi x_p} - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\pi n}{b} a\right)}{n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b} a\right)} + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) + O(x_p) = \frac{x_p}{b} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{2\pi x_p} + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) + O(x_p). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$W_{p, \text{конт.}} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2b}{\pi \varepsilon} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{2\pi x_p} + O\left(\frac{\varepsilon}{x_p}\right) + O(x_p).$$

Поскольку  $x_p$  – это толщина слоя, в котором выделяется  $p$ -ая часть контактной энергии, связанной с одним контактом, то  $x_p$  можно найти из следующего уравнения

$$W_{p, \text{конт.}} = \frac{W_{\text{конт.}}}{2} \cdot p.$$

Отсюда можно найти, что

$$x_p = \frac{1}{4} \frac{2b}{\pi} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2b}\right)^{1-p} e^{-pQ_3} \left(1 + O(\varepsilon^p) + O(\varepsilon^{1-p})\right), \text{ где } Q_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b}a} - (-1)^n}{n \cdot \text{sh}\left(\frac{\pi n}{b}a\right)}.$$

### Заключение

Во всех случаях толщина слоя, в котором выделяется  $p$ -ая часть энергии, при ширине контакта, равном  $\varepsilon$ , примерно равна

$$x_p = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}} \frac{2b}{\pi} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2b}\right)^{1-p} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Толщина слоя с заданной диссипацией электрической энергии является характеристикой прижимного контакта. Если поверхностный слой имеет повышенное электрическое сопротивление, то это определяет сопротивление контакта, если в этом слое происходит преимущественно диссипация электрической энергии. Для анализа толщины слоя используют диссипацию в нем 50, 90 и 95 % от всей диссипируемой в данном контакте электрической энергии. Используя формулу, для двумерного случая можно определить как сами величины  $x_{0,5}$ ,  $x_{0,9}$  и  $x_{0,95}$  по известным значениям сечения пятна контактов, так и соотношения между ними. Ранее для определения величин пятен контактов использовали расчеты для модельного композиционного материала «чешуйчатый графит – пек» связующего. В этом материале после формования заготовок проводимость осуществляется по прижимным контактам. В результате обжига пек связующего коксует и дополнительно к прижимным контактам между чешуйками графита образуются спеченные хорошо проводящие мостики из кокса связующего. Сопротивление этих мостиков меньше, чем сопротивление чешуек графита поперек слоев, и падение напряжения происходит в основном в объеме чешуек. При переходе от прижимных контактов к спеченным удельное электрическое сопротивление материала снижается. Численные значения снижения удельного электрического сопротивления композиционного материала использовали в [1] для оценки толщины слоя с диссипацией энергии в 50, 90 и 95 % с использованием расчета данной доли диссипации энергии численным методом, которая составляла 0,04 мкм, 0,2 мкм и 0,26 мкм соответственно. Для определения сечения пятна контакта в [1] использовали трехмерный случай расчета. Для трехмерного случая электрическое сопротивление контакта обратно пропорционально его радиусу. При экспериментально определенной величине снижения удельного электрического сопротивления модельной композиции в 56 раз, соответственно, увеличивается сечение пятна контакта. При размере чешуек графита в 0,1 мм и расположении на плоской поверхности двух пятен контакта наибольший диаметр пятна контакта составляет 0,05 мм. При обжиге переход от прижимных контактов к спеченным приводит к снижению удельного электрического сопротивления модельной композиции в 56 раз [1]. Соответственно, при таком снижении удельного электрического сопротивления композиции усредненный радиус пятна прижимного контакта оказывается не более 0,001 мм, или 1 мкм. Использование выполненных в настоящей работе расчетов позволяет уточнить оценки толщины поверхностного слоя.

Приблизительно эффективное сечение прижимных контактов определили равным 1 мкм, для удобства вычислений приняли, что растекание тока двумерно, а ширина полоски прижимного контакта равна 1 мкм при размере пластинки  $100 \times 100$  мкм<sup>2</sup>. Эта величина является усредненной для контактов в композиции на основе чешуйчатого природного графита. Также приняли, что в

формуле (3)  $\sigma_x$  – это проводимость вдоль оси  $x$  поперек слоев графита, а  $\sigma_y$  – вдоль слоев. Согласно формуле (2), величина  $x_{0,5}$  составляет 1,995 мкм в изотропном случае и 0,02 мкм с учетом анизотропии. Ранее графически определенная в [1] величина  $x_{0,5}$  составила 0,04 мкм, что в два раза больше. При  $x_{0,5} = 0,02$  мкм и межплоскостном расстоянии 0,335 нм это составит примерно 62 слоя графита.

При вычислении толщины дефектного слоя в [1] использовали снижение удельного электрического сопротивления и магнетосопротивления при переходе от спеченных электрических контактов к прижимным. Для преобладания вклада в общее сопротивление и магнетосопротивление от дефектного слоя его толщина должна обеспечивать диссипацию 90–

95 %. При тех же условиях  $\frac{x_{0,9}}{x_{0,5}} \approx \left(\frac{\pi\varepsilon}{2b}\right)^{-0,4} = 5,365$ ,  $\frac{x_{0,95}}{x_{0,5}} \approx \left(\frac{\pi\varepsilon}{2b}\right)^{-0,45} = 6,61$ . Соответственно

