

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В НЕУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

О.С. Садаков<sup>1</sup>, С.И. Шульженко<sup>2</sup>

Свойства неупругой среды существенно зависят от скорости деформирования, однако прямая идентификация соответствующих реологических функций при скоростях движения ударных волн представляет сложную экспериментальную проблему. Один из путей ее решения – удар по торцу образца материала (стержня) с замером истории деформаций в нескольких сечениях. При этом кроме соответствующей экспериментальной установки необходимо иметь вычислительную программу с варьируемыми характеристиками материала, чтобы подобрать нужные параметры среды. В статье предлагается такая программа, использующая структурную модель материала. Приведены результаты расчетов для случаев упругой, упруго-пластической и упруговязкой среды.

*Ключевые слова:* скорость волны, неупругое деформирование, динамический расчет.

**1. Постановка задачи.** Известно, что после удара по телу из изотропного линейно-упругого материала в нем образуются две волны сжатия и сдвига, идущие с разной скоростью. Если удар произведен по торцу стержня, то через короткое время они вырождаются [1] в одну продольную волну, движущуюся со скоростью  $\sqrt{E/\rho}$  ( $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала). Полагая, что и в случае неупругого тела можно ограничиться анализом продольной волны, считая напряженное состояние одноосным. История напряжений в поперечных сечениях  $\sigma(x,t)$ , где  $x$  – расстояние от свободного торца стержня до рассматриваемого сечения,  $t$  – время, отсчитываемое от момента нанесения удара. Площадь сечения  $S$  будем считать постоянной. Смещение сечения описывается законом  $u(x,t)$ ; продольная деформация –

$$\varepsilon(x,t) = \frac{du(x,t)}{dx} = \frac{\sigma(x,t)}{E} + p(x,t), \quad (1)$$

где  $p(x,t)$  – нелинейная составляющая деформации, определяемая моделью реологических свойств.

**2. Матричная модель деформирования стержня.** Численное решение основывается на дискретизации задачи. В стержне выбираются  $N+1$  представительных поперечных сечений  $x_i = (i-1)\Delta$ ,  $\Delta = L/N$ ,  $L$  – длина стержня (рис. 1). Полагая, что в любой момент времени поле  $u(x)$  кусочно-линейно; соответственно поля  $\varepsilon(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $p(x)$  – кусочно-постоянны (рис. 2) и определяются матрицами  $\varepsilon, \sigma, p$  размерности  $N \times 1$ . Смещения границ участков представляют  $N$  обобщенных координат  $q_i$  (матрица-столбец  $q$ ); дифференцирование в выражении (1) приводит к матричному  $\varepsilon = Aq$ , где  $A$

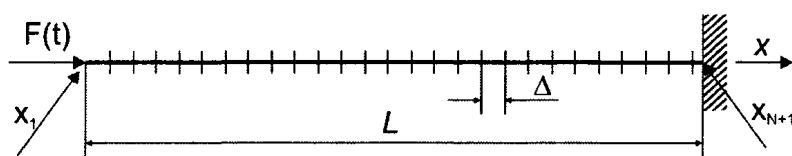


Рис. 1. Схема разбиения стержня

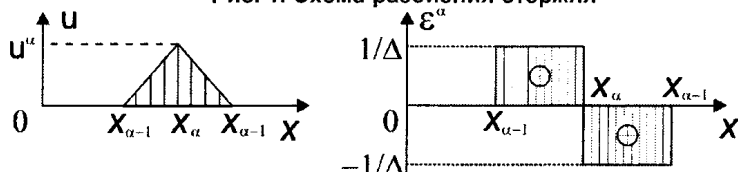


Рис. 2. Поля смещений и деформаций

– квадратная матрица с двумя ненулевыми диагоналями:  $A_{ii} = 1$ ,  $A_{i(i+1)} = 2$ ,  $i = 1..N$ . Физическое уравнение имеет вид

$$\sigma = C(\varepsilon - p), \quad (2)$$

где  $C = IE$ ,  $I$  – единичная матрица.

**3. Метод смещений.** Чтобы свести ошибку от дискретизации задачи к минимуму, условия равновесия

<sup>1</sup> Садаков Олег Сергеевич – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: os38@mail.ru

<sup>2</sup> Шульженко Сергей Иванович – доцент, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: shusi@inbox.ru

запишем, используя принцип возможных перемещений:

$$A^* = W^*, \quad (3)$$

где  $A^*$  – работа внешних сил на возможных смещениях,  $W^*$  – работа внутренних сил (напряжений), на соответствующих деформациях. Возможные смещения, согласно принятым допущениям, кусочно-линейны и определяются выражением

$$u^*(x, t) = U^\alpha(x) q_\alpha^*(t), \quad \alpha = 1..N, \quad (4)$$

где  $q_\alpha^*(t)$  – произвольные функции,  $U^\alpha(x)$  – базисные функции, вид которых показан на рис. 2.

