УДК 517.95

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Т.К. Юлдашев[1]

Предлагается методика изучения разрешимости обратной задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. С помощью нелинейного метода характеристик, основанного на введение дополнительного параметра, задача Коши сводится к изучению системы для нелинейных интегральных уравнений. Для решения обратной задачи восстанавливаемые функции находятся из системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с помощью нелинейного интегрального преобразования.

Ключевые слова: обратная задача, система квазилинейных уравнений, дополнительный параметр, нелинейное интегральное преобразование, метод сжимающих отображений.

1. Постановка задачи. В области D рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A_1(t,x,u,\vartheta)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1(t,x,u,\vartheta,\sigma(t)), \quad u=u(t,x), \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}+A_2(t,x,u,\vartheta)\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}=f_2(t,x,u,\vartheta,\eta(t)), \quad \vartheta=\vartheta(t,x) \end{cases} \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)\big|_{t=t_0}=\varphi_1(x), \tag{2}$$

$$\vartheta(t,x)\big|_{t=t_0}=\varphi_2(x) \tag{3}$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x)\big|_{x=x_0}=\psi_1(t), \tag{4}$$

$$\vartheta(t,x)\big|_{x=x_0}=\psi_2(t), \tag{5}$$

где $A_i(t,x,u,\vartheta)\in C\left(D\times R^2\right)$, $f_i(t,x,u,\vartheta,\omega(t))\in C\left(D\times R^2\times\left[t_0;T\right]\right)$, $\omega(t)=(\sigma(t),\eta(t))$, $\dfrac{dt}{d\tau}=1,\dfrac{dx}{d\tau}=A_1(t,x,u,\vartheta)$, $\dfrac{dt}{d\tau}=1,\dfrac{dx}{d\tau}=A_2(t,x,u,\vartheta)$. τ $i=1,2$, $\sigma(t),\eta(t)\in C\left[t_0;T\right]$, $D\equiv\left[t_0;T\right]\times R$, $0<t_0<T<\infty$, $x_0\in R$, $R\equiv(-\infty;\infty)$.

Системы уравнений вида (1) встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точные (частные) решения квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка при конкретных случаях нелинейных функций, входящих в данное уравнение [1]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективным является метод, который позволяет заменить поставленную задачу эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

В данной работе изучается обратная задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений, где восстанавливаемые функции $\sigma(t)$, $\eta(t)$ находятся в нелинейной правой части данной системы уравнений. При решении обратной задачи (1)–(5) относительно восстанавливаемых функций получаем систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которую с помощью нелинейного интегрального преобразования сводим к специальному виду системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

---

[1] Юлдашев Турсун Камалдинович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, кафедра высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск
E-mail: tursunbay@rambler.ru

Отметим, что изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиография основных публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, приведена в [2, 3].

Определение. Решением обратной задачи (1)–(5) называется четверка непрерывных функций $\{u(t,x), \vartheta(t,x); \sigma(t), \eta(t)\}$, удовлетворяющая систему уравнений (1) и условиям (2)–(5).

2. Сведение задачи Коши (1)–(3) к системе нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим параметрическое задание характеристик как решения систем:

$$\frac{dt}{d\tau}=1, \ \frac{dx}{d\tau}=A_1(t,x,u,\vartheta), \tag{6}$$

$$\frac{dt}{d\tau}=1, \ \frac{dx}{d\tau}=A_2(t,x,u,\vartheta). \tag{7}$$

Изменение переменной τ перемещает точку с координатами t, x по характеристике. Интегрируя уравнения в (6) и (7) по τ, получаем:

$$x=p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta}), \quad x=p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta}),$$

где $p_i\,(i=\overline{1,2})$ определяются из следующих систем:

$$p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})=x-\int_\tau^t A_1(s,p_1,\bar{u},\bar{\vartheta})\,ds, \quad p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})=x-\int_\tau^t A_2(s,p_2,\bar{u},\bar{\vartheta})\,ds;$$

$$\bar{u}=\bar{u}(\tau,t,x)=\bar{u}\left(\tau,t,p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})\right), \quad \bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}(\tau,t,x)=\bar{\vartheta}\left(\tau,t,p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})\right).$$

