УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Н.А. Манакова[1]

Исследуется оптимальное управление решениями задачи Дирихле–Шоуолтера–Сидорова для системы уравнений движения жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка, которую принято называть системой уравнений Осколкова. Рассмотрен случай вырожденного уравнения. Доказано существование глобального по времени единственного слабого обобщенного решения исследуемой модели в пространстве соленоидальных функций. Проведена редукция рассматриваемой модели к задаче Шоуолтера–Сидорова для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа. Доказана теорема существования оптимального управления слабыми обобщенными решениями задачи Шоуолтера–Сидорова для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа. Полученные абстрактные результаты применены к модели Осколкова.

Ключевые слова: система уравнений Осколкова; задача оптимального управления; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}_+$ рассмотрим систему уравнений движения жидкости Кельвина–Фойгта, которую принято называть системой уравнений Осколкова

$$(1-\kappa\nabla^2)x_t = \nu\nabla^2 x - (x\cdot\nabla) - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla\cdot x) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{p} = \nabla p$ – градиент давления; вектор-функция $x = x(s,t) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор скорости жидкости; $u = u(s,t) = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор объемных внешних сил, характеризующий внешнее управляемое воздействие; коэффициент системы $\kappa^{-1} \ge \lambda_1$ – время ретардации, характеризующее упругие свойства жидкости (λ_1 – наименьшее собственное значение спектральной задачи $-\nabla^2 x + \nabla p = \lambda x, \nabla\cdot x = 0, x|_{\partial\Omega} = 0$ в области Ω); $\nu \in \mathbf{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости, характеризующий вязкие свойства жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка. Система уравнений (1) с условием Коши–Дирихле рассматривалась в работах А.П. Осколкова [1, 2] в случае $\kappa^{-1} > \lambda_1$, и в них было показано существование единственного глобального по времени решения в слабом смысле. Систему (1) можно рассматривать как предельный случай системы

$$(1-\kappa\nabla^2)x_t = \nu\nabla^2 x - (x\cdot\nabla) - \nabla p + u, \quad \varepsilon p_t = -\nabla\cdot x, \tag{2}$$

моделирующей динамику слабосжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина – Фойгта. Подействовав на второе уравнение в (2) оператором ∇ и сделав замену $\mathbf{p} = \nabla p$, положив $\varepsilon = 0$, придем к системе (1). Как было отмечено в работе [3], несмотря на то, что оператор ∇ имеет ядро, натянутое на константу, мы не получим в задаче Дирихле–Шоуолтера–Сидорова

$$x(s,t) = 0, (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$(1-\kappa\nabla^2)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, s \in \Omega, \tag{4}$$

для системы (1) новых решений по сравнению с задачей (2), (3), (4) при $\varepsilon = 0$, благодаря краевому условию (3). В различных аспектах система уравнений Осколкова изучалась в работах Г.А. Свиридюка и его учеников [3, 4]. Исследование начально-краевых задач для моделей динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка были продолжены в [5]. В работе М.О. Корпусова, А.Г. Свешникова [6] рассмотрен вопрос разрушения решения системы уравнений Осколкова с кубическим источником в классе слабых обобщенных решений.

[1] Манакова Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: manakovana@susu.ac.ru

В подходящим образом подобранных функциональных пространствах редуцируем задачу (1), (3), (4) к задаче Шоуолтера–Сидорова

$$L(x(0)-x_0)=0 \qquad (5)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}+Mx+B(x,x)=u. \qquad (6)$$

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x,u)\to\inf, u\in U_{ad}, \qquad (7)$$

решениями задачи (5), (6). Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u\in U_{ad}$, где U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений U. Задача оптимального управления для линейного уравнения соболевского типа с условием Коши рассматривалась в монографии [7]. В работе [8] было показано, что рассмотрение условия Шоуолтера–Сидорова (5) для уравнений соболевского типа позволяет уйти от феномена несуществования решения задачи Коши при произвольных начальных данных и позволяет значительно упростить численные алгоритмы нахождения приближенных решений [9]. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа с s-монотонным и p-коэрцитивным оператором рассматривались в [10]. Целью данной работы является исследование существования оптимального управления (7) решениями задачи (1), (3), (4) в классе слабых обобщенных решений в пространстве соленоидальных функций.

