УДЛ 519.635.8

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ВЯЗКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

К.З. Хайрисламов [1]

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися с постоянными угловыми скоростями. Динамическая вязкость жидкости предполагается переменной, а именно зависящей от скоростей деформаций по степенному закону. В предположении, что жидкость не течет в радиальном и аксиальном направлениях, было получено выражение для азимутальной компоненты скорости, обобщающее известную формулу для жидкости с постоянной вязкостью.

Ключевые слова: установившееся течение; вязкая жидкость; степенной закон вязкости; неньютоновская жидкость.

Введение

При решении задач о течении вязких жидкостей предположение о постоянстве коэффициента динамической вязкости исключает из рассмотрения такие важные с практической точки зрения вещества, как масла, смазки, растворы и т. д. Такие жидкости относятся к классу так называемых неньютоновских жидкостей [1]. Некоторые из них могут менять свои вязкостные свойства при движении и находят применение, например, в гидроамортизаторах, гидравлических муфтах сцепления и др.

В работе исследуется стационарное течение степенной жидкости между вращающимися цилиндрами.

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости, заключенной между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Радиусы цилиндров пусть будут равны R_1 и R_2, причем $R_2 > R_1$. Выберем цилиндрические координаты (r,φ,z) с осью z по оси цилиндров. Будем считать, что траектории всех частиц среды представляют собой дуги концентрических окружностей, т.е.

$$\upsilon_r = \upsilon_z = 0,\ \upsilon_\varphi = \upsilon_\varphi(r,\varphi) \neq 0. \quad (1)$$

Условие несжимаемости

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\upsilon_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0$$

в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

поэтому υ_φ является функцией только r.

Уравнения Навье–Стокса, описывающие стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости, имеют вид [2]

$$\upsilon \cdot \nabla \upsilon = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu\left(\nabla \upsilon + (\nabla \upsilon)^T\right)\right), \quad (3)$$

где $\upsilon = (\upsilon_r, \upsilon_\varphi, \upsilon_z)$ – скорость жидкости, p – давление, μ – динамический коэффициент вязкости, ∇ – оператор набла, а символ T обозначает транспонирование. С учетом условий (1), (2) уравнения (3) принимают следующий вид

[1] Хайрисламов Кирилл Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: haigh1510@gmail.com

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{u^2}{r},\ \ \frac{\partial p}{\partial \varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)\right),\ \ \frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{4}$$

где $\upsilon_\varphi(r)$ заменено на $u(r)$. Будем считать, что $\mu=\mu(u)$, а на стенках цилиндров выполняется условие прилипания, т.е.

$$u(R_1)=\omega_1 R_1,\ u(R_2)=\omega_2 R_2\,. \tag{5}$$

2. Решение

Из третьего уравнения в (4) видно, что $p=p(r,\varphi)$. Теперь продифференцируем первое уравнение в (4) по φ, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi\partial r}=0\,,$$

откуда следует, что величина $\partial p/\partial\varphi$ зависит только от φ. Т.е. во втором уравнении в (4) слева от знака равенства стоит величина, зависящая только от φ, а справа величина, от φ не зависящая. Это возможно только в том случае, если эти величины равны одной и той же константе K, т.е.

$$p=K\varphi+f(r)\,.$$

Очевидно, что значение p одно и то же при $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$, откуда следует, что $K=0$ и

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)\right)=0\,. \tag{6}$$

Пусть $\mu=\mu\left(\left(2\,\mathrm{Tr}\,e^2\right)^{1/2}\right)$, где Tr – оператор следа, e – тензор скоростей деформаций, ненулевые компоненты которого равны

$$e_{r\varphi}=e_{\varphi r}=\frac{1}{2}q\,,\ q=\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\,. \tag{7}$$

Положим $\mu=\mu_0\left(2\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,e^2\right)^{(n-1)/2}$, откуда с учетом (7) $\mu=\mu_0\left(\lambda|q|\right)^{n-1}$ (здесь параметр $\lambda>0$ играет роль обезразмеривающего множителя, имея размерность секунд $с$; т. к. величина q имеет размерность $1/с$, то в этом случае величины μ и μ_0 имеют одну размерность вязкости – $\text{Па}\times\text{с}$).

