УДК 517.977

ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В АВТОМОДЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Л.И. Рубина[2], О.Н. Ульянов[3]

Исследуется уравнение потенциала в случае, когда его решение выражено через три автомодельные переменные. Уравнение геометрическим методом сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Получен ряд точных решений.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных; геометрический метод исследования; сведение уравнения в частных производных к ОДУ; точные решения.

Введение

Известно, что процессы неограниченного безударного сжатия газа из исходного однородного безвихревого состояния потенциальны и изэнтропичны. В статье А.Ф. Сидорова [1] для общего уравнения потенциала скоростей $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$, где t – время, x_i – пространственные координаты, $(i = 1, 2, 3)$ рассматривается класс автомодельных решений с переменными $\xi_i = x_i / \tau, \tau = t - t^*$, уравнение потенциала преобразуется в уравнение, которому удовлетворяет функция $\Gamma = \Gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [1]

$$0,5(\nabla\Gamma\nabla|\nabla\Gamma|^2) - |\nabla|^2 - (\gamma-1)(\Gamma - 0,5|\nabla\Gamma|^2)(\Delta\Gamma - k) = 0, \qquad (1)$$

построены точные решения этого уравнения в случае двух автомодельных переменных, изучается безударное сжатие газа с использованием полученных решений. Здесь $\nabla\Gamma$ – градиент Γ в пространстве (ξ_1, ξ_2, ξ_3), k – размерность задачи по пространственным переменным.

В данной работе предлагается исследование уравнения (1) для случая трех автомодельных переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $k = 3$. Для уравнения (1) геометрическим методом [2] получены некоторые точные решения и показано, как полученные решения могут быть использованы при рассмотрении задачи о безударном сжатии газа.

Сведение уравнения потенциала к ОДУ

Рассмотрим уравнение (1). Введем обозначения $\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\xi_i} = \Gamma_i, \dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi_i\partial\xi_j} = \Gamma_{ij}, (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3)$.

Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\Gamma_1^2(\Gamma_{11} - 1) + \Gamma_2^2(\Gamma_{22} - 1) + \Gamma_3^2(\Gamma_{33} - 1) + 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_{12} + 2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_{13} + 2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_{23} - \\ -(\gamma-1)[\Gamma - 0,5(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)](\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33} - 3) = 0.\end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь $\gamma > 1$ – показатель адиабаты.

Будем предполагать, что $\Gamma = \Gamma(\psi)$, тогда $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{const}$ – поверхность уровня функции $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Gamma_i = \Gamma'\psi_i, \Gamma_{ij} = \Gamma''\psi_i\psi_j + \Gamma'\psi_{ij}.$. Здесь штрих $(')$ обозначает дифференцирование по переменной ψ. После подстановки $\Gamma(\psi)$ в уравнение (2) получаем

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках проекта «Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов» программы «Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами» Комплексной программы ФНИ Уральского отделения РАН.

[2] Рубина Людмила Ильинична – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН).
E-mail: rli@imm.uran.ru

[3] Ульянов Олег Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ученый секретарь, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН), доцент, Уральский федеральный университет (УрФУ).
E-mail: secretary@imm.uran.ru

$$\begin{gathered}0,5(\gamma+1)\Gamma'^2\Gamma''(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)^2+\Gamma'^3[\psi_1^2\psi_{11}+\psi_2^2\psi_{22}+\psi_3^2\psi_{33}+2\psi_1\psi_2\psi_{12}+2\psi_1\psi_3\psi_{13}+\\ +2\psi_2\psi_3\psi_{23}+0,5(\gamma-1)(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)(\psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33})]-\\ -0,5(3\gamma-1)\Gamma'^2(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)-(\gamma-1)\Gamma\Gamma'(\psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33})-\\ -(\gamma-1)\Gamma\Gamma''(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)+3(\gamma-1)\Gamma=0.\end{gathered}\tag{3}$$