1. Существование нелокального слабого обобщенного решения

Пусть $H=(H;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; (A,A^*) – дуальная (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пара рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$A\subset H\subset A^* \qquad (8)$$

плотны и непрерывны, а вложение $A\subset H$ компактно. Пусть $L\in\mathrm{L}(A;A^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле H) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве A; $M\in\mathrm{L}(A;A^*)$ – линейный, непрерывный, 2-коэрцитивный оператор (т.е. $\exists C^M, C_M>0,$ такие, что $\langle Mx,x\rangle\geq C_M\|x\|_A^2$ и $\|Mx\|_{A^*}\leq xC^M\|x\|_A^2$ $\forall x\in A$); билинейный непрерывный оператор $B:A\times A\to A^*$ такой, что $|<B(x,y),z>|\leq C^B\|x\|_A\|y\|_A\|z\|_A$ $\forall x,y,z\in A$; $<B(x,y),z>=-<B(x,z),y>$ $\forall x,y,z\in A$; $<B(y,x),x>=0$ $\forall y,x\in A$.

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $A\supset\ker L\equiv\operatorname{coker}L\subset A^*$. Поскольку $\operatorname{coker}L$ конечномерно, то $A^*=\operatorname{coker}L\oplus\operatorname{im}L$. Значит, существует проектор Q вдоль $\operatorname{coker}L$ на $\operatorname{im}L$. Введем в рассмотрение множество

$$coim\,L=\{x\in A:\langle x,\varphi\rangle=0\,\forall\varphi\in\ker L\setminus\{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\operatorname{coim}L,$ тогда $A=\ker L\oplus\operatorname{coim}L.$

Построим пространство

$$\mathbf{X}=\{x\,|\,x\in L_\infty(0,T;\operatorname{coim}L)\cap L_2(0,T;A),\quad \dot{x}\in L_\infty(0,T;\operatorname{coim}\,L)\cap L_2(0,T;A)\}.$$

Определение 1. *Слабым обобщенным решением* уравнения (6) назовем функцию $x\in\mathbf{X},$ удовлетворяющую условию

$$\int_0^T\varphi(t)\left[\left\langle L\frac{dx}{dt},w\right\rangle+\langle Mx,w\rangle+\langle B(x,x),w\rangle\right]dt=\int_0^T\varphi(t)\langle u,w\rangle dt \qquad (9)$$
$$\forall w\in A,\forall\varphi\in L_2(0,T).$$

Решение уравнения (9) назовем *решением задачи Шоуолтера–Сидорова*, если оно удовлетворяет (5).

Замечание 1. В работе [6] показано, что слабое обобщенное решение уравнения (6), удовлетворяющее (9), эквивалентно решению, удовлетворяющему

$$\int_0^T \left[\left\langle L\frac{d}{dt}x, w \right\rangle + \left\langle Mx, w \right\rangle + \left\langle B(x,x), w \right\rangle - \left\langle u, w \right\rangle \right] dt = 0, \forall w \in A.$$

В дальнейшем мы будем отождествлять эти решения.

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в пространстве A, а значит, в силу вложений (8) тотальна в пространстве H. Построим галеркинские приближения решения задачи (5), (6). Для этого выберем в A ортонормальную (в смысле H) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker L$, $\dim\ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (5), (6) в виде:

$$x^m(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)\varphi_i, \; m > l, \tag{10}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t), \; i = 1, ..., m$ в силу основной леммы вариационного исчисления определяются следующей задачей

$$\left\langle Lx_t^m, \varphi_i \right\rangle + \left\langle Mx^m, \varphi_i \right\rangle + \left\langle B(x^m, x^m), \varphi_i \right\rangle = \left\langle u, \varphi_i \right\rangle, \tag{11}$$

$$\left\langle L(x^m(0) - x_0), \varphi_i \right\rangle = 0, \; i = 1, ..., m. \tag{12}$$

Уравнения (11) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbf{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $A^m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$.

Лемма 1. *При любых* $x_0 \in A$ *и* $m > \dim\ker L$ *существует единственное локальное решение* $x^m \in C^r(0, T_m; A^m)$ *задачи (11), (12).*

Доказательство. В силу работы [11] для разрешимости задачи (11), (12) достаточно установить невырожденность матрицы

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle Mx^m + B(x^m, x^m) - u, \varphi_i \right\rangle \right\|, \quad i, j = 1, ..., m,$$

в точке $x_0 = (x_1(0), ..., x_m(0))$ или, что то же самое, невырожденность оператора $(\mathbf{I} - Q)(M + B)_{x_0}' (\mathbf{I} - P)$. Однако $\forall v \in \ker L, v \neq 0$, имеем

$$\left\langle (\mathbf{I} - Q)(M + B)_{x_0}' (\mathbf{I} - P)v, v \right\rangle = \left\langle Mv + B(v, x^m) + B(x^m, v), v \right\rangle = \left\langle Mv + B(v, x^m), v \right\rangle \neq 0$$

ввиду положительной определенности оператора M и конструкции проектора $(\mathbf{I} - Q)$ вдоль $\operatorname{im} L$ на $\operatorname{coker} L$ и проектора $(\mathbf{I} - P)$ вдоль $\operatorname{coim} L$ на $\ker L$.