Подставляя это выражение в (6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mu_0\lambda^{n-1}|q|^{n-1}q\right)=0\,. \tag{8}$$

Интегрирование (8) дает

$$r^2\mu_0\lambda^{n-1}|q|^{n-1}q=C\,,\ C=\mathrm{const}\,,$$

откуда

$$r^2\mu_0\lambda^{n-1}|q|^{n}=|C|\,,$$

заметим, что знаки величин q и C совпадают, поэтому

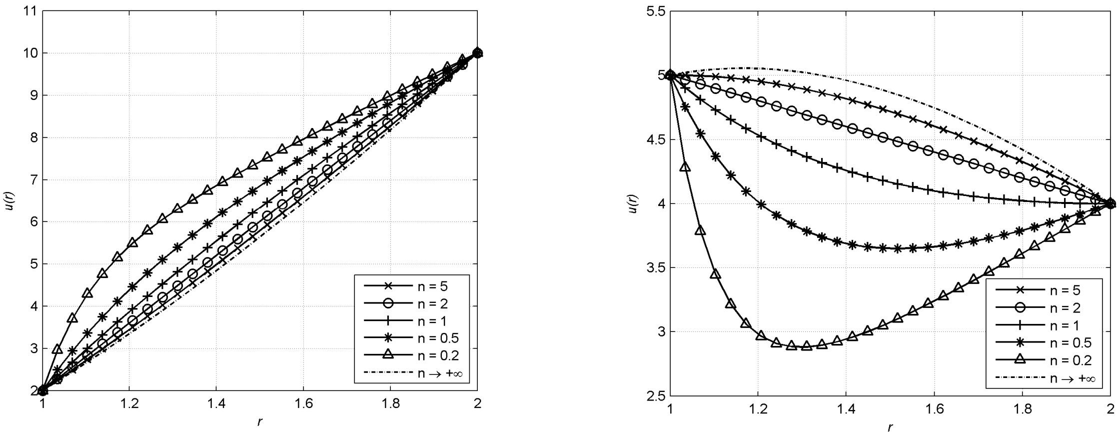
$$q=Ar^{-2/n}\,,$$

где $A=\dfrac{\mathrm{sign}(C)}{\lambda}\left(\dfrac{\lambda|C|}{\mu_0}\right)^{1/n}$. Далее, подставляя выражение $q=r\,\partial(u/r)/\partial r$, что следует из (7), получаем

$$u=Br-\frac{n}{2}Ar^{1-2/n}\,,$$

где значения для A и B определяются из граничных условий (5). В итоге

$$u(r)=\frac{{R_2}^{2/n}\omega_2-{R_1}^{2/n}\omega_1}{{R_2}^{2/n}-{R_1}^{2/n}}r-\frac{\left(R_1R_2\right)^{2/n}\left(\omega_2-\omega_1\right)}{{R_2}^{2/n}-{R_1}^{2/n}}r^{1-2/n}\,. \tag{9}$$



а) б)

Графики скорости $u(r)$ в зависимости от значений n : *а*) скорость внутреннего цилиндра меньше, чем внешнего, *б*) скорость внутреннего цилиндра больше, чем внешнего

На рисунке построены получившиеся графики скорости (9) в зависимости от n, откуда видно, что в большей степени непостоянность коэффициента вязкости влияет на жидкости, для которых $n<1$ (так называемые псевдопластики). Отметим, что при одинаковых скоростях цилиндров жидкость движется как целое с постоянной угловой скоростью.

Литература

1. Уилкинсон, У. Неньютоновские жидкости / У. Уилкинсон; под ред. А.В. Лыкова. – М.: Мир, 1964. – 216 с.

2. Серрин, Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин; под ред. Л.В. Овсянникова. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 256 с.

Поступила в редакцию 20 января 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics" 2015, vol. 7, no. 2, pp. 73–75

A STEADY-STATE FLOW OF A POWER-LAW FLUID BETWEEN ROTATING COAXIAL CYLINDERS

K.Z. Khayrislamov[1]

The author considers steady-state flow of viscous incompressible fluid between two coaxial infinite cylinders which rotate with constant angular velocity. It is assumed that fluid viscosity is variable and depends on straining rate defined by power law. Under the assumption that the fluid doesn't flow in radial and axial directions the author obtains the expression for azimuthal velocity component which generalizes the familiar formula of the fluid with constant viscosity.

Keywords: steady-state flow; viscous fluid; power-law fluid; non-Newtonian fluid.

References

1. Uilkinson U. *Nen'yutonovskie zhidkosti* (Non-Newtonian Fluids). Moscow, Mir Publ., 1964. 216 p. (in Russ.). [Wilkinson W.L. Non-Newtonian fluids; fluid mechanics, mixing and heat transfer. Pergamon Press, New York, 1960. 138 p.].

2. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* (Mathematical fundamentals of classical mechanics of fluids). Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1963. 256 p. (in Russ.). [Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959. 148 p.]

Received 20 January 2015

[1] Khayrislamov Kirill Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: haigh1510@gmail.com