В уравнении (3) положим, что [2]

$$\begin{gathered}\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=f(\psi),\ \psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33}=f_1(\psi),\\ \psi_1^2\psi_{11}+\psi_2^2\psi_{22}+\psi_3^2\psi_{33}+2\psi_1\psi_2\psi_{12}+2\psi_1\psi_3\psi_{13}+\\ +2\psi_2\psi_3\psi_{23}+0,5(\gamma-1)(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)(\psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33})=f_2(\psi).\end{gathered}\tag{4}$$

Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$0,5(\gamma+1)\Gamma'^2\Gamma''f^2+\Gamma'^3f_2-0,5(3\gamma-1)\Gamma'^2f-(\gamma-1)\Gamma\Gamma'f_1-(\gamma-1)\Gamma\Gamma''f+3(\gamma-1)\Gamma=0.\tag{5}$$

Получим ряд условий, при которых переопределенная система (4) имеет решение.

Теорема 1. Если функции $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ определяются из уравнений $8ff_1'+8f'f_1-4f_1^2+4ff''-f'^2=0,\quad f_2=0,5ff'+0,5(\gamma-1)ff_1$, где $f(\psi)$ – произвольная функция, и если вторые производные удовлетворяют зависимостям

$$\begin{gathered}\psi_{11}=[(2\psi_1^2-\psi_2^2-\psi_3^2)f'+2f_1(\psi_2^2+\psi_3^2)]/(4f),\\ \psi_{12}=-[\psi_1\psi_2(2f_1-3f')]/(4f),\ \psi_{13}=-[\psi_1\psi_3(2f_1-3f')]/(4f),\\ \psi_{23}=0,\ \psi_{22}=[(2\psi_2^2-\psi_1^2-\psi_3^2)f'+2f_1(\psi_1^2+\psi_3^2)]/(4f),\\ \psi_{33}=[(2\psi_3^2-\psi_2^2-\psi_1^2)f'+2f_1(\psi_2^2+\psi_1^2)]/(4f),\end{gathered}\tag{6}$$

то система (4) совместна.

Доказательство. Для исследования совместности переопределенной системы (4) выпишем дифференциальные следствия соотношения $\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=f(\psi)$ и выразим из полученных соотношений вторые производные $\psi_{11},\psi_{22},\psi_{33}$. Получим

$$\begin{gathered}\psi_{11}=(f'\psi_1-2\psi_2\psi_{21}-2\psi_3\psi_{31})/(2\psi_1\},\\ \psi_{22}=(f'\psi_2-2\psi_1\psi_{12}-2\psi_3\psi_{32})/(2\psi_2),\\ \psi_{33}=(f'\psi_3-2\psi_1\psi_{13}-2\psi_2\psi_{23})/(2\psi_3).\end{gathered}\tag{7}$$

Подставим в последнее соотношение системы (4) выражения (7) и учтем, что должно выполняться второе соотношение системы (4). В результате получим, что если справедливы две первые зависимости системы (4), то третье соотношение системы при условии $f_2=0,5ff'+0,5(\gamma-1)ff_1$ выполняется тождественно. Считаем, что f_2 удовлетворяет указанному условию. Остается найти условие, при котором совместны первое и второе уравнения системы (4).

Подставим полученные выражения (7) во второе уравнение системы (4) и найдем из полученного соотношения ψ_{23}. Далее рассматриваем первое соотношение системы (4)

$$\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=f(\psi).\tag{8}$$

Выпишем для уравнения (8) систему уравнений характеристик [3]

$$\frac{d\xi_i}{ds}=2\psi_i,\quad \frac{d\psi}{ds}=2f,\quad \frac{d\psi_i}{ds}=f'\psi_i,\quad (i=1,2,3).$$

Полагая, что $f(\psi)\neq 0$, выберем в системе уравнений характеристик в качестве независимого переменного ψ. Тогда система будет иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{d\psi}=\frac{\psi_i}{f},\quad \frac{d\psi_i}{d\psi}=\frac{f'}{2f}\psi_i.\tag{9}$$

