УДК 517.956.32

ЗАДАЧИ КОШИ И ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 3-ГО ПОРЯДКА

В.В. Карачик[1]

Рассматриваются задачи Коши и Гурса для гиперболического уравнения 3-го порядка. Доказана теорема существования функции Римана и на основе этого построены решения задач Коши и Гурса.

Ключевые слова: задача Коши; задача Гурса; гиперболическое уравнение 3-го порядка; функция Римана.

Введение

Рассмотрим уравнение третьего порядка следующего вида

$$\mathcal{L}(D)u(x) \equiv D_x^{(3)}u + \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $D_x^{(3)} = \partial^3 / \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3$, $f \in C(\overline{G})$, а необходимая гладкость коэффициентов и область G будут конкретизированы ниже. Очевидно, что характеристиками уравнения (1) являются плоскости $x_i = \text{const}$. Введем следующие обозначения. Пусть $\sigma(x) = 0$ – некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$ класса C^4 и $x^0 \in \mathbb{R}^3$. Область, ограниченную поверхностью $\sigma(x) = 0$ и плоскостями $x_i = x_i^0$, $i = 1, 2, 3$, обозначим через G, а пересечение $\overline{G}$ с этими плоскостями через S_i. Пусть также $\tau_i = \sigma \cap S_i$. Вектор, получающийся из вектора x отбрасыванием i-ой компоненты, обозначим $x_{(i)}$. Исследуем для уравнения (1) следующие задачи.

Задача Коши. Найти функцию $u(x)$, такую, что $u \in C^2(\overline{G})$ и $D_x^{(3)}u \in C(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям

$$\frac{\partial^k u}{\partial l^k}_{|\sigma} = \varphi_k(s), \quad s \in \sigma, \ k = \overline{0,2}, \tag{2}$$

где $l \in \mathbb{R}^3$, $\| l \| = 1$, $l(x) \in C^3(\sigma)$.

Рассмотрим область $\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_i^0 < x_i < x_i^1, i = \overline{1,3} \right\}$. Пусть $S_i(x^k) = \overline{\mathcal{D}} \cap \left\{ x_i = x_i^k \right\}$, где $k = 0,1$. В соответствии с предыдущими обозначениями $S_i = S_i(x^0)$, $\sigma = \bigcup_{i=1}^{3} S_i(x^1)$.

Задача Гурса. Найти функцию $u(x)$, такую, что $u \in C^1(\overline{\mathcal{D}})$ и $D_{x_{(i)}}^{(2)}u \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $D_x^{(3)}u \in C(\mathcal{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям

$$u(x)_{|S_i(x^0)} = \varphi_i(x_{(i)}), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Функцию $u(x)$, если она существует, будем называть регулярным решением сформулированных задач. Уравнения, содержащие операторы вида $D_x^{(n)}$, и их итерации принято называть в литературе уравнениями Манжерона. Если $a_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, $c(x) = \text{const}$, то решение задачи Гурса получено, как пример, в [1]. В данной постановке задача Гурса рассматривалась также в [2, 3]. В [2] исследовалось существование решения, а в [3] строилась функция Римана. Путем применения методики исследования задач Коши и Гурса для уравнений 2-го порядка гиперболического типа, изложенной в [4, 5], получим условия разрешимости сформулированных задач.

1. Функция Римана

Введем оператор $\mathcal{L}^*(D)$, сопряженный с $\mathcal{L}(D)$:

[1] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: karachik@susu.ru

$$\mathcal{L}^*(D)v(x) \equiv D_x^{(3)}v(x) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x)v(x)\right) - c(x)v(x). \tag{4}$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{L}^*(D)$ определен на функциях $v(x)$, имеющих следующую гладкость: $v \in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $D_{x_{(i)}}^{(2)} v \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и $D_x^{(3)} v \in C(\mathcal{D})$. Обозначим через x_k и x_j первую и вторую компоненты вектора $x_{(i)}$.

Определение. Назовем функцией Римана уравнения (1) функцию, являющуюся регулярным решением следующей задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^*(D)v(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ &v(x)_{|x_i = x_i^1} = w_i(x_{(i)}), \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{5}$$

где функция $w_i(x_{(i)})$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &D_{x_{(i)}}^{(2)} w_i(x_{(i)}) + a_i(x)_{|x_i = x_i^1} w_i(x_{(i)}) = 0, \quad x_{(i)} \in S_i(x^1), \\ &w_i(x_{(i)})_{|x_s = x_s^1} = 1, s = k, j, \quad x_s^0 < x_s < x_s^1. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим функцию Римана уравнения (1) через R. Очевидно, что $\mathrm{R} = \mathrm{R}(x, x^1)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $c, a, \partial a_i / \partial x_i \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогда функция Римана уравнения (1) существует и единственна.

Доказательство. Пусть решение задачи (3)–(4) – функция $\mathrm{R}(x, x^1)$ существует. Тогда, применяя к уравнению $\mathcal{L}^*(D)\mathrm{R}(x, x^1) = 0$ оператор $\int_x^{x^1} .d\xi$, где $x \in \mathcal{D}$, получим

$$\mathrm{R}(x,x^1) - \sum_{i=1}^{3}\left(\mathrm{R}(x^1_{|x_i^1 = x_i}, x^1) - \mathrm{R}(x_{|x_i = x_i^1}, x^1)\right) - \mathrm{R}(x,x^1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} \left(a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi_{|\xi_i = x_i^1}, x^1) - a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi_{|\xi_i = x_i}, x^1)\right) d\xi_{(i)} - \int_x^{x^1} c(\xi)\mathrm{R}(\xi, x^1)\, d\xi = 0.$$

Здесь и в дальнейшем под выражением вида $a(\xi)\mathrm{R}(\xi_{|\xi_1 = x_1}, y)$ будем понимать следующее выражение $a(x_1, \xi_2, \xi_3)\mathrm{R}(x_1, \xi_2, \xi_3; y_1, y_2, y_3)$. Учитывая условия (6), налагаемые на граничные функции задачи (5), найдем

$$\mathrm{R}(x,x^1) = \sum_{i=1}^{3} w_i(x_{(i)}) - 2 + \sum_{i=1}^{3} \int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} \left(a_i(\xi)_{|\xi_i = x_i} w_i(x_{(i)}) - a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi_{|\xi_i = x_i}, x^1)\right) d\xi_{(i)} - \int_x^{x^1} c(\xi)\mathrm{R}(\xi, x^1)\, d\xi.$$

Нетрудно видеть, что

$$w_i(x_{(i)}) + \int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} a_i(\xi)_{|\xi_i = x_i} w_i(x_{(i)})\, d\xi_{(i)} = 1, x \in S_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Поэтому

$$\mathrm{R}(x,x^1) = 1 - \sum_{i=1}^{3} \int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi_{|\xi_i = x_i}, x^1)\, d\xi_{(i)} - \int_x^{x^1} c(\xi)\mathrm{R}(\xi, x^1)\, d\xi, x \in \overline{\mathcal{D}}. \tag{7}$$