Теорема 1. *При любых* $x_0 \in A, \; T \in \mathbf{R}_+, \; u \in L_2(0, T; A^*)$ *существует единственное решение* $x \in \mathbf{X}$ *задачи (5), (6).*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится в несколько этапов.

Существование. Введем в $\operatorname{coim} L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалентна норме, индуцированной из надпространства H. Умножим i-ое уравнение (11) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, ..., m$, проинтегрируем на $(0, t)$ и получим

$$\begin{aligned} &\left\langle Lx^m(t), x^m(t) \right\rangle + 2\int_0^t \left\langle Mx^m, x^m \right\rangle d\tau + 2\int_0^t \left\langle B(x^m(\tau), x^m(\tau)), x^m(\tau) \right\rangle d\tau = \\ &= 2\int_0^t \left\langle u(\tau), x^m(\tau) \right\rangle d\tau + \left\langle Lx^m(0), x^m(0) \right\rangle \le \varepsilon^2 \|u\|^2_{L_2(0,T;A^*)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|x^m\|^2_{L_2(0,T;A)} + |x^m(0)|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

В силу свойств оператора M и того, что для любого $x \in A$ имеет место равенство $< B(x, x), x >= 0$, получим

$$|x^m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \left\| x^m(\tau) \right\|_A^2 d\tau \le \varepsilon^2 \int_0^T \|u(\tau)\|^2_{H^*} d\tau + |x^m(0)|^2, \; C_1 = 2C_M - \frac{1}{\varepsilon^2} > 0.$$

Из оценки следует, что все T_m, гарантированные леммой 1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$. Кроме того, в силу рефлексивности бохнеровских пространств $L_2(0,T;A)$ и $L_2(0,T;A^*)$ существуют слабые пределы

$$x^m \to x \ \ {}_*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L);$$
$$x^m \to x \text{ слабо в } L_2(0,T;A);$$
$$x_t^m \to x_t \text{ слабо в } L_2(0,T;A).$$

В силу свойств билинейного оператора B получим

$$|< B(x^m, x^m), y >| \le C^B \left\| x^m \right\|_A^2 \left\| y \right\|_A,$$

и, следовательно, $B(x^m, x^m)$ ограничены в $L_\infty(0,T;A^*)$. Поскольку вложение $A \subset H$ компактно и выполнено $< B(x^m, x^m), y > = - < B(x^m, y), x^m > \ \ \forall y \in A$, получим, что

$$B(x^m, x^m) \to B(x,x) \ \ {}_*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;A),$$

где $x^m : m \in \mathrm{N}$ – некоторая подпоследовательность последовательности галеркинских приближений, гарантированных леммой 1.

Теперь мы можем при фиксированном i перейти к пределу в

$$\left\langle Lx_t^m(t), \varphi_i \right\rangle + \left\langle Mx^m(t) + B(x^m(t), x^m(t)), \varphi_i \right\rangle = \left\langle u(t), \varphi_i \right\rangle$$

и получим

$$L\dot{x} + Mx + B(x,x) = u,$$

откуда $L\dot{x} \in L_2(0,T;A^*) \cap L_\infty(0,T;A^*)$, следовательно, $Lx(0)$ имеет смысл.

Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (5), (6). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ получим

$$\begin{gathered} \left\langle Lw, w \right\rangle + 2\int_0^t \left\langle Mw + (B(x_1,x_1) - B(x_2,x_2)), w \right\rangle d\tau = 0, \\ \left\langle Lw, w \right\rangle + 2\int_0^t \left\langle Mw, w \right\rangle d\tau = 2\int_0^t \left\langle B(x_2,x_2) - B(x_1,x_1), w \right\rangle d\tau. \end{gathered} \tag{14}$$

В силу неотрицательной определенности оператора L, 2-коэрцитивности оператора M, свойств билинейного оператора $B(x,y)$ и того, что $\left\langle B(x_2,x_2) - B(x_1,x_1), w \right\rangle = \left\langle B(w,x_2), x_1 \right\rangle$, получим

$$| w |_{L_2(0,T;\, coim\, L)}^2 \le 2\int_0^t \left\| w(\tau) \right\|_A \left\| x_2(\tau) \right\|_A \left\| x_1(\tau) \right\|_A d\tau.$$

Откуда в силу теоремы Гронуола–Белмана следует, что $w \equiv 0$.