Соответствующие базисные деформации  $\varepsilon^\alpha$  показаны там же.

Виртуальная работа внешних сил (включая силы инерции) определяется выражением

$$A^* = Fq_1^* + \int_L F_j(x) S u^*(x) dx, \quad (5)$$

где

$$F_j = \rho \ddot{u}(x), \quad \ddot{u}(x) = U^\beta(x) \ddot{q}_\beta(t)$$

(точками над функциями обозначены вторые производные по времени). Отсюда находится второе слагаемое в выражении (5):

$$\int_L F_j(x) S u^*(x) dx = -I_{\alpha\beta} q_\beta^* \ddot{q}_\alpha, \quad I_{\alpha\beta} = \int_L U^\alpha U^\beta \rho S dx. \quad (6)$$

Интеграл  $I_{\alpha\beta}$  от кусочно-линейной функции составляет квадратную трехдиагональную матрицу с коэффициентами 1, 2, 4 при общем множителе  $\Delta \rho S / 6$ .

Виртуальная работа внутренних сил  $W^*$  при кусочно-постоянных функциях напряжений  $\sigma = \sigma(x)$  и деформаций  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  представляет интеграл по объему стержня

$$W^* = \int_L \sigma \varepsilon^* S dx = [\sigma]^T [A][q^*] S \Delta. \quad (7)$$

Приравняв значения  $A^*$  и  $W^*$  (в выражении (3)), получим условие «равновесия»:

$$B\sigma = Q, \quad B = A^T S \Delta, \quad Q = kF - I\ddot{q}, \quad (8)$$

где столбец  $N$  обобщенных сил  $Q$  находится из обобщенных ускорений  $\ddot{q}$ , причем к первому элементу столбца  $Q$  добавляется сила  $F$  на торце ( $k = [1; 0; 0; \dots; 0]^T$ ).

Для нахождения неупругой деформации  $p$  используются соответствующие модели пластичности и/или ползучести. Время разбивается на расчетные интервалы  $dt$ , на каждом из которых (возможно после серии итераций) находятся приращения неупругой деформации  $dp$ , которые суммируются и определяют значения нового слагаемого  $p$  в уравнении (2).

**4. Расчет ускорений.** Для замыкания системы уравнений необходимо вычислять ускорения обобщенных координат  $\ddot{q}$  в выражениях (6) и (8). Для этой цели мы запоминаем три последних значения всех обобщенных координат  $q^{(0)} = q(t - 3dt)$ ,  $q^{(1)} = q(t - 2dt)$ ,  $q^{(2)} = q(t - dt)$ ,  $q^{(3)} = q(t)$  ( $t$  – актуальный момент времени). Предполагая, что закон движения описывается кубической параболой, находим

$$\ddot{q} = \lambda(2q + a); \quad a = 4q^{(1)} - 5q^{(2)} - q^{(0)}, \quad (9)$$

где  $\lambda = (dt)^{-2}$ .

**5. Разрешающее выражение.** Собирая матричную систему, получаем

$$Kq = kF - Ia\lambda + BCp, \quad (10)$$

где  $K = BCA + 2I\lambda$ ,  $B = A^T S \Delta$ .

**6. Организация итераций.** Запись условий равновесия и совместности деформаций в конечном виде (не в приращениях за шаг  $dt$ ) обладает устойчивостью к расчетным неточностям, поскольку нет накопления ошибок от суммирования значений  $d\sigma$ ,  $dq$ ,  $d\varepsilon$  при определении  $\sigma$ ,  $q$ ,  $\varepsilon$ . Однако, с другой стороны, в итерациях мы вынуждены суммировать величины  $p$  и  $dp$ ,

последние малы по сравнению со значениями  $p$ . Для повышения точности мы использовали следующий прием:

$$q = K^{-1}(kF - Ia\lambda) + BC(p + dp)E = q' + K^{-1}BCdpE.$$

Вначале находится матрица  $q' = K^{-1}(kF - Ia\lambda + BCpE)$ , не изменяющаяся в итерациях ( $p$  – значение, накопленное к началу шага), далее находится  $\varepsilon' = Aq'$ , а затем в итерациях отыскиваются  $dp$  и добавка  $dq' = K^{-1}BCdpE$ , имеющие примерно один порядок.