Обозначая $\mathrm{R}(x, x^1)$ через $v(x)$, запишем уравнение (7) в виде

$$v(x) = 1 - \sum_{i=1}^{3} \int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} a_i(\xi)v(\xi)_{|\xi_i = x_i}\, d\xi_{(i)} - \int_x^{x^1} c(\xi)v(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Для решения уравнения (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Нетрудно убедиться, что $v \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и $v(x)$ можно записать в виде

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n(x) - v_{n-1}(x)\right) + v_0(x), \tag{9}$$

где $v_0(x) = 1$, а при $n \geq 1$

$$v_n(x)=1-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} a_i(\xi)v_{n-1}(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}-\int_x^{x^1} c(\xi)v_{n-1}(\xi)\,d\xi,$$

если ряд (9) равномерно сходится в области $\overline{\mathcal{D}}$. Аналогичный результат получим после применения метода нормированных функций [6] к задаче (5)–(6). Оценим члены ряда (9). Пусть $|c|,|a_i|\le M$, в области $\overline{\mathcal{D}}$ и $K=\max_i\{x_i^1-x_i^0,1\}$. Для сокращения дальнейших записей введем следующие обозначения $|x-y|_{(i)}=x_j-y_j+x_k-y_k, |x-y|=x_i-y_i+x_j-y_j+x_k-y_k$, где i, j, k различные числа, принимающие значения 1, 2, 3. Так как при $x\in\overline{\mathcal{D}}$

$$(x_i^1-x_i)(x_j^1-x_j)\le K/2|x^1-x|_{(k)},\ (x_i^1-x_i)(x_j^1-x_j)(x_k^1-x_k)\le K^2/3|x^1-x|, \tag{10}$$

то для $x\in\overline{\mathcal{D}}$ справедлива оценка

$$|v_1(x)-v_0(x)|\le M\Big((x_1^1-x_1)(x_2^1-x_2)+(x_2^1-x_2)(x_3^1-x_3)+$$

$$+(x_1^1-x_1)(x_3^1-x_3)+(x_1^1-x_1)(x_2^1-x_2)(x_3^1-x_3)\Big)\le 4/3MK^2\,|x^1-x|.$$

Предположим, что для $x\in\overline{\mathcal{D}}$ и некоторого $n\ge 1$ верно неравенство

$$|v_{n+1}(x)-v_n(x)|\le K/3(4KM)^n\,|x^1-x|^{2n-1,!}. \tag{11}$$

Подставляя в (11) вместо n значение $n+1$, после несложных преобразований находим

$$|v_{n+1}(x)-v_n(x)|\le K/3(4KM)^n M\Big(3|x^1-x|^{2n+1,!}+|x^1-x|^{2n+2,!}\Big)\le$$

$$\le K/3(4KM)^n M\,|x^1-x|^{2n+1,!}\Big(3+|x^1-x|/(2n+2)\Big).$$

Так как $3/(2n+2)<1$, при $n\ge 1$, то

$$|v_{n+1}(x)-v_n(x)|\le K/3(4KM)^{n+1}\,|x^1-x|^{2n+1,!},$$

т.е. равенство (11) справедливо для любого значения $n\ge 1$ и $x\in\overline{\mathcal{D}}$. Применяя оценку (11) к формуле (9), убеждаемся, что функция $v(x)$ существует, непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$ и удовлетворяет неравенству

$$|v(x)|\le 1+2/3\sqrt{MK^3}\,\mathrm{sh}\Big(\sqrt{4MK}\,|x^1-x|\Big).$$

Докажем единственность решения уравнения (8). Пусть имеется два решения. Разность этих решений обозначим $w(x)$. Очевидно, что $w(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$w(x)=-\int_x^{x^1} c(\xi)w(\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1} a_i(\xi)w(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}.$$

Учитывая сделанные выше обозначения, найдем

$$|w(x)|\le M\left(\int_x^{x^1}|w(\xi)|\,d\xi+\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}}^{x_{(i)}^1}|w(\xi)|_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}\right).$$

Из полученного неравенства при $W=\sup\limits_{x\in\mathcal{D}}|w(x)|$ будем иметь $|w(x)|\le 4/3MWK^2\,|x^1-x|$.

Используя найденное неравенство, из оценки для $w(x)$, аналогично (11), можно получить

$$|w(x)|\le W/3(4KM)^n K\,|x^1-x|^{2n-1,!},\quad x\in\overline{\mathcal{D}}.$$

Очевидно, что если $n\to\infty$, то правая часть найденного неравенства стремится к 0, а так как левая его часть не зависит от n, то $w(x)=0$ для $x\in\overline{\mathcal{D}}$. Что и требовалось установить.

Итак, если функция $\mathrm{R}(x,x^1)$ существует, то ее можно найти из интегрального уравнения (7). Если теперь мы покажем, что решение уравнения (8) имеет следующую гладкость: $v\in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $D_{x_{(i)}}^{(2)}v\in C(\overline{\mathcal{D}})$, $D_x^{(3)}v\in C(\mathcal{D})$, и удовлетворяет задаче (5)–(6), то функция Римана уравнения (1) существует и единственна.

Сначала докажем, что функция $v(x)$ обладает в $\overline{\mathcal{D}}$ непрерывными производными первого порядка. Для этого исследуем дифференцируемость ряда (9), например по x_1. Очевидно, что функции $v_n(x)$ дифференцируемы в $\mathcal{D}$ и справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_{n+1}(x)-v_n(x)\right)=-\int_{x_2}^{x_2^1}a_3(x)\left(v_n(x)-v_{n-1}(x)\right)_{|x_2=\xi_2}d\xi_2-$$

$$-\int_{x_3}^{x_3^1}a_2(x)\left(v_n(x)-v_{n-1}(x)\right)_{|x_3=\xi_3}d\xi_3-\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}\left(c(x)+\frac{\partial}{\partial x_1}a_1(x)\right)\left(v_n(x)-v_{n-1}(x)\right)\Big|_{\substack{x_2=\xi_2\\x_3=\xi_3}}d\xi_3 d\xi_2-$$

$$-\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_n(x)-v_{n-1}(x)\right)\Big|_{\substack{x_2=\xi_2\\x_3=\xi_3}}d\xi_3 d\xi_2 \qquad (12)$$

Пусть $M_1=\sup\limits_{x\in\mathcal{D}}(M,\partial a_i/\partial x_i)$, тогда, используя (10), нетрудно убедиться, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_1(x)-v_0(x))\right|\le M_1\left(2(x_2^1-x_2)(x_3^1-x_3)+|x^1-x|_{(1)}\right),$$

и значит

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_1(x)-v_0(x))\right|\le M_1(K+1)|x^1-x|_{(1)}\,. \qquad (13)$$

Теперь оценим $\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n+1}(x)-v_n(x))$. Воспользовавшись (10), найдем