2. Задача оптимального управления

Построим пространство управлений $U = L_2(0,T;A^*)$ и определим в пространстве U непустое замкнутое и выпуклое множество U_{ad}. Рассмотрим задачу оптимального управления (5)–(7), где функционал качества зададим формулой

$$J(x,u) = \alpha\int_0^T \left\| x(t) - z_d(t) \right\|_A^2 dt + \beta\int_0^T \left\| u(t) \right\|_{A^*}^2 dt,\ \alpha + \beta = 1, \tag{15}$$

где $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 2. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (7), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x,u),$$

где пары $(x,u) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ удовлетворяют (5), (6) в смысле опеределения 1; вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением* в задаче (5), (6).

Замечание 2. *Допустимым элементом* задачи (5)–(7) назовем пару $(x,u)\in \mathbf{X}\times U_{ad}$, удовлетворяющую задаче (5), (6). Поскольку множество $U_{ad}\neq\varnothing$, то для любого $u\in U_{ad}\subset U$ в силу теоремы 1 существует единственное решение $x=x(u)$ задачи (5), (6).

Теорема 2. *При любых* $x_0\in A$, $T\in \mathbf{R}_+$ *существует решение задачи (5)–(7).*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что оператор
$$(L\frac{d}{dt}+M+B):\mathbf{X}\to L_\infty(0,T;\operatorname{coim}L)\cap L_2(0,T;A^*)$$
есть гомеоморфизм. Поэтому функционал качества (15) можно записать в виде
$$J(x,u)=J(u)=\alpha\|x(u)-z_d\|^2_{L_2(0,T;A)}+\beta\|u\|^2_{L_2(0,T;A^*)}. \tag{16}$$
Пусть $\{u_m\}\subset U_{ad}$ – последовательность такая, что
$$\lim_{m\to\infty}J(u_m)=\inf_{u\in U_{ad}}J(u),$$
тогда из (16) вытекает, что
$$\|u_m\|_{L_2(0,T;A^*)}\le \text{const},\quad \|x_m\|_{L_2(0,T;A)}\le\text{const} \tag{17}$$
при всех $m\in N$. Из (17) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящуюся последовательность $u_m\to\tilde u$. В силу теоремы Мазура точка $\tilde u\in U_{ad}$. Обозначим через $x_m=x(u_m)$ слабое обобщенное решение уравнения
$$L\dot x_m+Mx_m+B(x_m,x_m)=u_m. \tag{18}$$
Тогда, используя рассуждения теоремы 1, в силу априорных оценок (13) получим, что
$$x^m\to\tilde x \ \ \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;coim\,L);$$
$$x^m\to\tilde x \ \text{ слабо в } L_2(0,T;A);$$
$$B(x_m,x_m)\to B(\tilde x,\tilde x) \ \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;A^*).$$
Перейдем к пределу в уравнении состояния (18) и получим
$$L\dot{\tilde x}+M\tilde x+B(\tilde x,\tilde x)=\tilde u.$$
Следовательно, $\tilde x=\tilde x(\tilde u)$ и $\liminf J(u_m)\ge J(u)$. Значит, u есть оптимальное управление в задаче (5)–(7).

3. Модель Осколкова

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $n=2,3,4$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1=(\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$, $\mathbf{L}_2=(L_2(\Omega))^n$ пространства вектор-функций $x=x(s,t)=(x_1,x_2,...,x_n)$, определенных на области Ω.

Рассмотрим линеал $V=\{x\in(C_0^\infty(\Omega))^n:\nabla\cdot x=0\}$ соленоидальных вектор-функций. Обозначим через $\mathbf{L}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ замыкание по норме пространства $\mathbf{L}_2$ и $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$ линеала V соответственно. Пространство $\mathbf{L}_\sigma$ гильбертово со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$ из пространства $\mathbf{L}_2$. Кроме того, в работе [12] показано, что существует расщепление $\mathbf{L}_2=\mathbf{L}_\sigma\oplus\mathbf{L}_\pi$, где $\mathbf{L}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbf{L}_\sigma$. Обозначим через $\Sigma:\mathbf{L}_2\to\mathbf{L}_\sigma$ соответствующий ортопроектор. Пространство $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$ непрерывно и плотно вложено в пространство $\mathbf{L}_2$. Сужение проектора Σ на подпространство $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$ является непрерывным оператором $\tilde\Sigma:\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1\to\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$, для которого $im\,\tilde\Sigma=\mathbf{H}_\sigma$, $\ker\tilde\Sigma=\mathbf{H}_\pi$. Тогда $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1=\mathbf{H}_\sigma\oplus\mathbf{H}_\pi$ и $\mathbf{H}_\sigma=\{x\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1:\nabla\cdot x=0\}$ (см. теорему 1.6 [13, с. 24]).