Получим расширенную систему уравнений характеристик, дополнив систему (9) уравнениями, описывающими изменение вдоль характеристик вторых производных $\psi_{11},\psi_{22},\psi_{33}$ [2]. Чтобы получить такие соотношения, перепишем уравнения характеристик, описывающие изменения вдоль них первых производных

$$\frac{d\psi_1}{d\psi}=\psi_{11}\frac{d\xi_1}{d\psi}+\frac{d\xi_2}{d\psi}\psi_{12}+\psi_{13}\frac{d\xi_3}{d\psi}=\frac{f'}{2f}\psi_1,$$
$$\frac{d\psi_2}{d\psi}=\psi_{12}\frac{d\xi_1}{d\psi}+\psi_{22}\frac{d\xi_2}{d\psi}+\psi_{23}\frac{d\xi_3}{d\psi}=\frac{f'}{2f}\psi_2, \qquad (10)$$
$$\frac{d\psi_3}{d\psi}=\psi_{13}\frac{d\xi_1}{d\psi}+\psi_{23}\frac{d\xi_2}{d\psi}+\psi_{33}\frac{d\xi_3}{d\psi}=\frac{f'}{2f}\psi_3,$$

и, продифференцировав первое соотношение (10) по ξ_1, второе соотношение (10) по ξ_2, а третье соотношение (10) по ξ_3 и подставив вместо $\frac{d\xi_i}{d\psi}$, (i = 1, 2, 3) их значения из системы (9), получим зависимости

$$\frac{d\psi_{11}}{d\psi}=-\psi_{11}\left(\frac{\psi_1}{f}\right)_1-\psi_{12}\left(\frac{\psi_2}{f}\right)_1-\psi_{13}\left(\frac{\psi_3}{f}\right)_1+\left(\frac{f'}{2f}\right)'\psi_1^2+\frac{f'}{2f}\psi_{11},$$
$$\frac{d\psi_{22}}{d\psi}=-\psi_{21}\left(\frac{\psi_1}{f}\right)_2-\psi_{22}\left(\frac{\psi_2}{f}\right)_2-\psi_{23}\left(\frac{\psi_3}{f}\right)_2+\left(\frac{f'}{2f}\right)'\psi_2^2+\frac{f'}{2f}\psi_{22}, \qquad (11)$$
$$\frac{d\psi_{33}}{d\psi}=-\psi_{31}\left(\frac{\psi_1}{f}\right)_3-\psi_{32}\left(\frac{\psi_2}{f}\right)_3-\psi_{33}\left(\frac{\psi_3}{f}\right)_3+\left(\frac{f'}{2f}\right)'\psi_3^2+\frac{f'}{2f}\psi_{33}.$$

Потребуем, чтобы второе соотношение системы (4) $\psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33}=f_1(\psi)$ выполнялось тождественно на характеристиках уравнения (8): $\frac{d\psi_{11}}{d\psi}+\frac{d\psi_{22}}{d\psi}+\frac{d\psi_{33}}{d\psi}=f_1'$.

Это условие будет выполняться, если обращается в тождество выражение

$$\psi_{11}^2+2\psi_{12}^2+2\psi_{13}^2+2\psi_{23}^2+\psi_{22}^2+\psi_{33}^2=ff_1'+0{,}5ff''+0{,}5f'f_1. \qquad (12)$$

Подставив в (12) ранее полученные выражения $\psi_{11},\psi_{22},\psi_{33}$, ψ_{23}, придем к квадратному уравнению относительно ψ_{12}:

$$32f(\psi_1^2+\psi_2^2)\psi_{12}^2+32f(\psi_1^2+\psi_3^2)\psi_{13}^2+64f\psi_2\psi_3\psi_{12}\psi_{13}+16f\psi_1\psi_2(2f_1-3f')\psi_{12}+$$
$$+16f\psi_1\psi_3(2f_1-3f')\psi_{13}=4\psi_1^2(\psi_2^2+\psi_3^2)[4(ff_1'+0{,}5ff''+0{,}5f'f_1)+(8f'f_1-5f'^2-4f_1^2)].$$