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n+1}(x)-v_n(x))\right|\le 2/3K(K+1)M_1(4KM_1)^n|x^1-x|^{2n,!}+$$

$$+M_1\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_n-v_{n-1}\right)\right|d\xi_3 d\xi_2\,. \qquad (14)$$

Отсюда нетрудно получить цепочку неравенств

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n+1}(x)-v_n(x))\right|\le 2/3K(K+1)M_1(4KM_1)^n|x^1-x|^{2n,!}+$$

$$+2/3K(K+1)M_1^2(4KM_1)^{n-1}\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}\left(|x^1-x|_{(3)}+x_3^1-\xi_3\right)^{2n-2,!}d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+M_1^2\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}\int_{\xi_2}^{x_2^1}\int_{\xi_3}^{x_3^1}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n-1}-v_{n-2})\right|d\tau_3 d\tau_2 d\xi_3 d\xi_2\le\le 4/3K(K+1)M_1(4KM_1)^n|x^1-x|^{2n,!}+$$

$$+M_1^2\int_{x_2}^{x_2^1}\int_{x_3}^{x_3^1}\int_{\xi_2}^{x_2^1}\int_{\xi_3}^{x_3^1}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n-1}-v_{n-2})\right|d\tau_3 d\tau_2 d\xi_3 d\xi_2.$$

Если данный процесс повторить $n-2$ раз и использовать неравенство (13), то получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v_{n+1}(x)-v_n(x))\right|\le 2/3nK(K+1)M_1(4KM_1)^n|x^1-x|^{2n,!}+(K+1)M_1^{n+1}|x^1-x|_{(1)}^{2n+1,!}\,.$$

Следовательно, если ряд (9) продифференцировать по x_1, то полученный таким образом ряд будет равномерно сходиться в области $\overline{\mathcal{D}}$. Значит, по известной теореме сумма ряда (9) – дифференцируемая по x_1 в области $\mathcal{D}$ функция. Аналогичное утверждение можно сделать и относительно переменных x_2 и x_3. Итак, $v\in C^1(\mathcal{D})$. Очевидно, что более этого, $v\in C^1(\overline{\mathcal{D}})$.

Исследуем возможность применения операторов $D_{x_{(i)}}^{(2)}$ и $D_x^{(3)}$ к функции $v(x)$ в области $\mathcal{D}$. Легко видеть, что правая часть уравнения (8) допускает применение к ней операторов $D_{x_{(i)}}^{(2)}$ при

$i=\overline{1,3}$, а также оператора $D_x^{(3)}$, и полученные в результате этого функции будут непрерывны в $\overline{\mathcal{D}}$. Поэтому $D_{x_{(i)}}^{(2)}v, D_x^{(3)}v\in C(\overline{\mathcal{D}})$. Далее нетрудно подсчитать, что

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}v+a_iv=\int_{x_i}^{x_i^1}\left(\sum_{j\neq i}(a_jv)_{x_j}-cv\right)d\xi_i, \tag{15}$$

а значит

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}v+a_iv_{|x_i=x_i^1}=0, x\in S_i.$$

Поскольку кроме этого $v_{|x_i=x_i^1}=1$ для $i,j=\overline{1,3}$ $(i\neq j)$ и $D_{x_{(i)}}^{(2)}v\in C(\overline{\mathcal{D}})$, то функции $w_i(x_{(i)})=v(x)_{|x_i=x_i^1}$ удовлетворяют условиям (6). Для окончательного доказательства теоремы подействуем на равенство (15) оператором D_{x_i}. Получим $\mathcal{L}^*(D)v(x)=0$. Итак, функция $v(x)$, находимая из (8), удовлетворяет задаче (5)–(6). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $c,a_i\in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $\partial^2a_i/\partial x_i^2\in C(\overline{\mathcal{D}})$, тогда функция Римана дважды дифференцируема и $\mathrm{R}_{x_ix_j}(x,x^1)\in C(\overline{\mathcal{D}})$.

Исследуем теперь свойства функции $U(x)=\mathrm{R}(x^0,x)$.

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) обладают гладкостью, требуемой в теореме 1. Тогда $U(x)$ имеет следующую гладкость: $U\in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $D_{x_{(i)}}^{(2)}U\in C(\overline{\mathcal{D}})$, $D_x^{(3)}U\in C(\mathcal{D})$, а также удовлетворяет однородному уравнению (1) и условиям (6)

$$\begin{gathered} D_{x_{(i)}}^{(2)}w_i(x_{(i)})+a_i(x)_{|x_i=x_i^0}w_i(x_{(i)})=0, x_{(i)}\in S_i(x^0),\\ w_i(x_{(i)})_{|x_s=x_s^0}=1, s=k,j, x_s^0<x_s<x_s^1, \end{gathered} \tag{16}$$

где $w_i(x_{(i)})=U(x)_{|x_i=x_i^0}$.

Доказательство. Положим $x=x^0$ и $x^1=x$ в уравнении (7). Его решение представляется рядом (9), который перепишем в виде

$$U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x,x^0),\quad x\in\overline{\mathcal{D}}, \tag{17}$$

где $U_0(x,x^0)=1$, а при $n\ge 1$

$$U_n(x,x^0)=-\int_x^{x^1}c(\xi)U_{n-1}(x,\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}}a_i(\xi)U_{n-1}(x,\xi)_{|\xi_i=x_i^0}\,d\xi_{(i)}. \tag{18}$$

Пусть $U_n(x,x^0)$ обладает гладкостью, требуемой в теореме 2 от функции $U(x)$. Тогда из формулы (18) сразу следует, что $U_{n+1}(x,x^0)$ также обладает этой же гладкостью. Это видно из того, что порядок производных справа от $U_n(x,x^0)$ не может быть выше порядка производных слева от $U_{n+1}(x,x^0)$. Оценим члены ряда (17). Из (11) следует, что

$$|U_n(x,x^0)|\le\frac{\left(36Mk^3\right)^n}{9(2n-1)!},$$

если $|x_i-x_i^0|\le k$, $|a_i|,|c|\le M$. Аналогичные оценки имеют место и для $D_{x_i}U_n$, $D_{x_{(i)}}^{(2)}U_n$, $D_x^{(3)}U_n$. Значит, сумма ряда (17) обладает гладкостью, требуемой от функции $U(x)$. Положим в формуле (18) $x_i=x_i^0$. Тогда, обозначая $U_n(x)_{|x_i=x_i^0}=\tilde w_n(x_{(i)},x^0)$ будем иметь

$$\tilde w_n(x_{(i)},x^0)=-\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}}a_i(\xi)\tilde w_{n-1}(x_{(i)},\xi)_{|\xi_i=x_i^0}\,d\xi_{(i)}. \tag{19}$$

