УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

Н.Д. Иванова[1], *В.Е. Федоров*[2]

Исследована краевая задача с нелокальными по времени условиями для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля. Получены необходимое и достаточное условия существования и единственности классического и обобщенного решений этой задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача; краевая задача; система уравнений фазового поля; классическое решение; обобщенное решение.

Введение

В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ рассмотрим линеаризованную систему уравнений фазового поля

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)+l\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)=\kappa\Delta v(x,t)+g_1(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{1}$$

$$\Delta w(x,t)+\alpha w(x,t)+\beta v(x,t)+g_0(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{2}$$

в которой для двухфазной среды связываются температура v относительно температуры равновесия между фазами и фазовая функция w. В предположении нулевого времени релаксации эта система уравнений описывает фазовые переходы первого рода [1, 2]. Здесь l – скрытая теплота, κ – коэффициент теплопроводности, g_1 – функция внешнего теплового источника, константы α, β и функция g_0 определяются соотношением фазового поля, вводимым на основе теории фазовых переходов.

Снабдим задачу нелокальными условиями по времени

$$\int_0^T v(x,t)\eta(t)dt=v_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$\int_0^T w(x,t)\eta(t)dt=w_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{4}$$

и граничными условиями при $\theta\in\mathbb{R}$

$$\theta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)v(x,t)=\theta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)w(x,t)=0,\ \ (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]. \tag{5}$$

Нелокальная задача в банаховом пространстве

Рассмотрим сначала нелокальную задачу

$$\int_0^T u(t)\eta(t)dt=u_0 \tag{6}$$

для вырожденного эволюционного уравнения в банаховом пространстве

$$Lu'(t)=Mu(t)+g(t),\ \ t\in[0,T]. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – банаховы пространства, $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{V})$ (т.е. линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$), $\ker L\neq\{0\}$, $M\in Cl(\mathcal{U};\mathcal{V})$ (т.е. линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{U}$, действующий в $\mathcal{V}$ оператор), $g:[0,T]\to\mathcal{V}$. Введем обозначения

$$\rho^L(M)=\left\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{V})\right\},\quad \sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M),$$

[1] Иванова Наталья Дмитриевна – аспирант, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

[2] Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: kar@csu.ru

$$R_{\mu}^{L}(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_{\mu}^{L}(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Определение 1. *Пусть* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Оператор M называется сильно* (L, p)*-радиальным, если*

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \quad (a, +\infty) \subset \rho^{L}(M)$;

(ii) $\exists K > 0 \quad \forall \mu \in (a, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\left\|(R_{\mu}^{L}(M))^{n(p+1)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \left\|(L_{\mu}^{L}(M))^{n(p+1)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}\right\} \le \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) *существует плотный в* $\mathcal{V}$ *линеал* $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ *такой, что при любом* $\mu \in (a, +\infty)$

$$\| M(\mu L - M)^{-1}(L_{\mu}^{L}(M))^{p+1} f \|_{\mathcal{V}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \qquad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{V}};$$

(iv) $\| (R_{\mu}^{L}(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{U})} \le \dfrac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$ *при любом* $\mu \in (a, +\infty)$.

Замечание 1. Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – рефлексивные банаховы пространства, то выполнение условия (iii) следует из выполнения условий (i), (ii), (iv).

Положим $\mathcal{U}^0 = \ker(\mathrm{R}_{\mu}^{L}(M))^{p+1}$, $\mathcal{V}^0 = \ker(L_{\mu}^{L}(M))^{p+1}$; $\mathcal{U}^1$ – замыкание образа оператора $\mathrm{im}(R_{\mu}^{L}(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}^1$ – замыкание образа $\mathrm{im}(L_{\mu}^{L}(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathcal{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ ($D(M_k) = D(M) \cap \mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 [3]. *Пусть оператор M сильно* (L, p)*-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{V}^k)$, $M_k \in Cl(\mathcal{U}^k; \mathcal{V}^k)$, $k=0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{V}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^1; \mathcal{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше p*;

(v) *существует разрешающая уравнение* $Lu'(t) = Mu(t)$ *вырожденная сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \ge 0\}$;

(vi) *оператор* $L_1^{-1}M_1$ *порождает* C_0*-непрерывную полугруппу операторов* $\{U_1(t) = U(t)|_{\mathcal{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1) : t \ge 0\}$.

Обозначим проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$ через P и проектор вдоль $\mathcal{V}^0$ на $\mathcal{V}^1$ через Q.