Отсюда очевидно, что $\left[\begin{array}{l} \bar{u}(\tau,t,x)\big|_{t=\tau=t_0}=\varphi_1(x), \\ \bar{\vartheta}(\tau,t,x)\big|_{t=\tau=t_0}=\varphi_2(x). \end{array}\right.$ $\bar{\vartheta}(t,t,x)=\vartheta(t,x).$

Положим

$$f_i(t,x,u,\vartheta,\omega(t))\big|_{x=p_i(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=f_i\left(\tau,t,p_i,\bar{u},\bar{\vartheta},\omega(t)\right), i=1,2.$$

Тогда имеем

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau}=\frac{du}{d\tau}\bigg|_{x=p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\tau}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}\right)\bigg|_{x=p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}A_1(t,x,u,\vartheta)\right)\bigg|_{x=p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=f_1\left(\tau,t,p_1,\bar{u},\bar{\vartheta},\sigma(t)\right),$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau}=\frac{d\vartheta}{d\tau}\bigg|_{x=p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\frac{dt}{d\tau}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}\right)\bigg|_{x=p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=$$

$$=\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}A_2(t,x,u,\vartheta)\right)\bigg|_{x=p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})}=f_2\left(\tau,t,p_2,\bar{u},\bar{\vartheta},\eta(t)\right),$$

т.е. мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{d\tau}=f_1\left(\tau,t,p_1(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta}),\bar{u},\bar{\vartheta},\sigma(t)\right) \\ \dfrac{d\bar{\vartheta}}{d\tau}=f_2\left(\tau,t,p_2(\tau,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta}),\bar{u},\bar{\vartheta},\eta(t)\right) \end{cases}, \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\left[\begin{array}{l} \bar{u}(\tau,t,x)\big|_{t=\tau=t_0}=\varphi_1(x), \\ \bar{\vartheta}(\tau,t,x)\big|_{t=\tau=t_0}=\varphi_2(x). \end{array}\right. \tag{9}$$

Интегрируя (8) по τ и используя начальные условия (9), получаем:

$$\begin{cases} \bar{u}(\tau,t,x)=\bar{\Theta}_1\left(\tau,t,x;\bar{u},\bar{\vartheta}\right), \\ \bar{\vartheta}(\tau,t,x)=\bar{\Theta}_2\left(\tau,t,x;\bar{u},\bar{\vartheta}\right), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\bar{\Theta}_i\left(\tau,t,x;\bar{u},\bar{\vartheta}\right)\equiv\varphi_i\left(p_i(t_0,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})\right)+\int_{t_0}^{\tau}f_i\left(\theta,t,p_i(\theta,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta}),\bar{u},\bar{\vartheta},\omega(\theta)\right)d\theta,\ i=1,2.$$

При $\tau=t$ из (10) получаем следующую систему нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):

$$\begin{cases} u(t,x)=\Theta_1\left(t,x;u,\vartheta\right), \\ \vartheta(t,x)=\Theta_2\left(t,x;u,\vartheta\right), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\Theta_i\left(t,x;u,\vartheta\right)\equiv\varphi_i\left(p_i(t_0,t,x,u,\vartheta)\right)+\int_{t_0}^{t}f_i\left(s,x,u(s,x),\vartheta(s,x),\omega(s)\right)ds,\ i=1,2.$$

Теперь покажем, что СНИУ (11) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1) и начальным условиям (2)–(3).

Действительно, функции

$$\varphi_i\left(p_i(0,t,x,\bar{u},\bar{\vartheta})\right),\ i=1,2 \tag{12}$$

являются первыми интегралами системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A_1(t,x,u,\vartheta)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}+A_2(t,x,u,\vartheta)\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{13}$$

и они постоянны вдоль решений системы (13). Производные решений системы (13) вдоль характеристик равны нулю и функции (12) удовлетворяют системе (13). В самом деле, любые достаточно гладкие функции $\Phi_i(x),\ i=1,2$, постоянные вдоль характеристик системы (13), удовлетворяют ей.