Положим $x_j = x_j^0$, для $j \neq i$. Тогда $\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0)_{|x_j = x_j^0} = 0$ для $n \geq 1$. Значит, $w_i(x_{(i)})_{|x_j=x_j^0} = 1$. Подействуем на равенство (19) оператором D_{x_j} при $j \neq i$. Если $n \geq 1$, будем иметь

$$D_{x_j}\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0) = -\int_{x_k^0}^{x_k} a_i(\xi)\tilde{w}_{n-1}(x_{(i)}, \xi)\Big|_{\substack{\xi_i = x_i^0 \\ \xi_j = x_j}} d\xi_k - \int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi) D_{x_j}\tilde{w}_{n-1}(x_{(i)}, \xi)_{|\xi_i = x_i^0} d\xi_{(i)},$$

или при $n \geq 2$

$$D_{x_j}\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0) = -\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi) D_{x_j}\tilde{w}_{n-1}(x_{(i)}, \xi)_{|\xi_i = x_i^0} d\xi_{(i)}.$$

Действуя на полученное равенство оператором D_{x_k}, найдем

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0) = -\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi) D_{x_{(i)}}^{(2)}\tilde{w}_{n-1}(x_{(i)}, \xi)_{|\xi_i = x_i^0} d\xi_{(i)}. \tag{20}$$

Если $n = 1$, то будем иметь $D_{x_{(i)}}^{(2)}\tilde{w}_1(x_{(i)}, x^0) = -a_i(x)_{|x_i = x_i^0}$ и значит

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}\tilde{w}_1(x_{(i)}, x^0) = -a_i(x)_{|x_i = x_i^0}\,\tilde{w}_0(x_{(i)}, x^0).$$

Отсюда, используя (19) и (20), нетрудно получить

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0) = -a_i(x)_{|x_i = x_i^0}\,\tilde{w}_{n-1}(x_{(i)}, x^0). \tag{21}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{w}_n(x_{(i)}, x^0) = w_i(x_{(i)})$, убеждаемся в справедливости (16).

Выпишем рекуррентное дифференциальное соотношение для функций $U_n(x, x^0)$. Подсчет показывает, что если i, j, k – не равные между собой числа, принимающие значения 1, 2, 3

$$\begin{aligned} D_x^{(3)}U_n(x, x^0) = \\ = -\sum_{i=1}^{3}\Bigg[\Bigg(\int_{x_k^0}^{x_k} a_j(\xi)_{|\xi_j = x_j^0} d\xi_k + \int_{x_j^0}^{x_j} a_k(\xi)_{|\xi_k = x_k^0} d\xi_j + \int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} c(\xi)\, d\xi_{(i)}\Bigg) D_{x_{(i)}}^{(2)}U_{n-1}(x, \xi)_{|\xi_i = x_i} + \\ + \int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi) D_x^{(3)}U_{n-1}(x, \xi)_{|\xi_i = x_i} d\xi_{(i)}\Bigg] - \int_{x^0}^{x} c(\xi) D_x^{(3)}U_{n-1}(x, \xi)\, d\xi - c(x)U_{n-1}(x, x^0) \end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, что $U_n(x, x) = 0$, если $n \geq 1$. Положим $n = 1$ в (22). Тогда, так как $U_0(x, x^0) = 1$, получим

$$D_x^{(3)}U_{n+1}(x, x^0) = -\sum_{i=1}^{3} a_i(x) D_{x_i}U_n(x, x^0) - c(x)U_n(x, x^0) \tag{23}$$

при $n = 0$. Далее из (21) следует, что при $\xi_i = x_i$

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}U_n(x, \xi) = -a_i(x)U_{n-1}(x, \xi). \tag{24}$$

Предположим, что формула (23) верна при $n = m - 1$. Докажем ее справедливость и при $n = m$. Для этого, подставим значения из (23) и (24), взятые при $n = m$, в формулу (22), в которой $n = m + 1$. Получим

$$\begin{aligned} D_x^{(3)}U_{m+1}(x, x^0) = \sum_{i=1}^{3}\Bigg[a_i(x)\Bigg(\int_{x_k^0}^{x_k} a_j(\xi)_{|\xi_j = x_j^0} d\xi_k + \int_{x_j^0}^{x_j} a_k(\xi)_{|\xi_k = x_k^0} d\xi_j + \int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} c(\xi)\, d\xi_{(i)}\Bigg) U_{m-1}(x, \xi)_{|\xi_i = x_i} + \\ + \int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi)\Bigg(\sum_{j=1}^{3} a_j(x) D_{x_j}U_{m-1}(x, \xi) + c(x)U_{m-1}(x, \xi)\Bigg)_{|\xi_i = x_i^0} d\xi_{(i)}\Bigg] + \\ + \sum_{i=1}^{3}\int_{x^0}^{x}\Big(a_i(x)c(\xi)D_{x_i}U_{m-1}(x, \xi) + c(x)c(\xi)U_{m-1}(x, \xi)\Big)\, d\xi. \end{aligned} \tag{25}$$

Обозначим коэффициент при $a_i(x)$ через $b_i(x)$. Применяя равенство (18), получим

$$b_i(x)=\left(\int_{x_k^0}^{x_k} a_j(\xi)\cdot_{|\xi_j=x_j^0}d\xi_k+\int_{x_j^0}^{x_j} a_k(\xi)\cdot_{|\xi_k=x_k^0}d\xi_j+\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} c(\xi)\cdot d\xi_{(i)}\right)U_{m-1}(x,\xi)_{|\xi_i=x_i}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_{x_{(j)}^0}^{x_{(j)}} a_j(\xi)D_{x_i}U_{m-1}(x,\xi)_{|\xi_j=x_j^0}d\xi_{(j)}+\int_{x^0}^{x} c(\xi)D_{x_i}U_{m-1}(x,\xi)=-D_{x_i}U_m(x,x^0).$$

Аналогично, обозначая коэффициент при $c(x)$ через $d(x)$ получим

$$d(x)=\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}} a_i(\xi)U_{m-1}(x,\xi)_{|\xi_i=x_i^0}d\xi_{(i)}+\int_{x^0}^{x} c(\xi)U_{m-1}(x,\xi)d\xi=-U_m(x,x^0)\ .$$

Подставляя полученные значения коэффициентов $b_i(x)$ и $d(x)$ в формулу (25) получим (23) при $n=m$. Значит, формула (24) верна для любого $n\in\mathbb{N}$. Для окончательного доказательства теоремы перейдем в формуле (23) к пределу при $n\to\infty$. Тогда будем иметь $\mathcal{L}(D)U(x)=0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Если коэффициенты имеют гладкость $c,a_i\in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $\partial^2 a_i/\partial x_i^2\in C(\overline{\mathcal{D}})$, тогда $R_{x_ix_i}(x^0,x)\in C(\overline{\mathcal{D}})$.