Определим из него ψ_{12}, рассмотрев частный случай, когда дискриминант квадратного уравнения равен нулю. Это приводит к квадратному уравнению для определения ψ_{13}. Потребовав, чтобы дискриминант уравнения для определения ψ_{13} также был равен нулю, получим, что

$$8ff_1'+8f'f_1-4f_1^2+4ff''-f'^2=0. \qquad (13)$$

Тогда $\psi_{12}=-[\psi_1\psi_2(2f_1-3f')]/(4f)$, $\psi_{13}=-[\psi_1\psi_3(2f_1-3f')]/(4f)$, и, подставляя эти значения в выражения для $\psi_{11},\psi_{22},\psi_{33},\psi_{23}$, получаем условия (6), которые обеспечивают совместность системы (8), *что и требовалось доказать*.

Рассмотрим некоторые случаи выполнения условия (13).

1. Условие (13) выполняется, если $f=(C\psi+C_1)^\beta$, $f_1=BC(C\psi+C_1)^{\beta-1}$, C = const, C_1 = const, β = const, $B=(2\beta-1)+0{,}5\sqrt{19\beta^2-20\beta+4}$. Тогда $f_2=0{,}5C[\beta+(\gamma-1)B](C\psi+C_1)^{2\beta-1}$. В этом случае уравнение (5) имеет решения $\Gamma=A(C\psi+C_1)^{(2-\beta)}$, где A = const определяется из уравнения

$$0{,}5(2-\beta)^3C^4[(\gamma+1)-\gamma\beta+(\gamma-1)B]A^2-C^2(2-\beta)[0{,}5(3\gamma-1)(2-\beta)+(\gamma-1)(B-\beta+1)]A+$$
$$+3(\gamma-1)=0$$

2. Условие (13) выполняется, если $f = \exp(a\psi)$, $f_1 = B\exp(a\psi)$, a = const, $B = a(2 \pm 0{,}5\sqrt{19})$. Тогда $f_2 = 0{,}5[a + (\gamma - 1)B]\exp(2a\psi)$ и $\Gamma = A\exp(-a\psi)$, причем A определяется из уравнения $0{,}5a^3[\gamma a - (\gamma-1)B]A^2 + a[0{,}5(3-5\gamma)a + (\gamma-1)B]A + 3(\gamma-1) = 0$.

Если в рассмотренных выше случаях выполнения условия (13) в выражения $\Gamma = \Gamma(\psi)$ подставить $\psi = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, то получим решение уравнения (1).

Рассматривая политропный газ, имеем $c^2 = dp/d\rho$ и если $c \to \infty$, то $\rho \to \infty$. Здесь c – скорость звука, ρ – плотность, p – давление [1],

$$c^2 = (\gamma - 1)\left[\Gamma(\psi) - 0{,}5\Gamma'^2 \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\right)^2\right]. \qquad (14)$$

Полученные выше точные решения можно использовать для определения скорости звука и для изучения условий, при которых возможно безударное сжатие в случае политропного газа.

Если $\Gamma = A(C\psi + C_1)^{(2-\beta)}$ и $f = (C\psi + C_1)^{\beta}$, то подставляя эти значения в (14), получаем $c^2 = (\gamma-1)A(C\psi + C_1)^{(2-\beta)}[1 - 0{,}5(2-\beta)^2 AC^2]$. Если $\Gamma = A\exp(-a\psi)$ и $f = \exp(a\psi)$, то $c^2 = (\gamma-1)A\exp(-a\psi)(1 - 0{,}5a^2 A)$.

Итак, в случае политропного газа, если известно $\Gamma = \Gamma(\psi)$ и $\psi = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, то легко определяется $c(\xi_{11}, \xi_2, \xi_3)$.