Определим *характеристическую функцию* нелокальной задачи (6)

$$\chi(z) = \int_0^T e^{zt}\eta(t)dt, \tag{8}$$

которая, как известно [4], является целой.

Следуя работе [5], в случае сильно (L, p)-радиального оператора M *обобщенным решением* уравнения (7) будем называть функцию

$$u(t) = U(t)v + \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)$$

при $Qf \in C([0,T];\mathcal{V})$, $(I-Q)f \in C^p([0,T];\mathcal{V})$ для любого $v \in \mathcal{U}$.

Функция $u \in C^1([0,T];\mathcal{U}) \cap C([0,T];D(M))$ называется *классическим решением* уравнения (7), если для нее выполняется равенство (7). Классическим (обобщенным) решением задачи (6), (7) называется классическое (обобщенное) решение уравнения (7), если для него выполняется условие (6).

Теорема 2 [5]. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *оператор M сильно* (L, p)*-радиален и непрерывно обратим;*

(ii) $\eta \in C^1[0,T],\ \ \eta(0) \neq 0;$

(iii) *ни один нуль характеристической функции* χ *не принадлежит* L*-спектру* $\sigma^L(M)$ *оператора M*;

(iv) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T];D(M)),\ \ (I-Q)f \in C^p([0,T];\mathcal{V});$

(v) $(I-P)u_0 = -\int\limits_0^T \sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\eta(t)dt.$

Тогда

(i) *для* $Pu_0 \in D(M_1)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in C([0,T];\mathcal{U})$ *задачи* (6), (7), *при этом*

$$\|u\|_{C([0,T];\mathcal{U})} \le C\left(\|MPu_0\|_{\mathcal{V}} + \left\|L_1^{-1}Qf\right\|_{C([0,T];D(M))} + \|(I-Q)f\|_{C^p([0,T];\mathcal{V})}\right),$$

где константа C *не зависит от* u_0 *и* f;

(ii) *если* $Pu_0 \in \mathcal{U}^1 \setminus D(M_1)$, *то не существует обобщенного решения задачи* (6), (7);

(iii) *при* $L_1^{-1}Qf \in C([0,T];D((L_1^{-1}M_1)^2)),\ \ (I-Q)f \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{V}),\ \ \eta \in C^2[0,T],$ *обобщенное решение задачи* (6), (7) *является классическим тогда и только тогда, когда* $Pu_0 \in D((L_1^{-1}M_1)^2)$.

Редукция исходной задачи к общему случаю

Вернемся к задаче (1)–(5). Положим $\mathcal{U} = \mathcal{V} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \qquad M = \begin{pmatrix} \kappa\Delta & 0 \\ \beta & \alpha+\Delta \end{pmatrix} \in Cl(\mathcal{U}),$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} v(\cdot,t) \\ w(\cdot,t) \end{pmatrix},\ t \ge 0, \qquad f = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_0 \end{pmatrix},$$

$$H_\theta^2(\Omega) = \left\{ y \in H^2(\Omega) : \left(\theta\frac{\partial}{\partial n} + 1 - \theta\right) y(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \right\},\ \ D(M) = (H_\theta^2(\Omega))^2,$$

$$H_\theta^4(\Omega) = \left\{ y \in H^4(\Omega) : \theta\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k y(x) + (1-\theta)\Delta^k y(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ k = 0,1 \right\}.$$

Рассмотрим оператор $Ay = \Delta y,\ \ D(A) = H_\theta^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot,\cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора *A*, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 3. *Пусть* $-\alpha + \beta l \notin \sigma(A),\ \ \kappa > 0.$ *Тогда M – сильно* $(L,0)$*-радиальный оператор.*

Доказательство. Используя разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и обозначение $\delta_k = \dfrac{\kappa\lambda_k(\alpha+\lambda_k)}{\alpha - \beta l + \lambda_k}$, получим операторы

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu - \kappa\Delta & \mu l \\ -\beta & -\alpha - \Delta \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-\alpha-\lambda_k)\langle \cdot,\varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{-\mu l\langle \cdot,\varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\beta\langle \cdot,\varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\mu-\kappa\lambda_k)\langle \cdot,\varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{U}),$$

$$R_\mu^L(M)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)}\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{U}),$$

$$L_\mu^L(M)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\delta_k} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{-\kappa\lambda_k l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{V}),$$

$$R_\mu^L(M)(\mu L-M)^{-1}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)(-\kappa\lambda_k)l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)^2(\mu-\delta_k)^2}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)(\mu-\delta_k)^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta(-\kappa\lambda_k)l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)^2(\mu-\delta_k)^2}\end{pmatrix}.$$