2. Задача Коши

Исследуем задачу Коши. Рассмотрим следующие тождества для функций $u,v\in C^3(G)$

$$v\mathcal{L}(D)u+u\mathcal{L}^*(D)v=$$

$$=\left(u_{x_2x_3}v+a_1uv\right)_{x_1}+\left(-u_{x_3}v_{x_1}+a_2uv\right)_{x_2}+\left(uv_{x_1x_2}+a_3uv\right)_{x_3},$$

$$=\left(uv_{x_2x_3}+a_1uv\right)_{x_1}+\left(u_{x_1x_3}v+a_2uv\right)_{x_2}+\left(-u_{x_1}v_{x_2}+a_3uv\right)_{x_3},$$

$$=\left(-u_{x_2}v_{x_3}+a_1uv\right)_{x_1}+\left(uv_{x_1x_3}+a_2uv\right)_{x_2}+\left(u_{x_1x_2}v+a_3uv\right)_{x_3}.$$

Складывая их, найдем

$$3\left(v\mathcal{L}(D)u+u\mathcal{L}^*(D)v\right)=\left(u_{x_2x_3}v-u_{x_2}v_{x_3}+uv_{x_2x_3}+3a_1uv\right)_{x_1}+$$
$$+\left(u_{x_1x_3}v-u_{x_3}v_{x_1}+uv_{x_1x_3}+3a_2uv\right)_{x_2}+\left(u_{x_1x_2}v-u_{x_1}v_{x_2}+uv_{x_1x_2}+3a_3uv\right)_{x_3}. \tag{26}$$

Из обозначений, сделанных в начале статьи, следует, что область G определяется точкой x^0, если поверхность $\sigma(x)=0$ фиксирована. Поэтому $G=G(x^0)$. Вернемся к предыдущему тождеству (26) и заменим в нем x на ξ, вместо $v(\xi)$ подставим $\mathrm{R}(\xi,x)$ и проинтегрируем по $G(x)$. Обозначим интегралы от каждой скобки через J_1, J_2 и J_3 соответственно. Компоненты вектора внешней нормали к поверхности $\sigma(x)=0$ обозначим n_{ξ_i}, $i=1,2,3$. Вычислим J_1. Имеем

$$J_1=\int_{G(x)}\left[u_{\xi_2\xi_3}\mathrm{R}-1/2\left(u_{\xi_2}\mathrm{R}_{\xi_3}+u_{\xi_3}\mathrm{R}_{\xi_2}\right)+u\,\mathrm{R}_{\xi_2\xi_3}+3a_1u\,\mathrm{R}\right]_{\xi_1}d\xi=$$
$$=\int_{\sigma\cup S}\left[u_{\xi_2\xi_3}\mathrm{R}-1/2\left(u_{\xi_2}\mathrm{R}_{\xi_3}+u_{\xi_3}\mathrm{R}_{\xi_2}\right)+u\,\mathrm{R}_{\xi_2\xi_3}+3a_1u\,\mathrm{R}\right]n_{\xi_1}d\sigma.$$

Используя свойства функции Римана (6), найдем

$$J_1=\int_{\sigma(x)}\left[u_{\xi_2\xi_3}\mathrm{R}-1/2\left(u_{\xi_2}\mathrm{R}_{\xi_3}+u_{\xi_3}\mathrm{R}_{\xi_2}\right)+u\,\mathrm{R}_{\xi_2\xi_3}+3a_1u\,\mathrm{R}\right]n_{\xi_1}d\sigma-$$
$$-\int_{S_1(x)}\left\{(u\mathrm{R})_{\xi_2\xi_3}-3/2\left[\left(u\mathrm{R}_{\xi_2}\right)_{\xi_3}+\left(u\mathrm{R}_{\xi_3}\right)_{\xi_2}\right]+3\left(\mathrm{R}_{\xi_2\xi_3}+a_1\mathrm{R}\right)u\right\}ds.$$

Здесь $\sigma(x)$ – часть поверхности $\sigma(x)=0$, находящаяся в области $\overline{G}(x)$. Обозначим $P_i(x)=\tau_j(x)\cap\tau_k(x)$. Интеграл по $S_1(x)$ обозначим через l_1 и вычислим его. Опять используя свойство функции Римана (6), найдем

$$l_1=\frac{1}{2}\int_{S_1(x)}\left\{\left[(u\mathrm{R})_{\xi_2}-3\left(u\mathrm{R}_{\xi_2}\right)\right]_{\xi_3}+\left[(u\mathrm{R})_{\xi_3}-3\left(u\mathrm{R}_{\xi_3}\right)\right]_{\xi_2}\right\}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\tau_1(x)}\left\{\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_2}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_2}\right)\right]n'_{\xi_3}+\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_3}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_3}\right)\right]n'_{\xi_2}\right\}ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_2}^{P_2(x)}(u\,\mathrm{R})_{\xi_2}\,d\xi_2-\frac{1}{2}\int_{x_3}^{P_3(x)}(u\,\mathrm{R})_{\xi_3}\,d\xi_3=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\tau_1(x)}\left\{\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_2}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_2}\right)\right]n'_{\xi_3}+\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_3}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_3}\right)\right]n'_{\xi_2}\right\}ds-$$
$$-1/2u(P_2)\mathrm{R}(P_2,x)-1/2u(P_3)\mathrm{R}(P_3,x)+u(x),$$

где n'_{ξ_i} – компоненты вектора внешней нормали к кривой $\tau_1(x)$ в плоскости $\xi_1=x_1$. Итак, J_1 имеет следующее значение

$$J_1=\int_{\sigma(x)}\left[u_{\xi_2\xi_3}\mathrm{R}-1/2\left(u_{\xi_2}\mathrm{R}_{\xi_3}+u_{\xi_3}\mathrm{R}_{\xi_2}\right)+u\,\mathrm{R}_{\xi_2\xi_3}+3a_1u\,\mathrm{R}\right]n_{\xi_1}\,d\sigma-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\tau_1(x)}\left\{\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_2}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_2}\right)\right]n'_{\xi_3}+\left[(u\,\mathrm{R})_{\xi_3}-3\left(u\,\mathrm{R}_{\xi_3}\right)\right]n'_{\xi_2}\right\}ds+$$
$$+1/2u(P_2)\mathrm{R}(P_2,x)+1/2u(P_3)\mathrm{R}(P_3,x)-u(x).$$

Аналогично вычисляются интегралы J_2 и J_3. Складывая значения J_1, J_2 и J_3, получим

$$u(x)=\frac{1}{3}u(P_1)\mathrm{R}(P_1,x)+\frac{1}{3}u(P_2)\mathrm{R}(P_2,x)+\frac{1}{3}u(P_3)\mathrm{R}(P_3,x)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau_i(x)}\left[\left(u_{\xi_j}\mathrm{R}-2u\,\mathrm{R}_{\xi_j}\right)n'_{\xi_k}+\left(u_{\xi_k}\mathrm{R}-2u\,\mathrm{R}_{\xi_k}\right)n'_{\xi_j}\right]d\tau_i+$$
$$+\int_{\sigma(x)}\sum_{i=1}^{3}\left[u_{\xi_j\xi_k}\mathrm{R}-\frac{1}{2}\left(u_{\xi_j}\mathrm{R}_{\xi_k}+u_{\xi_k}\mathrm{R}_{\xi_j}\right)+u\,\mathrm{R}_{\xi_j\xi_k}+3a_iu\,\mathrm{R}\right]n_{\xi_i}\,d\sigma-\int_{G(x)}\mathrm{R}(\xi,x)f(\xi)\,d\xi. \quad (27)$$

Для того, чтобы полученная формула давала решение задачи Коши, необходимо выразить значения u_{x_k}, $u_{x_kx_i}$ на $\sigma(x)=0$ через данные Коши. Покажем, что это возможно, когда направление $l(x)$ не касается поверхности $\sigma(x)=0$ ни в одной точке. В случае, когда уравнение имеет второй порядок, это известно [5].