СНИУ (11) удовлетворяет начальным условиям (2) и (3). Из этой СНИУ (11) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=f_1\left(t,x,u,\vartheta,\sigma(t)\right), \\ \dfrac{d\vartheta}{dt}=f_2\left(t,x,u,\vartheta,\eta(t)\right). \end{cases}$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{dx}{dt}.$$

Так как

$$\frac{dx}{dt}=A_1\left(t,x,u,\vartheta\right),\quad \frac{dx}{dt}=A_2\left(t,x,u,\vartheta\right),$$

то из последних четырех соотношений следует, что система уравнений (11) удовлетворяет системе уравнений (1).

Итак, мы доказали, что задача Коши (1)–(3) и система нелинейных интегральных уравнений (11) эквивалентны.

3. Сведение обратной задачи (1)–(5) к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

Используя условия (4) и (5) из системы (11) получаем два нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно неизвестных функций $\sigma(t),\ \eta(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} h_1(s,\sigma(s))\,ds = g_1(t), \tag{14}$$

$$\int_{t_0}^{t} h_2(s,\eta(s))\,ds = g_2(t), \tag{15}$$

где $h_i(s,\omega(s)) = f_i(s,x_0,\psi_1(s),\psi_2(s),\omega(s))$, $g_i(t) = \psi_i(t) - \varphi_i\left(x_0 - \int_{t_0}^{t} A_i(s,x_0,\psi_1(s),\psi_2(s))ds\right)$.

Кроме того, $g_i(t_0) = 0$, так как $\psi_i(t_0) = \varphi_i(x_0)$, $i = 1,2$.

Уравнения (14) и (15) с помощью классических методов невозможно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, к которому мы могли бы применять метод последовательных приближений и метод сжимающих отображений. Поэтому здесь применяем другую методику. Уравнение (14) запишем в виде

$$0 < M_{01} = \mathrm{const}, \tag{16}$$

где $0 < L_{01}(t) \in C[t_0;T]$; произвольная функция такая, что $\rho_{01} = \max_t\{P_1(t)\cdot Q(t)\} < 1$.

Применяя к (16) интегральное преобразование из [4, гл. 1], получаем

$$\sigma(t) = I_1(t;\sigma) \equiv \left\{\sigma(t) + \int_{t_0}^{t}[K(s)\sigma(s) - h_1(s,\sigma(s))]ds + g_1(t)\right\}\times$$
$$\times\exp(-\mu(t)) + \int_{t_0}^{t} K(s)\cdot\exp(-\mu(t,s))\cdot\{\sigma(t) - \sigma(s) + g_1(t) - g_1(s) +$$
$$+\int_{t_0}^{t}[K(s)\sigma(s) - h_1(s,\sigma(s))]ds - \int_{t_0}^{s}[K(\theta)\sigma(\theta) - h_1(\theta,\sigma(\theta))]d\theta\Bigg\}ds, \tag{17}$$

где $\mu(t,s) = \int_{s}^{t} K(\theta)\,d\theta$, $\mu(t,t_0) = \mu(t)$.

Аналогичным путем из (15) приходим к следующему уравнению:

$$\eta(t) = I_2(t;\eta) \equiv \left\{\eta(t) + \int_{t_0}^{t}[K(s)\eta(s) - h_2(s,\eta(s))]ds + g_2(t)\right\}\times$$
$$\times\exp(-\mu(t)) + \int_{t_0}^{t} K(s)\cdot\exp(-\mu(t,s))\cdot\{\eta(t) - \eta(s) + g_2(t) - g_2(s) +$$
$$+\int_{t_0}^{t}[K(s)\eta(s) - h_2(s,\eta(s))]ds - \int_{t_0}^{s}[K(\theta)\eta(\theta) - h_2(\theta,\eta(\theta))]d\theta\Bigg\}ds. \tag{18}$$

Уравнения (14) и (17) являются эквивалентными. Аналогично уравнения (15) и (18) также являются эквивалентными.