Задача о движении поршня

Пусть в начальный момент времени скорость звука на поршне c = 1, а c' = c_0 > 0, c_0 = const, тогда в начальный момент времени из (14) находим, что $\Gamma(\psi) = 0{,}5\Gamma'^2 f + 1/(\gamma-1)$, $\Gamma'' = [\Gamma'(1 - 0{,}5\Gamma' f') - 2c_0/(\gamma-1)]/(\Gamma' f)$. Подставляя эти значения в уравнение (5), получаем соотношение, которому должна удовлетворять производная $\Gamma'(\psi)$, чтобы уравнение (5) обращалось в тождество $\Gamma'^2[0{,}5f' - 2c_0 f/(\gamma-1) - f_1] + 2\Gamma' + 2c_0/(\gamma-1) = 0$. Отсюда следует, что либо $\Gamma' = -c_0/(\gamma-1)$, если $f_1 = 0{,}5f' - 2c_0 f/(\gamma-1)$, либо, если f и f_1 удовлетворяют зависимости (13), то $\Gamma' = \{-1 \pm \sqrt{1 - 2c_0[0{,}5f' - 2c_0 f/(\gamma-1) - f_1]/(\gamma-1)}\}/[0{,}5f' - 2c_0 f/(\gamma-1) - f_1]$. Возвращаемся к уравнению (5). Из уравнения (5) получаем, что

$$\Gamma = \frac{\Gamma'^2[0{,}5(\gamma+1)\Gamma'' f^2 + \Gamma' f_2 - 0{,}5(3\gamma-1)f]}{(\gamma-1)(\Gamma' f_1 + \Gamma'' f - 3)}, \text{ тогда } c^2 = \Gamma'^2\left\{\frac{\Gamma'' f^2 + 0{,}5\Gamma' ff' - f}{\Gamma' f_1 + \Gamma'' f - 3}\right\}.$$

Если $\Gamma' = -c_0/(\gamma-1)$ и $f_1 = 0{,}5f' - 2c_0 f/(\gamma-1)$, то $f_2 = 0{,}25(\gamma+1)ff' - c_0 f^2$,

$$c^2 = \frac{c_0^2 f[1 + 0{,}5c_0 f'/(\gamma-1)]}{3(\gamma-1)^2 + 0{,}5(\gamma-1)c_0 f' - 2c_0^2 f}.$$

Пусть знаменатель у выражения для c^2 равен δ, тогда $f = \eta \exp[4c_0\psi/(\gamma - 1)] + [3(\gamma - 1)^2 - \delta]/[2c_0^2]$, η = const,

$$c^2 = \frac{c_0^2}{\delta}\left(\eta\exp\left(\frac{4c_0}{\gamma-1}\psi\right) + \frac{[3(\gamma-1)^2 - \delta]}{2c_0^2}\right)\left[\frac{2c_0^2}{(\gamma-1)^2}\eta\exp\left(\frac{4c_0}{\gamma-1}\psi\right) + 1\right],$$

и при любом ψ, если $\delta \to 0$, то $c \to \infty$. Интенсивность безударного сжатия будет зависеть, очевидно, от величины и знака ψ.

О поверхностях уровня решений уравнения потенциала

Выше отмечено, что $\psi = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ = const — поверхность уровня решения уравнения (1) и показано, что эта функция удовлетворяет уравнению (8) и соответствующей ему системе уравнений характеристик (9). Выпишем решение системы (9)

$$\psi_1 = c_1 f^{1/2}, \psi_2 = c_2 f^{1/2}, \psi_3 = c_3 f^{1/2}, c_1 = \text{const} > 0, c_2 = \text{const} > 0, c_3 = (1 - c_1^2 - c_2^2)^{1/2} \qquad (15)$$

$$\xi_j = c_j \int \frac{d\psi}{f^{1/2}} + a_j, (j=1,2), \xi_3 = (1-c_1^2-c_2^2)^{1/2} \int \frac{d\psi}{f^{1/2}} + a_3, a_i = \mathrm{const}, (i=1,2,3) \qquad (16)$$