Пусть поверхность $\sigma(x)=0$ на некоторой своей части задается уравнением $x_1=\sigma(x_2,x_3)$ и $\sigma\in C^4$. Можно считать, что $\varphi_k=\varphi_k(x_2,x_3)$. Легко показать, что на поверхности $\sigma(x)=0$ верны равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\sigma_2+\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_1}\sigma_3+\frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3},\quad l_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+l_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+l_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=\varphi_1, \quad (28)$$

в которых $\sigma_i=\partial\sigma/\partial x_i$. Полученная система уравнений для определения $\partial u/\partial x_{i|\sigma}$ разрешима при любой правой части, если $\Delta\equiv(l,n)\neq 0$ в произвольной точке поверхности $\sigma(x)=0$. Далее из (28) нетрудно получить систему уравнений для определения $\partial^2u/\partial x_i\partial x_{j|\sigma}$. Если неизвестные записать в виде вектора $X=\left(u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_2},u_{x_2x_3},u_{x_3x_3}\right)_{|\sigma}$, то матрица этой системы

$$\mathrm{A}\,X=b, \quad (29)$$

будет иметь вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 & 1 & 0\\ \sigma_2^2 & 2\sigma_2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \sigma_3^2 & 0 & 2\sigma_3 & 0 & 0 & 1\\ l_1\sigma_2 & l_1+l_2\sigma_2 & l_3\sigma_2 & l_2 & l_3 & 0\\ l_1\sigma_3 & l_2\sigma_3 & l_1+l_3\sigma_3 & 0 & l_2 & l_3\\ l_1^2 & 2l_1l_2 & 2l_1l_3 & l_2^2 & 2l_2l_3 & l_3^2\end{pmatrix},$$

а вектор правой части записывается в форме

$$b=\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_2\partial x_3}-u_{x_1|\sigma}\sigma_{23},\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_2^2}-u_{x_1|\sigma}\sigma_{22},\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_3^2}-u_{x_1|\sigma}\sigma_{33},\right.$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l_i}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_i}{}_{|\sigma},\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l_i}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_i}{}_{|\sigma},\varphi_2-\sum_{i,j=1}^{3}l_i\frac{\partial l_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}{}_{|\sigma}\right).$$

После элементарных преобразований определитель матрицы A примет вид $\det\mathrm{A}=\Delta^4$.

Сформулируем основной результат для задачи Коши.

Теорема 3. Задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение, если $c,a_i\in C^1(\bar G)$, $\partial^2 a_i/\partial x_i^2\in C(\bar G)$, $\varphi_k\in C^{4-k}(\sigma)$ и векторное поле $l(x)$ не касается поверхности $\sigma\in C^4$ ни в одной точке. Это решение можно найти по формуле (27), если $\partial u/\partial x_{i|\sigma}$ определить из системы (28), а $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_{j|\sigma}$ из системы (29).

Доказательство. Единственность решения задачи (1)–(2) следует из представления (27). Для доказательства существования решения сделаем в уравнении (1) замену переменных

$$v=u-u_{|\sigma}-(x_1-\sigma)u_{x_1|\sigma}-(x_1-\sigma)^2u_{x_1x_1|\sigma},$$

где $u_{x_1|\sigma}$ и $u_{x_1x_1|\sigma}$ находятся через φ_i из (28) и (29). Тогда, уравнение (1) примет вид $\mathcal{L}(D)v=f_1$, а условия (2) станут однородными. В силу замечаний к теоремам 1 и 2 имеем $u_{x_ix_i}\in C(\bar G)$. Ясно, что $f_1\in C(\bar G(x^0)$. Если теперь показать, что функция

$$v(x)=-\int_{G(x)}\mathrm{R}(\xi,x)f_1(\xi)\,d\xi$$

является решением однородной задачи (1)–(2), то теорема будет доказана.

Нетрудно подсчитать, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\int_{S_i(x)}\mathrm{R}(\xi,x)f_1(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}-\int_{G(x)}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x_i}(\xi,x)f_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_k}=-\int_{x_j}^{P_j(x)}\mathrm{R}(\xi,x)f_1(\xi)\Big|_{\substack{\xi_i=x_i\\ \xi_k=x_k}}d\xi_j+\int_{S_i(x)}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x_k}(\xi,x)f_1(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}+$$

$$+\int_{S_k(x)}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x_i}(\xi,x)f_1(\xi)_{|\xi_k=x_k}\,d\xi_{(k)}-\int_{G(x)}\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial x_i\partial x_k}(\xi,x)f_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}=\mathrm{R}(x,x)f_1(x)-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_i}^{P_i(x)}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x_i}(\xi,x)f_1(\xi)\Big|_{\substack{\xi_k=x_k\\ \xi_j=x_j}}d\xi_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_{S_i(x)}\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial x_i\partial x_k}(\xi,x)f_1(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}-\int_{G(x)}\frac{\partial^3\mathrm{R}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(\xi,x)f_1(\xi)\,d\xi,$$

а поэтому

$$\mathcal{L}(D)v=f_1(x)-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_i}^{P_i(x)}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x_i}(\xi,x)f_1(\xi)\Big|_{\substack{\xi_k=x_k\\ \xi_j=x_j}}d\xi_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_{S_i(x)}\left(\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial x_k\partial x_j}(\xi,x)+a_i(x)\mathrm{R}(\xi,x)\right)f_1(\xi)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)}-\int_{G(x)}\mathcal{L}_x(D)\mathrm{R}(\xi,x)f_1(\xi)\,d\xi.$$

В силу свойств функции Римана $\mathcal{L}(D)v=f_1$. Легко видеть, что $v_{|\sigma}=v_{x_i|\sigma}=v_{x_ix_k|\sigma}=0$ для любых, значений $i,k=1,2,3$, не обязательно различных. Теорема доказана.