В условиях теоремы $a=\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\delta_k<+\infty$,

$$\min_{k\in\mathbb{N}}\left|-\alpha+\beta l-\lambda_k\right|>0,\ \max_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{-\alpha-\lambda_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\right|<\infty,\ \max_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{-\kappa\lambda_k l}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\right|<\infty,\ \max_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{-\kappa\lambda_k l}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)^2}\right|<\infty,$$

$$\max_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{(-\alpha-\lambda_k)(-\kappa\lambda_k)l}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)^2}\right|<\infty,\quad \max_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{\beta}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\right|<\infty.$$

Следовательно, существует $K>0$, такое, что для всех $\mu>a$,

$$\max\left\{\|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})},\|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}\right\}\le\frac{K}{\mu-a},\qquad \|R_\mu^L(M)(\mu L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{U})}\le\frac{K}{(\mu-a)^2}.$$

Таким образом, с учетом гильбертовости пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, в рассматриваемой задаче оператор M сильно (L,p)-радиален (см. замечание 1). •

Полугруппа системы может быть найдена по формуле [3] $U(t)=s-\lim\limits_{n\to\infty}\left((n/t)R_{n/t}^L(M)\right)^n$.

Имеем

$$\left((n/t)R_{n/t}^L(M)\right)^n=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(n/t)^n(-\alpha-\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)\left(\dfrac{n}{t}-\delta_k\right)^n} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(n/t)^n(-\alpha-\lambda_k)l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)\left(\dfrac{n}{t}-\delta_k\right)^n}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(n/t)^n\beta\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)\left(\dfrac{n}{t}-\delta_k\right)^n} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(n/t)^n\beta l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-\alpha+\beta l-\lambda_k)\left(\dfrac{n}{t}-\delta_k\right)^n}\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$U(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}(-\alpha-\lambda_k)}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}(-\alpha-\lambda_k)l}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}\beta}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}\beta l}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\end{pmatrix}.$$

Следуя работе [5], обобщенным решением задачи (1)–(5) будем называть вектор-функцию

$$U(t)\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}(-\alpha-\lambda_k)}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle y,\varphi_k\rangle\varphi_k+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}(-\alpha-\lambda_k)l}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle z,\varphi_k\rangle\varphi_k\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}\beta}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle y,\varphi_k\rangle\varphi_k+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\delta_k t}\beta l}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\langle z,\varphi_k\rangle\varphi_k\end{pmatrix}$$

при произвольных $y, z \in L_2(\Omega)$. Классическое решение ищется в классе пар функций, каждая из которых лежит в $C^1([0,T];\mathrm{L}_2(\Omega)) \cap C([0,T];\mathrm{H}^2_\theta(\Omega))$. Обобщенное решение является классическим, если $y, z \in H^2_\theta(\Omega)$, классическое обобщенным является всегда [4, 5].

Проекторы P и Q имеют вид

$$P = s-\lim_{\mu\to\infty}\left(\mu R^L_\mu(M)\right)^2 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha-\lambda_k)l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k} \end{pmatrix},$$

$$Q = s-\lim_{\mu\to\infty}\left(\mu L^L_\mu(M)\right)^2 = \begin{pmatrix} I & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{-\kappa\lambda_k l\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{U}^0 = \ker P = \left\{(v,w)\in (L_2(\Omega))^2 : v = -lw\right\},$$

$$\mathcal{U}^1 = imP = \left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\alpha-\lambda_k)\langle v+lw,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}, \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta\langle v+lw,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\right) : (v,w)\in (L_2(\Omega))^2\right\},$$

$$\mathcal{V}^0 = \ker Q = \left\{(v,w)\in (L_2(\Omega))^2 : v = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\kappa\lambda_k l\langle w,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\right\},\ \mathcal{V}^1 = imQ = L_2(\Omega)\times\{0\}.$$

Сформулируем теорему о разрешимости задачи (1)–(5).