и будем полагать, что соотношения (16) задают преобразование координат $\xi_i = \xi_i(\psi, \alpha_1, \alpha_2)$, где $(i=1,2,3), c_j = c_j(\alpha_1, \alpha_2), a_i = a_i(\alpha_1, \alpha_2), (i=1,2,3).$

Для такого преобразования координат должна обращаться в тождество [2] зависимость $\psi \equiv \psi(\xi_1(\psi,\alpha_1,\alpha_2), \xi_2(\psi,\alpha_1,\alpha_2), \xi_3(\psi,\alpha_1,\alpha_2))$, а именно,

$$1 = \sum_1^3 \psi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \psi}, 0 = \sum_1^3 \psi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j}, (j=1,2).$$

Требуя выполнения выписанных зависимостей, получаем соотношения, которым должны удовлетворять функции $c_j(\alpha_1,\alpha_2), a_i(\alpha_1,\alpha_2)$

$$\frac{c_1}{(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2}} \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_j} + \frac{c_2}{(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2}} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial a_3}{\partial \alpha_j} = 0, (j=1,2). \qquad (17)$$

Например, если $c_j = \mathrm{const}, a_1 = \alpha_1 + \alpha_2, a_2 = \alpha_1 - \alpha_2, a_3 = [(c_2-c_1)\alpha_2 - (c_1+c_2)\alpha_1]/(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2}$, то соотношение (17) выполняется. Исключив α_j из соотношений (16), получаем, что $w = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3, k_i = \mathrm{const}$, $w = \int \frac{d\psi}{f^{1/2}}$, следовательно, в этом примере $\psi = \psi(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3)$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если $f_1 = \eta f^{1/2} + 0{,}5 f'$, $f_2 = 0{,}25(\gamma+1) ff' + 0{,}5(\gamma-1)\eta f^{3/2}$, где $f(\psi)$ – произвольная функция, $\eta = \mathrm{const}$, то система (4) совместна, а уравнение (3) имеет вид

$$\Gamma_{ww}[0{,}5(\gamma+1)\Gamma_w^2 - (\gamma-1)\Gamma] + 0{,}5(\gamma-1)\eta\Gamma_w^3 - 0{,}5(3\gamma-1)\Gamma_w^2 - (\gamma-1)\eta\Gamma\Gamma_w + 3(\gamma-1)\Gamma = 0, \quad \Gamma_w = d\Gamma/dw. \qquad (18)$$

Доказательство. Так как $c_j = \mathrm{const}$, то можно считать, что $\psi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = c_i f^{1/2}(\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)), (i=1,2,3)$. Тогда, требуя чтобы второе уравнение системы (4) тождественно удовлетворяло расширенной системе характеристик (11), получаем линейное уравнение $f_1' - 0{,}5 f' f_1 / f = 0{,}5 f'' - 0{,}25 f'^2 / f$, решая которое, находим, что $f_1 = \eta f^{1/2} + 0{,}5 f'$, $\eta = \mathrm{const}$. Подставляя это значение в ранее полученное соотношение $f_2 = 0{,}5 ff' + 0{,}5(\gamma-1) ff_1$, получаем $f_2 = 0{,}25(\gamma+1) ff' + 0{,}5(\gamma-1)\eta f^{3/2}$. Учтем полученные зависимости между функциями f, f_1, f_2 в уравнении (5). Выберем в (5) в качестве независимого переменного w. В результате придем к уравнению (18), *что и требовалось доказать.*

Решаем уравнение (18). Пусть $\eta = 0$. Тогда уравнение (18) имеет вид

$$\Gamma_{ww}[0{,}5(\gamma+1)\Gamma_w^2 - (\gamma-1)\Gamma] - 0{,}5(3\gamma-1)\Gamma_w^2 + 3(\gamma-1)\Gamma = 0. \qquad (19)$$