**7. Тестовые расчеты.** Для проверки правильности работы алгоритма была создана вычислительная программа и проведены расчеты для двух случаев распространения ударной волны в модельном материале. Первый расчет – это распространение упругой волны напряжений в материале, обладающем следующими свойствами: модуль упругости материала  $E = 2500$  Па, плотность  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Удар произведен по стержню длиной  $L = 75$  м, площадью поперечного сечения  $S = 1$  м<sup>2</sup> разбитом на 500 участков. Импульс представлял собой сжатие со скоростью 8,33 м/с до  $-2,5$  Н и разгрузку до нулевой силы с такой же скоростью. Численный расчет производился по приведенной выше методике с шагом по времени равным 0,001 с. Поскольку сохранять все данные расчета не рационально ввиду их большого объема, запоминалось положение упругой волны через 200 шагов по времени. Остановка расчета производилась при достижении упругой волны конца стержня, при этом запоминалось время окончания счета. В данном примере время окончания счета  $t_c = 1,5$  с. Скорости распространения упругой волны в стержне в численном расчете и по известному теоретическому решению [1] совпадают ( $v = L/t_c = \sqrt{E/\rho} = 50$  м/с). На рис. 3 представлены результаты

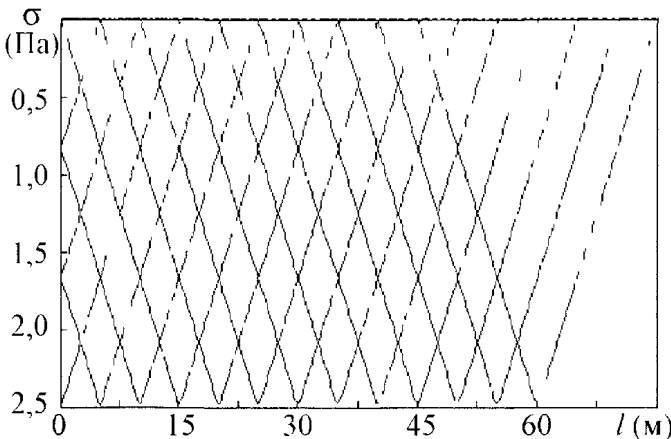


Рис. 3. Волна напряжений в упругом стержне

расчета положения волны напряжений через 0,2 с; видно, что движение волны происходит с постоянной скоростью, форма импульса сохраняется, накопление ошибок от дискретизации невелико.

Второй тестовый расчет представлял собой распространение волны напряжения в упрочняющемся материале, обладающем следующими свойствами: модуль упругости материала  $E = 2500$  Па, плотность  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, предельная упругая деформация  $\varepsilon_T = 0,001$ . Модуль упрочнения материала  $E_1$  в четыре раза меньше модуля упругости. Нагружающий импульс представлял собой сжатие со скоростью 6,67 м/с до усилия 2 Н, выдержку с постоянным усилием 0,3 с и разгрузку с такой же скоростью. Диаграмма деформирования материала представлена на рис. 4. Два положения волны напряжений представлены на рис. 5. Кривая 1–5–4 (рис. 5) иллюстрирует положение волны напряжений в момент времени 0,7 с, а кривая 2–3–6 – в момент времени 1,2 с.