4. Разрешимость нелинейных интегральных уравнений (14) и (15)

Сначала изучаем разрешимости уравнения (14). Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} \sigma_0(t) = \left(\int_{t_0}^{t} h_1(s,0)ds + g_1(t)\right)\cdot\exp(-\mu(t)), \\ \sigma_{k+1}(t) = I_1(t;\sigma_k),\ k = 0,1,2,\dots . \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $h_1(t,\sigma(t))\in Bnd(M_{01})\cap Lip\left(L_{01}(t)|_{\sigma}\right)$, где $0<M_{01}=\text{const}$, $0<L_{01}(t)\in C\left[t_0;T\right]$;

2. $\rho_{01}=\max\limits_t\{P_1(t)\cdot Q(t)\}<1$, где

$$P_1(t)=1+\mu(t)+\int_{t_0}^{t}L_{01}(s)ds,\quad Q(t)=\exp(-\mu(t))\cdot\left\{1+2\int_{t_0}^{t}K(s)\cdot\exp(\mu(s))ds\right\}.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (14) имеет единственное решение на отрезке $[t_0;T]$.

Доказательство. Для произвольной непрерывной на отрезке $\left[t_0;T\right]$ функции $a(t)$ примем норму следующим образом: $\|a(t)\|=\max\limits_{t_0\le t\le l}|a(t)|$.

Пусть

$$\|\sigma_0(t)\|\le\left(M_{01}T+\|g_1(t)\|\right)\cdot\exp(-\mu(t))<1. \tag{20}$$

Тогда для разности

$$\sigma_1(t)-\sigma_0(t)=\left\{\sigma_0(t)+\int_{t_0}^{t}\left[K(s)\sigma_0(s)+h_1(s,0)-h_1(s,\sigma_0(s))\right]ds\right\}\exp(-\mu(t))+$$

$$+\int_{t_0}^{t}K(s)\exp(-\mu(t,s))\left\{\sigma_0(t)-\sigma_0(s)+\int_{t_0}^{t}\left[K(s)\sigma_0(s)+h_1(s,0)-h_1(s,\sigma_0(s))\right]ds-\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{s}\left[K(\theta)\sigma_0(\theta)+h_1(\theta,0)-h_1(\theta,\sigma_0(\theta))\right]d\theta\right\}ds,$$

в силу первого условия теоремы и оценки (20), получаем оценку

$$\left\|\sigma_1(t)-\sigma_0(t)\right\|\le\left\|\sigma_0(t)\right\|P_1(t)\,Q(t)\le\max_t\{P_1(t)\cdot Q(t)\}=\rho_{01}<1, \tag{21}$$

где $P_1(t)=1+\mu(t)+\int_{t_0}^{t}L_{01}(s)ds$, $\quad Q(t)=\exp(-\mu(t))\cdot\left\{1+2\int_{t_0}^{t}K(s)\cdot\exp(\mu(s))ds\right\}$.

Аналогично для произвольной разности приближения (19) имеем оценку

$$\left\|\sigma_{k+1}(t)-\sigma_k(t)\right\|\le\rho_{01}\left\|\sigma_k(t)-\sigma_{k-1}(t)\right\|<\left\|\sigma_k(t)-\sigma_{k-1}(t)\right\|.$$

Отсюда и из (21) следует, что оператор в правой части (17) является сжимающим и, следовательно, уравнение (14) имеет единственное решение на отрезке $[t_0;T]$.

Из интегрального уравнения (18) аналогично можно доказать, что справедлива и следующая

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $h_2(t,\eta(t))\in Bnd(M_{02})\cap Lip\left(L_{02}(t)|_{\eta}\right)$, где $0<M_{02}=\text{const}$, $0<L_{02}(t)\in C\left[t_0;T\right]$;

2. $\rho_{02}=\max\limits_t\{P_2(t)\cdot Q(t)\}<1$, где $P_2(t)=1+\mu(t)+\int_{t_0}^{t}L_{02}(s)ds$.