В уравнении (19) сначала сделаем замену $\Gamma_w = p(\Gamma)$, а затем положим, что $p^2 = Q$. В результате придем к уравнению $Q_\Gamma[0{,}5(\gamma+1)Q - (\gamma-1)\Gamma] - (3\gamma-1)Q + 6(\gamma-1)\Gamma = 0$. Далее положим, что $Q = \Gamma y(\Gamma)$. В результате такой замены получим уравнение $\Gamma y_\Gamma[0{,}5(\gamma+1)y - (\gamma-1)\Gamma] = -0{,}5(\gamma+1)y^2 + 2(2\gamma-1)y - 6(\gamma-1)$. Отсюда найдем $\Gamma(y)$. Так как $Q = \Gamma y(\Gamma)$, то $p = \Gamma_w = \pm[\Gamma y(\Gamma)]^{1/2}$ и, опуская дальнейшие выкладки, окончательно имеем решение уравнения (21) в параметрическом виде

$$w = M \pm \int \frac{\Gamma_y dy}{(y\Gamma)^{1/2}}, \quad \Gamma = N\left\{\frac{y-2}{[(\gamma+1)y - 6(\gamma-1)]^{(\gamma-1)}}\right\}^{1/(\gamma-2)}, \quad M = \mathrm{const}, N = \mathrm{const}, N > 0.$$

Замечание 1. Доказанные теоремы 1,2 не охватывают все возможные зависимости между функциями f, f_1, f_2, при которых система (4) совместна. В общем случае, если рассматривать кривую второго порядка с переменными ψ_{12} и ψ_{13}, описываемую уравнением

$$32f(\psi_1^2+\psi_2^2)\psi_{12}^2+32f(\psi_1^2+\psi_3^2)\psi_{13}^2+64f\psi_2\psi_3\psi_{12}\psi_{13}+16f\psi_1\psi_2(2f_1-3f')\psi_{12}$$
$$+16f\psi_1\psi_3(2f_1-3f')\psi_{13}=4\psi_1^2(\psi_2^2+\psi_3^2)[4(ff_1'+0,5ff''+0,5f'f_1)+(8f'f_1-5f'^2-4f_1^2)],$$

то она является действительным эллипсом, если $8ff_1'+8f'f_1-4f_1^2+4ff''-f'^2<0.$ В этом случае мы будем иметь 4 разные пары значений $\{\psi_{12},\psi_{13}\}$ и, возможно, другие зависимости между функциями f, f_1, f_2.

Замечание 2. Если положить, что $\Gamma=\Gamma(\psi),\ \psi=(\xi_1-b_1)^2+(\xi_2-b_2)^2+(\xi_3-b_3)^2+B$, где $b_i=\text{const},(i=1,2,3)$, $B=\text{const}$, тогда $f(\psi)=4(\psi-B^2), w=(\psi-B^2)^{1/2}$. После подстановки этого выражения в (2) и перехода к переменной w получим уравнение

$$w\Gamma_{ww}[0,5(\gamma+1)\Gamma_w^2-(\gamma-1)\Gamma]+2(\gamma-1)\Gamma_w^3-0,5(3\gamma-1)w\Gamma_w^2-2(\gamma-1)\Gamma\Gamma_w+3(\gamma-1)w\Gamma=0.$$

Это уравнение имеет решение вида $\Gamma=aw^2$, где $a=\left\{(3\gamma-2)\pm[1-6(\gamma-1)^2]^{1/2}\right\}/[2(5\gamma-3)]$.

О краевых или начальных условиях

Вообще говоря, функции $c_j(\alpha_1,\alpha_2), a_i(\alpha_1,\alpha_2)$, удовлетворяющие (17), определяются исходя из задания начальных или граничных условий. Исключение из соотношений (16) α_j приводит к разному виду поверхности уровня $\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\text{const}$.