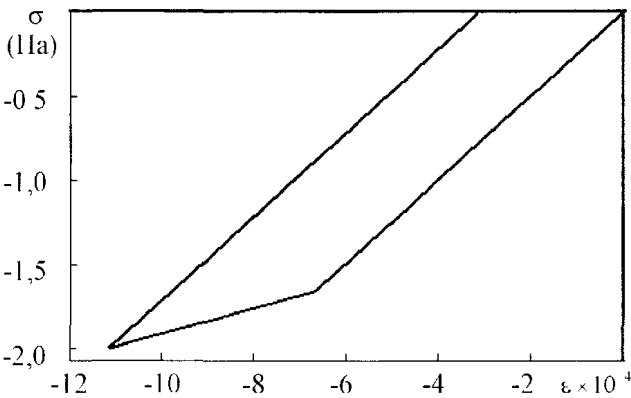


Рис. 4. Диаграмма деформирования упрочняющегося материала

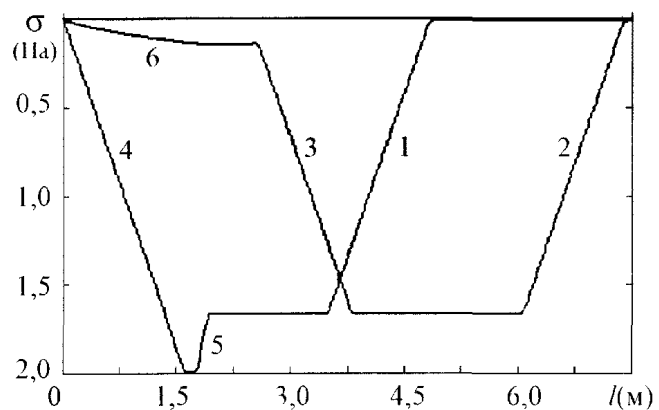


Рис. 5. Волна напряжений в упругопластическом материале

Второй тестовый расчет представлял собой распространение волны напряжения в упрочняющемся материале, обладающем следующими свойствами: модуль упругости материала  $E = 2500$  Па, плотность  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, предельная упругая деформация  $\varepsilon_T = 0,001$ . Модуль упрочнения материала  $E_1$  в четыре раза меньше модуля упругости. Нагружающий импульс представлял собой сжатие со скоростью 6,67 м/с до усилия 2 Н, выдержку с постоянным усилием 0,3 с и разгрузку с такой же скоростью. Диаграмма деформирования материала представлена на рис. 4. Два положения волны напряжений представлены на рис. 5. Кривая 1–5–4 (рис. 5) иллюстрирует положение волны напряжений в момент времени 0,7 с, а кривая 2–3–6 – в момент времени 1,2 с.

Результаты расчета по разработанной модели совпадают с известными теоретическими решениями. Так на этапе выдержки существует волна пластической деформации (участок 5), скорость которой  $v_{pl} = \sqrt{E_p / \rho}$  по решениям, представленным в [2] и [3]. Для модельного материала, у которого  $E/E_p = 4$ , скорость пластической волны в два раза меньше скорости упругой волны. Решение, полученное по нашей модели, дает такое же соотношение скоростей. Пластическая волна (участок 5 на рис. 5) распространяется со скоростью, в два раза меньшей скорости упругой волны. После окончания этапа выдержки пластическая волна исчезает и пропущенный образцом импульс соответствует кривой 2–3–6. Кривая 3 – импульс, связанный с движением свободного конца стержня после разгрузки. Скорость движения свободного конца равна скорости распространения упругой волны ( $v = \sqrt{E/\rho}$ ) и, таким образом свободный конец «догоняет» фронт пластической волны и вызывает напряжения сжатия. Подобный результат был получен в работе [3].

Таким образом, разработанная модель корректно отражает процесс распространения волн напряжений в упругих и неупругих стержнях и может быть использована для идентификации свойств материала при динамическом воздействии.

### Литература

1. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; пер. с англ.; под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 560 с.
2. Рахматуллин, Х.А. О распространении плоских упругопластических волн / Х.А. Рахматуллин, Г.С. Шапиро // ПММ. – 1948. – Т. 12, Вып. 4. – С. 369–374.
3. Кольский, Г. Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский; пер. с англ. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 192 с.

Поступила в редакцию 6 марта 2012 г.

## NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS AND DISTORTION WAVES IN NON-ELASTIC ROD

O.S. Sadakov<sup>1</sup>, S.I. Shulzhenko<sup>2</sup>

The properties of non-elastic media depend on the deformation rate, though the direct identification of relevant rheological functions at rates of the shock waves is a challenging experimental problem. One of the ways of its solution is a blow on the butt end of the material sample (a rod) and measuring the history of its deformation in several sections. Besides the appropriate experimental arrangement, there should be a calculating program with variable characteristics of the material to choose suitable media parameters. Such program using the structural model of the material is offered in the article. The calculated results for the cases of elastic, elastoplastic and elastoviscous media are given.

*Keywords: wave speed, non-elastic deformation, numerical dynamic analysis.*

### References

1. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teorija uprugosti* (Theory of Elasticity). Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, 1979. 560 p. (in Russ.).
2. Rakhmatullin Kh.A., Shapiro G.S. O rasprostranenii ploskikh uprugoplasticheskikh voln (On the propagation of elastic waves of plane). *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1948. Vol. 12, no. 4. pp. 369–374. (in Russ.).
3. Kol'skiij G. *Volny napryazhenija v tverdykh telakh* (Stress Waves in Solids). Moscow, Izd.-vo inostrannoy literatury, 1955. 190 p. (in Russ.). [Kolsky H. *Stress Waves in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p.]

<sup>1</sup> Sadakov Oleg Sergeevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South-Ural State University.

E-mail: os38@mail.ru

<sup>2</sup> Shulzhenko Sergey Ivanovich is Associate Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South-Ural State University.

E-mail: shust@mail.ru