3. Задача Гурса

Для исследования существования и единственности решения задачи Гурса необходимы следующие рассуждения. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ обладают гладкостью, требуемой от решения задачи Гурса, и кроме того $D_x^{(3)}u,D_x^{(3)}v\in C(\bar{\mathcal{D}})$. Нетрудно убедиться, что

$$D_x^{(3)}(uv) = vD_x^{(3)}u + uD_x^{(3)}v + \sum_{i=1}^{3}\left(v_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}u + u_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}v\right). \tag{30}$$

Если теперь к обеим частям полученного тождества добавить следующее равенство

$$v\mathcal{L}(D)u + u\mathcal{L}^*(D)v = vD_x^{(3)}u + uD_x^{(3)}v + \sum_{i=1}^{3}\left(a_i uv\right)_{x_i},$$

справедливое в $\overline{\mathcal{D}}$, то будем иметь

$$D_x^{(3)}(uv) + \sum_{i=1}^{3}\left(a_i uv\right)_{x_i} = v\mathcal{L}(D)u + u\mathcal{L}^*(D)v + \sum_{i=1}^{3}\left(v_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}u + u_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}v\right). \tag{31}$$

Рассмотрим аналог тождества (30)

$$D_{x_{(i)}}^{(2)}(uv) = vD_{x_{(i)}}^{(2)}u + uD_{x_{(i)}}^{(2)}v + u_{x_k}v_{x_j} + u_{x_j}v_{x_k}.$$

Положим в нем $v = v_{x_i}$ и просуммируем по i. Будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3}D_{x_{(i)}}^{(2)}(uv_{x_i}) = \sum_{i=1}^{3}v_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}u + 3uD_x^{(3)}v + 2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}D_{x_{(i)}}^{(2)}v.$$

Вычтем полученное тождество из равенства (31). Тогда, после некоторых простых преобразований, получим следующее тождество в $\overline{\mathcal{D}}$

$$D_x^{(3)}(uv) - \sum_{i=1}^{3}D_{x_{(i)}}^{(2)}(uv_{x_i}) = v\mathcal{L}(D)u + u\mathcal{L}^*(D)v - \sum_{i=1}^{3}\left[u\left(D_{x_{(i)}}^{(2)}v + a_i v\right)\right]'_{x_i}. \tag{32}$$

Выберем вместо $v(x)$ функцию Римана уравнения (1), т.е. положим $v(x) = \mathrm{R}(x, x^1)$. Это возможно в силу теоремы 1 и включения $D_x^{(3)}v \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогда $\mathcal{L}^*(D)v = 0$. Затем положим $x = \xi$ и проинтегрируем последовательно по ξ_i $(i = 1,2,3)$ в пределах от x_i^0 до x_i. Получим

$$u(x)\mathrm{R}(x,x) - u(x^0)\mathrm{R}(x^0,x) - \sum_{i=1}^{3}\left(u(x)R(x_{|x_i=x_i^0},x) - u(x^0)\mathrm{R}(x^0_{|x_i^0=x_i},x)\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_i^0}^{x_i}\left[u(x)\mathrm{R}_{\xi_i}(x_{|x_i=\xi_i},x) - \sum_{i=1,\,j\neq i}^{3}u(x)\mathrm{R}_{\xi_i}(x_{\substack{|x_j=x_j^0\\ x_i=\xi_i}},x) + u(x^0)\mathrm{R}_{\xi_i}(x^0_{|x_i^0=\xi_i},x)\right]d\xi_i =$$

$$= \int_{x^0}^{x}\mathrm{R}(\xi,x)\mathcal{L}_\xi(D)u(\xi)\,d\xi - \sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}}\left(u(\xi)\left(D_{\xi_{(i)}}^{(2)}\mathrm{R}(\xi,x) + a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi,x)\right)\right)_{|\xi_i=x_i}d\xi_{(i)}. \tag{33}$$

Предположим, что

$$\begin{aligned}&\varphi_i(x_{(i)})_{|x_j=x_j^0} = \varphi_j(x_{(j)})_{|x_i=x_i^0} = \psi_k(x_k);\\ &\psi_i(0) = \psi_j(0) = \psi_k(0) = \psi_0,\end{aligned} \tag{34}$$

где i, j, k – различные числа, принимающие значения 1, 2, 3. Учитывая, что функция $\mathrm{R}(x,x^1)$ является решением задачи (5)–(6), получим

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3}\left(\varphi_i(x_{(i)})\mathrm{R}(x_{|x_i=x_i^0},x) - \psi_i(x_i)\mathrm{R}(x^0_{|x_i^0=x_i},x)\right) + \psi_0\mathrm{R}(x^0,x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\int_{x_i^0}^{x_i}\left(\psi_i(\xi_i)\mathrm{R}_{\xi_i}(x^0_{|x_i^0=\xi_i},x) - \sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\varphi_j(x_{(j)})\mathrm{R}_{\xi_i}(x_{\substack{|x_j=x_j^0\\ x_i=\xi_i}},x)\right)d\xi_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{(i)}^0}^{x_{(i)}}\varphi_i(\xi_{(i)})\left(D_{\xi_{(i)}}^{(2)}\mathrm{R}(\xi,x) + a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi,x)\right)_{|\xi_i=x_i^0}d\xi_{(i)} + \int_{x^0}^{x}f(\xi)\mathrm{R}(\xi,x)\,d\xi. \tag{35}$$

Итак, сформулируем основной результат для задачи Гурса.

Теорема 4. Пусть $f, c, a_i, \partial a_i/\partial x_i \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $(i=\overline{1,3})$, а функции $\varphi_i(x_{(i)})$, удовлетворяющие условиям согласования (34), имеют гладкость $D^{(2)}_{x_{(i)}}\varphi_i \in C(\overline{\mathcal{D}})$, тогда регулярное решение задачи Гурса существует, единственно и записывается в виде (35).

Доказательство. Очевидно, что $D^{(3)}_x u \in C(\overline{\mathcal{D}})$, а поэтому единственность решения задачи Гурса в требуемом классе функций следует из представления (35). Докажем существование. Нетрудно видеть, что правая часть формулы (35) обладает гладкостью, необходимой для искомого решения. Проверим, что $u(x)$, находимая из (35), удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (3). Начнем с последнего. Если воспользоваться свойствами функции Римана (5)–(6) и условиями согласования (34), то нетрудно убедиться, что интегральные члены в формуле (35) при $x_i = x_i^0$ обращаются в нуль, а сумма членов, не содержащих интегралы, будет равна $\varphi_i(x_{(i)})$. Значит, условия (3) выполнены. Обозначим

$$u_0(x) = \int_{x^0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{R}(\xi,x)\,d\xi. \tag{36}$$

Покажем, что $\mathcal{L}(D)u_0(x) = f(x)$. Действительно,

$$D^{(3)}_x u_0(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{3}\int_{x^0_{(i)}}^{x_{(i)}} f(\xi) D^{(2)}_{x_{(i)}}\mathrm{R}(\xi,x)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)} + \int_{x^0}^{x} f(\xi) D^{(3)}_x \mathrm{R}(\xi,x)\,d\xi,$$

и

$$D_{x_i} u_0(x) = \int_{x^0_{(i)}}^{x_{(i)}} f(\xi)\mathrm{R}(\xi,x)_{|\xi_i=x_i}\,d\xi_{(i)} + \int_{x^0}^{x} f(\xi) D_{x_i}\mathrm{R}(\xi,x)\,d\xi,$$

и значит, используя свойство функции Римана (16), получим

$$\mathcal{L}(D)u_0(x) = f(x) + \int_{x^0}^{x} f(\xi)\mathcal{L}_x(D)\mathrm{R}(\xi,x)\,d\xi.$$