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) $0,\ -\alpha,\ -\alpha+\beta l \notin \sigma(A),\ \kappa > 0$;

(ii) $\eta \in C^1[0,T],\ \eta(0)\neq 0$;

(iii) $\chi\left(\dfrac{\kappa\lambda_k(\alpha+\lambda_k)}{\alpha-\beta l+\lambda_k}\right)\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$;

(iv) $g_1 \in C([0,T];H^2_\theta(\Omega)),\ g_0 \in C([0,T];H^2_\theta(\Omega))$;

(v) $\kappa\Delta v_0 = -\int\limits_0^T\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\kappa\lambda_k l\langle g_0(\cdot,t),\varphi_k\rangle\varphi_k}{-\alpha+\beta l-\lambda_k}\eta(t)dt,\ \beta v_0(x)+(\alpha+\Delta)w_0(x) = -\int\limits_0^T g_0(x,t)\eta(t)dt.$

Тогда

(i) *для* $v_0 + lw_0 \in H^2_\theta(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(5), *при этом*

$$\|v\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \|w\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} \le C\left(\|v_0+lw_0\|_{H^2(\Omega)} + \|g_1\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|g_0\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}\right),$$

где C не зависит от $v_0,\ w_0,\ g_1,\ g_0$;

(ii) *если* $v_0 + lw_0 \in L_2(\Omega)\setminus H^2_\theta(\Omega)$, *то не существует ни одного обобщенного решения задачи* (1)-(5);

(iii) *при* $g_1\in C([0,T];H^4_\theta(\Omega)),\ g_0\in C([0,T];H^4_\theta(\Omega)),\ \eta\in C^2[0,T]$ *обобщенное решение задачи* (1)–(5) *является классическим тогда и только тогда, когда* $v_0 + lw_0 \in H^4_\theta(\Omega)$.

Доказательство. Согласно теореме 3, оператор M сильно $(L,0)$-радиален, при этом δ_k – точки его L-спектра. Поэтому из условия $0,\ -\alpha\notin\sigma(A)$ следует, что $\delta_k\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$, и оператор M непрерывно обратим.

Учитывая полученные формулы для проекторов и условия данной теоремы на функции g_1, g_0, v_0, w_0, нетрудно заметить, что и остальные условия теоремы 2 выполняются. •

Литература

1. Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 461–471.

2. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.

3. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, № 3. – С. 173–200.

4. Тихонов, И.В. Нелокальная задача с «периодическим» интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И.В. Тихонов // Интегральные преобразования и специальные функции. – 2004. – Т. 4, № 1. – С. 49–69.

5. Федоров, В.Е. Нелокальная по времени задача для неоднородных эволюционных уравнений / В.Е. Федоров, Н.Д. Иванова, Ю.Ю. Федорова // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 4. – С. 882–897.

Поступила в редакцию 6 апреля 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 3, pp. 10–15

TIME NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LINEARIZED PHASE FIELD EQUATIONS SYSTEM

***N.D. Ivanova*[1], *V.E. Fedorov*[2]**

A boundary value problem with nonlocal time conditions is analyzed for a linearized quasi-steady system of phase field equations. Necessary and sufficient conditions are obtained for the existence and uniqueness of classical and generalized solutions.

Keywords: nonlocal problem; boundary value problem; system of phase field equations; classical solution; generalized solution.

References

1. Plotnikov P.I., Starovoytov V.N. Zadacha Stefana s poverkhnostnym natyazheniem kak predel modeli fazovogo polya (Stefan Problem with Surface Tension as the Limit of the Phase-field Model). *Differential Equations.* 1993. Vol. 29, no. 3. pp. 395–404. (in Russ.).

2. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. Phase-field Equations and Gradient Flows of Marginal Functions. *Siberian Mathematical Journal.* 2001. Vol. 42, no. 3. pp. 551–567. DOI:10.1023/A:1010431411758

3. Fedorov V.E. Degenerate strongly continuous semigroups of operators. *St. Petersburg Mathematical Journal.* 2001. Vol. 12, no. 3. pp. 471–489.

4. Tikhonov I.V. Nelokalnaya zadacha s "periodicheskim" integralnym usloviem dlya differentsialnogo uravneniya v banakhovom prostranstve (Nonlocal problem with a "periodical" integral condition for a differential equation in Banach space). *Integralnye preobrazovaniya i spetsialnye funktsii.* 2004. Vol. 4, no. 1. pp. 49–69. (in Russ.).

5. Fedorov V.E., Ivanova N.D., Fedorova Yu.Yu. On a time nonlocal problem for inhomogeneous evolution equations. *Siberian Mathematical Journal.* 2014. Vol. 55, no. 4. pp. 721–733. DOI: 10.1134/S0037446614040144.

Received 6 April 2015

[1] Ivanova Natalia Dmitrievna is Post-graduate Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

[2] Fedorov Vladimir Evgenievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: kar@csu.ru