Лемма 2. [6] *Пусть* $f\in L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, *тогда для того чтобы имело место равенство*

$$\int_0^T < f, v > dt = 0, \forall v \in L_2(0,T;\mathbf{H}_\sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция $p(s,t)$, $p \in L_2(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega)/\mathbf{R})$, *что* $f = \nabla_s p$.

Положим $A = \mathbf{H}_\sigma$, $H = \mathbf{L}_\sigma$, тогда через A^* обозначим пространтсво, двойственное к пространству A относительно скалярного произведения $< \cdot,\cdot >$. Построим операторы

$$\langle Lx, y\rangle = \int_\Omega (x \cdot y - \kappa \nabla x \cdot \nabla y) ds, \quad x, y \in A; \ \langle Mx, y\rangle = \alpha \int_\Omega \nabla x \cdot \nabla y ds, \quad \forall x, y \in A,$$

$$< B(x,y), z > = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega x_i \frac{\partial y_j}{\partial s_i} z_j ds.$$

Непрерывное вложение $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}_4$ имеет место при $n \le 4$, и выполнено компактное вложение $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}_2$.

Рассмотрим уравнение

$$(1 - \kappa \nabla^2) x_t - \nu \nabla^2 x + (x \cdot \nabla) x = u. \tag{19}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (19), (3), (4) к задаче Шоуолтера–Сидорова (5) для полулинейного уравнения соболевского типа (6).

Лемма 3.

(i) *При всех* $\kappa^{-1} \ge \lambda_1$ *оператор* $L \in \mathbf{L}(A; A^*)$ *самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство* $\{\varphi_k\}$ *его функций образует базис пространства* A.

(ii) *При* $\nu \in \mathbf{R}_+$ $M \in \mathbf{L}(A; A^*)$ *2-коэрцитивный, симметричный оператор.*

(iii) *При* $n = 2,3,4$ *оператор* $B: A \times A \to A^*$ *удовлетворяет неравенству*

$$|< B(x,y), z >| \le C^B \|x\|_A \|y\|_A \|z\|_A, \forall x, y, z \in A.$$

(iv) $< B(x,y), z > = - < B(x,z), y > \ \forall x, y, z \in A$.

(v) *Для любых* $x, y \in A$ *имеет место равенство* $< B(y,x), x > = 0$.

Доказательство леммы 3 общеизвестно. Справедливость п. (i) гарантирует теорема Солонникова–Воровича–Юдовича [14], п. (ii) вытекает из построения оператора M, доказательства пп. (iii), (iv), (v) можно найти в работах [12, 13].

Построим пространство

$$\mathbf{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}\, L) \cap L_2(0,T;A), \frac{dx}{dt} \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}\, L) \cap L_2(0,T;A)\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\kappa^{-1} \ge \lambda_1, \nu \in \mathbf{R}_+, n = 2,3,4$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathbf{H}_\sigma$ *и* $u \in L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ *существует единственное решение* $x \in \mathbf{X}$ *задачи (19), (3), (4).*

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из теоремы 1 и леммы 3.

Замечание 3. Представим уравнение (1) в виде:

$$(1 - \kappa \nabla^2) x_t - \nu \nabla^2 x + (x \cdot \nabla) x - u = -\mathbf{p}$$

и определим оператор

$$C(x) \equiv L\dot{x} + Mx + B(x,x).$$

Лемма 4. *Пусть* $\kappa^{-1} \ge \lambda_1, \nu \in \mathbf{R}_+, n = 2,3,4$ *и при любых* $x_0 \in \mathbf{H}_\sigma$ *и* $u \in L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ *функция* $x \in \mathbf{X}$ *является решением задачи (19), (3), (4) тогда и только тогда, когда существует функция* $p \in L_2(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega)/\mathbf{R}))$ *такая, что пара* $(x, \mathbf{p})$ *удовлетворяет задаче (1), (3), (4).*

Доказательство. Вектор-функция x является слабым обобщенным решением задачи (1), (3), (4), если выполнено

$$\int_0^T \varphi(t) < C(x) - u, w > dt = 0, \forall w \in \mathbf{H}_\sigma.$$

В силу основной леммы вариационного исчисления данное равенство эквивалентно

$$< C(x) - u, w >= 0, \forall w \in \mathbf{H}_\sigma,$$

где $C(x) - u \in L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда в силу леммы 2 существует $p \in L_2(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega)/\mathbf{R})$ такая, что $C(x) - u = -\mathbf{p}$.