Тогда нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (15) имеет единственное решение на отрезке $[t_0;T]$.

Таким образом, мы определили функции $\sigma(t)$, $\eta(t)$ в правой части системы уравнений (1) из нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (14) и (15) соответственно.

5. Однозначная разрешимость системы нелинейных интегральных уравнений (11)

Так как уже определены функции $\sigma(t)$, $\eta(t)$, то теперь мы можем приступить к изучению разрешимости системы уравнений (11).

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\varphi_i(x) \in Bnd(\varphi_{0i}) \cap Lip\left(L_{1i|u,\vartheta}\right)$, где $0 < \varphi_{0i}$, $L_{1i} = \text{const}$, $i = 1,2$;

2) $f_i(x, u, \vartheta, \omega) \in Bnd(f_{0i}) \cap Lip\left(L_{2i|u,\vartheta}\right)$, где $0 < f_{0i}$, $L_{2i} = \text{const}$, $i = 1,2$;

3) $A_i(x, u, \vartheta) \in Lip\left(L_{3i|u,\vartheta}\right)$, где $0 < L_{3i} = \text{const}$, $i = 1,2$;

4) $\rho_1 < 1$, где $\rho_1 = \max\limits_t \left\{ L_{11} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{31}(s)ds + \int\limits_{t_0}^t L_{21}(s)ds \right\} + \max\limits_t \left\{ L_{12} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{32}(s)ds + \int\limits_{t_0}^t L_{22}(s)ds \right\}$.

Тогда система нелинейных интегральных уравнений (11) имеет единственное решение в области D.

Доказательство. Итерационный процесс Пикара для системы уравнений (14) определим следующим образом:

$$\begin{cases} u_0(t,x) = 0, \quad u_{k+1}(t,x) = \Theta_1\left(t, x; u_k, \vartheta_k\right), \\ \vartheta_0(t,x) = 0, \quad \vartheta_{k+1}(t,x) = \Theta_2\left(t, x; u_k, \vartheta_k\right), \; k = 0,1,2,\ldots \,. \end{cases} \tag{22}$$

Для произвольной функции $w(t,x)$ в пространстве непрерывных функций норму определим следующим образом:

$$\left\| w(t,x) \right\|_t = \max_{t_0 \le t \le T} \left| w(t,x) \right|,$$

где x играет роль параметра.

В силу первого условия теоремы для первого приближения из (22) имеем оценку

$$\left\| u_1 - u_0 \right\|_t \le \varphi_{01} + f_{01} \cdot T, \tag{23}$$

$$\left\| \vartheta_1 - \vartheta_0 \right\|_t \le \varphi_{02} + f_{02} \cdot T\,. \tag{24}$$

С учетом (23) и (24), в силу условий теоремы, для второго приближения из (22) получаем оценку

$$\left\| u_2 - u_1 \right\|_t \le L_{11} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{31}(s) \cdot \left(\left\| u_1 - u_0 \right\|_t + \left\| \vartheta_1 - \vartheta_0 \right\|_t \right) ds + \int\limits_{t_0}^t L_{21}(s) \cdot \left(\left\| u_1 - u_0 \right\|_t + \left\| \vartheta_1 - \vartheta_0 \right\|_t \right) ds \le$$

$$\le \left(\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T \right) \cdot \left(L_{11} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{31}(s)ds + \int\limits_{t_0}^t L_{21}(s)ds \right) < \left(\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T \right), \tag{25}$$

$$\left\| \vartheta_2 - \vartheta_1 \right\|_t \le L_{12} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{32}(s) \cdot \left(\left\| u_1 - u_0 \right\|_t + \left\| \vartheta_1 - \vartheta_0 \right\|_t \right) ds + \int\limits_{t_0}^t L_{22}(s) \cdot \left(\left\| u_1 - u_0 \right\|_t + \left\| \vartheta_1 - \vartheta_0 \right\|_t \right) ds \le$$

$$\le \left(\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T \right) \cdot \left(L_{12} \cdot \int\limits_{t_0}^t L_{32}(s)ds + \int\limits_{t_0}^t L_{22}(s)ds \right) < \left(\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T \right). \tag{26}$$