Опять вспоминая теорему 2, убеждаемся в верности доказываемого равенства.
Обозначим $u_1(x) = u(x) - u_0(x)$. Покажем, что $\mathcal{L}(D)u_1(x) = 0$. Очевидно, для $u_1(x)$ верна формула (35), записанная при $f(x) = 0$. Если подставим в эту формулу выражения

$$\varphi_i(x_{(i)}) = u(x)_{|x_i = x_i^0}, \quad \psi_i(x_i) = u(x)_{\Big| \substack{x_k = x_k^0 \\ x_j = x_j^0}},$$

где числа i, j, k не равны между собой и принимают значения 1, 2, 3, то в силу выполнимости условий (3) получим формулу (33) без слагаемого

$$\int_{x^0}^{x} f(\xi)\mathcal{L}_\xi(D)u(\xi)\,d\xi.$$

Далее, проводя рассуждения, обратные сделанным при выводе формулы (33), найдем

$$\int_{x^0}^{x}\Big(D^{(3)}_\xi\left(u_1(x)\mathrm{R}(\xi,x)\right) - \sum_{i=1}^{3} D^{(2)}_{\xi_{(i)}}\left(u_1(x)R_{\xi_i}(\xi,x)\right) + \sum_{i=1}^{3} u_1(x)\left(D^{(2)}_{\xi_{(i)}}\mathrm{R}(\xi,x) + a_i(\xi)\mathrm{R}(\xi,x)\right)'_{\xi_i}\Big)d\xi = 0.$$

Положим $x = x^1$, $x^0 = x$, $\mathrm{R}(x,x^1) = v(x)$ и применим к обеим частям полученного равенства оператор $D^{(3)}_x$. Будем иметь

$$D^{(3)}_x(u_1 v) - \sum_{i=1}^{3} D^{(2)}_{x_{(i)}}\left(u_1 v_{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(u_1\left(D^{(2)}_{x_{(i)}}v + a_i(x)v\right)\right)'_{x_i} = 0.$$

Вспоминая тождество (32) и рассматривая его при $v(x) = \mathrm{R}(x,x^1)$, получим $v\mathcal{L}(D)u_1 = 0$. Так как $v(x) \not\equiv 0$, то $\mathcal{L}(D)u_1 = 0$. Теорема полностью доказана.

Замечание 3. Функция $u_0(x)$ из равенства (36) является решением неоднородной задачи Гурса с однородными краевыми условиями.

Пример. Исследуем задачу Гурса при $a_i(x) = 0$ для $i = 1,2,3$ и $c(x) = \lambda$

$$D^{(3)}_x u + \lambda u = f(x), \quad u(x)_{|S_i(x^0)} = \varphi_i(x_{(i)}),\ i = 1,2,3.$$

Функция Римана этого уравнения легко находится из формулы (7). Она имеет вид

$$\mathrm{R}_\lambda(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n (x_1-\xi_1)^{n,!}(x_2-\xi_2)^{n,!}(x_3-\xi_3)^{n,!}.$$

Решение задачи Гурса (35), которое с помощью метода нормированных систем функций [6] и операторов $U(D)$ и $V(D)$ из [6, теорема 4.13] можно также записать как решение задачи C_β при $\beta=(1,1,1)$, легко преобразуется к виду

$$u(x)=\sum_{i=1}^{3}\Big(\varphi_i(x_{(i)})-\psi_i(x_i)\Big)+\psi_0-\lambda\int_{x^0}^{x}\left(\sum_{i=1}^{3}\Big(\varphi_i(\tau_{(i)})-\psi_i(\tau_i)\Big)+\psi_0\right)\mathrm{R}_\lambda(\tau,x)\,d\tau+\int_{x^0}^{x} f(\tau)\,\mathrm{R}_\lambda(\tau,x)\,d\tau,$$

где функции $\psi_i(x_i)$ необходимо брать из (34). Найденное решение совпадает с полученным другим путем в [1]. Метод нормированных систем функций [6], примененный к уравнению Лапласа позволяет строить специальные полиномы [7, 8] и решение задачи Дирихле [9], а примененный к линейным ОДУ – новое представление решений задачи Коши [10].

Литература

1. Карачик, В.В. Разработка теории нормированных систем функций и их применения к решению начально-краевых задач для уравнений в частных производных: дисс. … д-ра физ.-мат. наук / В.В. Карачик. – Ташкент, 2001. – 213 с.

2. Мюнц, Г. Интегральные уравнения / Г. Мюнц. – М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.

3. Жегалов, В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса / В.И. Жегалов // Некласические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. – С. 94–98.

4. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976. – 296 с.

5. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 436 с.

6. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.

7. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2004. – Vol. 132, no. 4. – P. 1049–1058.

8. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.

9. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.

10. Карачик, В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // ЖВМиМФ. – 2012. – Т. 52, № 2. – С. 237–252.

Поступила в редакцию 24 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 2, pp. 31–43

CAUCHY AND GOURSAT PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER

V.V. Karachik[1]

Cauchy and Goursat problems for the hyperbolic equation of third order are considered. The theorem of the existence of the Riemann function is proved and on the basis of the aforementioned function solutions for the Cauchy and Goursat problems are introduced.

Keywords: Cauchy and Goursat problems; hyperbolic equation of third order; Riemann function.

References

1. Karachik V.V. *Razrabotka teorii normirovannyh sistem funkcij i ih primeneniya k resheniyu nachal'no-kraevyh zadach dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk* (The development of the theory of normed systems of functions and their application to the solution of the initial-boundary value problems for equations with differential derivatives. Dr. phys. and math. sci. diss.). Tashkent, 2001. 213 p.

2. Munz G. *Integral'nye uravneniya* (Integral equations). Moscow, GTTI Publ., 1934. 330 p.

3. Zhegalov V.I. Trechmerniy analog zadachi Gursa (Three-dimensional analogue of the Goursat problem). *Neklasicheskie uravneniya i uravneniya smeshannogo tipa* (Non-classical equations and the equations of mixed type). Novosibirsk, Institut matematiki SO AN SSSR Publ., 1990. pp. 94–98.

4. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1976. 296 p. (in Russ.).

5. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (in Russ.).

6. Karachik V.V. *Metod normirovannyh sistem funkcij* (Method of normed systems of functions). Chelyabinsk: Izdatel'skij centr YuUrGU, 2014. 452 p.

7. Karachik V.V. On some special polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2004. Vol. 132, no. 4. pp. 1049–1058.

8. Karachik V.V. *Polinomial'nye resheniya differencialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefficientami I* [Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I]. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 4–17.

9. Karachik V.V., Antropova N.A. Polynomial solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in the ball. *Differential Equations.* 2013. Vol. 49, no. 2. pp. 251–256.

10. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2012. Vol. 52, no. 2. pp. 219–234.

Received 24 December 2014

[1] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: karachik@susu.ru