Рассмотрим задачу оптимального управления (1), (3), (4), (7). Зададим пространство управлений $U = L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, посторoим функционал качества

$$J(x,u) = \alpha \|x - z_d\|^2_{L_2(0,T;\mathbf{H}_\sigma)} + \beta \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))}. \tag{20}$$

Выберем $U_{ad} \subset L_2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\kappa^{-1} \ge \lambda_1, \nu \in \mathbf{R}_+, n = 2, 3, 4$, *тогда существует решение задачи оптимального управления (1), (3), (4), (7).*

Литература

1. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1976. – Т. 59. – С. 133–137.

2. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды МИАН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 137–182.

3. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

4. Свиридюк Г.А. О разрешимости нестационарной задачи несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Математические заметки. – 1998. – Т. 63, № 3. – С. 442–450.

5. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 47–54.

6. Корпусов, М.О. О разрушении решения системы уравнений Осколкова / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 4. – С. 83–108.

7. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

8. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

9. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.

10. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.

11. Свиридюк, Г.А. О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.

12. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

13. Темам, Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

14. Солонников, В.А. Линейные эллиптические системы. Конспект лекций / В.А. Солонников. – Л.: ЛГУ, 1979. – 168 с.

Поступила в редакцию 15 июня 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 3, pp. 22–29

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE MODEL OF DYNAMICS OF WEAKLY VISCOELASTIC FLUID

N.A. Manakova[1]

In this article we study the optimal control of solutions of the Dirichlet–Showalter–Sidorov problem for the system of equations of Kelvin–Voight zero order fluid motion, which is called a system of Oskolkov equations. The case of the degenerate equation is considered. Existence of global in time weak generalized solution of the model in the space of solenoidal functions is proved. The existence of optimal control of weak generalized solutions of Showalter–Sidorov problem for abstract semilinear Sobolev type equation is shown. The obtained abstract results are applied to the Oskolkov model.

Keywords: the system of Oskolkov equations; the optimal control problem; Sobolev type equations.

References

1. Oskolkov A.P. Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids. *J. of Soviet Mathematics*. 1976. Vol. 10, no. 2. pp. 299–335.

2. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroid fluids. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 1989. Vol. 179. pp. 137–182.

3. Sviridyuk G.A. A model of dynamics of incompressible viskoelastic liquid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 1994. Vol. 38, no. 1. pp. 59–68.

4. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. On the solvability of a nonstationary problem describing the dynamics of an incompressible viscoelastic fluid. *Mathematical Notes*. 1998. Vol. 63, no. 3. pp. 388–395.

5. Sukacheva T.G. On the solvability of the nonstationary problem of the dynamics of an incompressible viscoelastic fluid of the Kelvin–Voigt nonzero. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 1998. Vol. 43, no. 3. pp. 44–51.

6. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up of Oskolkov's system of equations. *Sbornik: Mathematics*. 2009. Vol. 200, no. 4. pp. 549–572.

7. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003. 216 p.

8. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2010. Vol. 3, no. 1. pp. 104–125. (in Russ.)

9. Keller A.V. Numerical solution of the optimal control problem for degenerate linear system of equations with Showalter–Sidorov initial conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2008. no. 27(127). pp. 50–56. (in Russ.)

10. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An optimal control problem for the Hoff equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 2007. Vol. 1, no. 2. pp. 247–253.

11. Sviridyuk G.A. A singular system of ordinary differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*. 1987. Vol. 23, no. 9. pp. 1637–1639. (in Russ.)

12. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach, 1969. 234 p.

13. Temam R. *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Stud. Math. Appl., 2. Amsterdam, N.Y., North-Holland, 1979.

14. Solonnikov V.A. *Linear elliptic systems. Lecture notes*. Leningrad, LGU, 1979. (in Russ.)

Received 15 June 2015

[1] Manakova Natalia Aleksandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Equation of Mathematical Physics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.
E-mail: manakovana@susu.ac.ru