В силу условий теоремы для произвольного натурального числа $k > 1$ из (15) получим оценку

$$\left\| u_{k+1} - u_k \right\|_t \le L_{11} \int\limits_{t_0}^t L_{31}(s) \left(\left\| u_k - u_{k-1} \right\|_t + \left\| \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \right\|_t \right) ds + \int\limits_{t_0}^t L_{21}(s) \left(\left\| u_k - u_{k-1} \right\|_t + \left\| \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \right\|_t \right) ds,$$

$$\left\| \vartheta_{k+1} - \vartheta_k \right\|_x \le L_{12} \int\limits_{t_0}^t L_{32}(s) \left(\left\| u_k - u_{k-1} \right\|_t + \left\| \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \right\|_t \right) ds + \int\limits_{t_0}^t L_{22}(s) \left(\left\| u_k - u_{k-1} \right\|_t + \left\| \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \right\|_t \right) ds,$$

Отсюда получаем, что

$$\left\| W_{k+1}(t,x) - W_k(t,x) \right\|_t \le \rho_1 \left\| W_k(t,x) - W_{k-1}(t,x) \right\|_t < \left\| W_k(t,x) - W_{k-1}(t,x) \right\|_t, \qquad (27)$$

где $\left\| W_k - W_{k-1} \right\|_\lambda = \max\left\{ \left\| u_k - u_{k-1} \right\|_\lambda ; \left\| \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \right\|_\lambda \right\}$,

$$\rho_1 = \max_t \left\{ L_{11} \cdot \int_{t_0}^{t} L_{31}(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} L_{21}(s)\, ds \right\} + \max_t \left\{ L_{12} \cdot \int_{t_0}^{t} L_{32}(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} L_{22}(s)\, ds \right\}.$$

В силу оценок (25)–(27) следует, что согласно принципу Шаудера оператор в правой части (11) имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, система нелинейных интегральных уравнений (11) имеет единственное решение в области D.

Литература

1. Зайцев, В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка // В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
2. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач // А.М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 285 с.
3. Романов, В.Г. Обратные задачи для математической физики // В.Г. Романов. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
4. Юлдашев, Т.К. Нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения // Т.К. Юлдашев. – Ош: ОшГЮИ, 2010. – 107 с.

Поступила в редакцию 28 октября 2011 г.

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF QUAZILINEAR EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

T.K. Yuldashev[1]

A method of studying solubility of an inverse problem for the system of quasilinear differential equations in partial derivatives of the first order is offered. With the help of a nonlinear method of characteristics based on introduction of an additional parameter, a Cauchy problem is reduced to study the system of non-linear integral equations. For solution the inverse problem the restored functions are found from the system of Volterra non-linear integral equations of the first kind with the help of nonlinear integral transformation.

Keywords: inverse problem, system of quasilinear equations, additional parameter, nonlinear integral transformation, method of contracting mapping.

References

1. Zajjcev V.F., Poljanin A.D. *Spravochnik po differencial'nym uravnenijam s chastnymi proizvodnymi pervogo porjadka* (Handbook of differential equations with first-order partial). Moscow, Fizmatlit, 2003. 416 p. (in Russ.).
2. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriju obratnykh zadach* (Introduction to the theory of inverse problems). Moscow, MGU, 1994. 285 p. (in Russ.).
3. Romanov V.G. *Obratnye zadachi dlja matematicheskojj fiziki* (Inverse problems in mathematical physics). Moscow, Nauka, 1984. 264 p. (in Russ.).
4. Juldashev T.K. *Nelinejjnye integral'nye i integro-differencial'nye uravnenija* (Non-linear integral and integro-differential equations). Osh: OshGJuI, 2010. 107 p. (in Russ.).

[1] Yuldashev Tursun Kamaldinovich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Doctoral Candidate, Department of Higher Mathematics, Siberian state aerospace university, Krasnoyarsk
E-mail tursunbay@rambler ru