величины  $x_{0,9}$  и  $x_{0,95}$  составят 0,107 мкм и 0,132 мкм. При межплоскостном расстоянии 0,335 нм вычисленная толщина составляет 320–400 слоев графита. Расчеты выполнены без учета снижения проводимости дефектами структуры. Так как дефекты структуры увеличивают удельное электрическое сопротивление слоев графита, то можно полагать, что эти оценки характеризуют верхнюю границу толщины дефектного слоя. Поверхностный дефектный слой в [1] введен для объяснения изменения электрофизических свойств композиции «природный графит – связующее» в результате закоксования связующего после обжига. Прижимные микроконтакты между чешуйками природного явнокристаллического графита в модельной композиции образованы сжатием со смещением при изготовлении образцов методом продавливания массы через формирующий калибр. Трение сжатых чешуек приводит к деформации приповерхностного слоя и образованию дефектов структуры в нем. При анизотропии чешуйки, равной согласно [5], 23, толщина чешуйки диаметром 0,1 мм составляет ~4 мкм. По выполненным оценкам, соответствующие толщине дефектного слоя значения  $x_{0,9}$  и  $x_{0,95}$  составляют сотню нанометров и эта величина значительно меньше толщины чешуек графита в модельной композиции.

### Литература

1. Дмитриев, А.В. Электрофизические свойства композиции на основе природного чешуйчатого графита / А.В. Дмитриев, А.А. Ершов // Химия твердого топлива. – 2011. – № 6. – С. 47–54.
2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 212 с.
3. Ершов, А.А. Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе / А.А. Ершов // Журнал вычислительной математики и уравнений математической физики. – 2011. – Т. 51, № 6. – С. 1064–1080.
4. Хольм, Р. Электрические контакты / Р. Хольм. – М.: Иностранная литература, 1961. – 464 с.
5. Дмитриев, А.В. Научные основы разработки способов снижения удельного электрического сопротивления графитированных электродов / А.В. Дмитриев. – Челябинск: ЧГПУ, 2005. – 197 с.
6. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: Физматлит, 2008. – 248 с.
7. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2014 г.

**THE ANALYSIS OF ENERGY ABSORPTION IN A BLANKET  
FOR CONTACT ELECTRIC RESISTANCE****A.V. Dmitriev<sup>1</sup>, A.A. Ershov<sup>2</sup>**

The authors investigate peculiarities of the dissipation of electric energy at the point contacts between the graphite flakes in a composition based on it. The analysis reveals the surface layer on the surface of the graphite flake and carries out the calculation of the proportion of the output electrical energy. The calculations are performed in the two-dimensional approximation at the location of contacts with the current flowing across and along one of the flat faces of the plate. The sizes of plate conductors and electrical crosssection of the electrical spots of contacts between them have been used as parameters. The authors have discovered the analytical dependences of the layer thickness of  $x_p$  with a predetermined proportion of the energy dissipation of  $p$  of the crosssection contacts of  $2\varepsilon$  tending to zero. The authors have used boundary value problems as an elliptic function for the normal derivative. The general solution is obtained using the Fourier expansion of the Bessel functions, special cases are performed at the location of contact on the opposite side of the base and in the end sections. The method of asymptotic expansions is used as the solution. For all three cases, the thickness of  $x_p$  is expressed through the multiplication of the power function of the proportion of crosssection of contact in the face area and exponentially dependent on the  $p$  factor. The value of  $p$  linearly enters the index grade-dependence. The asymptotical analysis of the thickness of the layer with the release of 50, 90 and 95 % of the electrical energy for the particular case is carried out. The compensation for the calculation of the conditions under which the grid method is not applicable is given. The value of  $x_{0,5}$  and the thickness of the surface layer in which 50 % of the energy is dissipated by the order of magnitude thinner than the thickness of the natural graphite flakes are shown. When the defect layer is formed it determines the properties of the electrical contacts in the composition of natural flake graphite with non-conductive binder. It characterizes the contact electrical resistance at the pressing point contacts.

*Keywords: boundary value problem; lamellar crystal of graphite; asymptotic decomposition; small parameter; thickness of a defective layer; composite material; network of resistance; chain model; prevalence of contact electric resistance.*

**References**

1. Dmitriev A.V., Ershov A.A. *Khimiya tverdogo topliva*. 2011. no. 6. pp. 47–54. (in Russ.).
2. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Methods of the theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka Publ., 1973. 212 p. (in Russ.).
3. Ershov A.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i uravneniy matematicheskoy fiziki*. 2011. Vol. 51, no. 6. pp. 1064–1080. (in Russ.).
4. Khol'm R. *Elektricheskie kontakty* (Electrical contacts). Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1961. 464 p. (in Russ.).
5. Dmitriev A.V. *Nauchnye osnovy razrabotki sposobov snizheniya udel'nogo elektricheskogo soprotivleniya grafitirovannykh elektrodov* (The scientific basis for the development of ways to reduce electrical resistivity of graphite electrodes). Chelyabinsk, ChGPU Publ., 2005. 197 p. (in Russ.).
6. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in the analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 248 p. (in Russ.).
7. Beytman G., Erdeyn A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* (Higher transcendental functions). Moscow, Nauka Publ., 1974. 295 p. (in Russ.).

*Received 11 December 2014*

---

<sup>1</sup> Dmitriev Anton Vladimirovich is Cand. Sc. (Engineering), Lecturer, Chemistry of a Firm Body and Nanoprocesses Department, Chelyabinsk State University.

E-mail: admittiev@csu.ru

<sup>2</sup> Ershov Aleksandr Anatol'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculus Mathematics Department, Chelyabinsk State University.

E-mail: ale10919@yandex.ru