Пусть при $t=0,\xi_1=\alpha_1,\xi_2=\alpha_2,\xi_3=F(\alpha_1,\alpha_2),w=w_0=\text{const}$. Соотношения (16) будут удовлетворять таким начальным условиям, если $a_j=\alpha_j-c_jw_0,(j=1,2),a_3=F-w_0(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2.}$ Требуя выполнения условий (17) для таких $a_i,(i=1,2,3)$, получаем зависимости

$$\frac{dF}{d\alpha_1}=-\frac{c_1}{(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2}},\frac{dF}{d\alpha_2}=-\frac{c_2}{(1-c_1^2-c_2^2)^{1/2}},$$
$$c_1=-\frac{\partial F/\partial\alpha_1}{[1+(\partial F/\partial\alpha_1)^2+(\partial F/\partial\alpha_2)^2]^{1/2}},\ c_2=-\frac{\partial F/\partial\alpha_2}{[1+(\partial F/\partial\alpha_1)^2+(\partial F/\partial\alpha_2)^2]^{1/2}}. \qquad (20)$$

Подставив (20) в (16), получим

$$\xi_j=-\frac{\partial F/\partial\alpha_j}{[1+(\partial F/\partial\alpha_1)^2+(\partial F/\partial\alpha_2)^2]^{1/2}}(w-w_0)+\alpha_j,(j=1,2),$$
$$\xi_3=-\frac{1}{[1+(\partial F/\partial\alpha_1)^2+(\partial F/\partial\alpha_2)^2]^{1/2}}(w-w_0)+F. \qquad (21)$$

Исключив из соотношений (21) α_1,α_2, найдем $w(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

Например, пусть $F=[1-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)]^{1/2}$, тогда исключив из соотношений (21) $\alpha_j,(j=1,2)$, получаем $w(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=w_0+1-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2$.

Другой подход к решению уравнения потенциала

Рассмотрим частный случай геометрического подхода для уравнения (2) [5]. Положим, что $\psi=\Gamma.$ Перепишем уравнение (2) в виде

$$\Gamma_1^2\Gamma_{11}+\Gamma_2^2\Gamma_{22}+\Gamma_3^2\Gamma_{33}+2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_{12}+2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_{13}+2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_{23}-(\gamma-1)[\Gamma-0,5(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2)]\times$$
$$\times(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33})=\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2-3(\gamma-1)[\Gamma-0,5(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2)]. \qquad (22)$$

Положим, что правая и левая часть соотношения (22) по отдельности равны $f(\Gamma)$, где $f(\Gamma)$ – некоторая функция. Находя $(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2)$ из соотношения $\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2-$ $-3(\gamma-1)[\Gamma-0,5(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2)]=f(\Gamma)$, получим

$$\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2=2[f(\Gamma)+3(\gamma-1)\Gamma]/(3\gamma-1)=g(\Gamma). \qquad (23)$$

Уравнение (2) обратится в тождество, если

$$\Gamma_1^2\Gamma_{11}+\Gamma_2^2\Gamma_{22}+\Gamma_3^2\Gamma_{33}+2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_{12}+2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_{13}+2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_{23}-$$
$$-(\gamma-1)[\Gamma-0,5(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2)](\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33})=f(\Gamma)=0,5(3\gamma-1)g(\Gamma)-3(\gamma-1)\Gamma. \quad (24)$$

Выпишем дифференциальные следствия соотношения (23): $\Gamma_1\Gamma_{11}+\Gamma_2\Gamma_{21}+\Gamma_3\Gamma_{31}=0,5\Gamma_1 g'$, $\Gamma_1\Gamma_{12}+\Gamma_2\Gamma_{22}+\Gamma_3\Gamma_{32}=0,5\Gamma_2 g'$, $\Gamma_1\Gamma_{13}+\Gamma_2\Gamma_{23}+\Gamma_3\Gamma_{33}=0,5\Gamma_3 g'$. Умножим эти выражения на $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ соответственно и сложим. Получим, что

$$\Gamma_1^2\Gamma_{11}+\Gamma_2^2\Gamma_{22}+\Gamma_3^2\Gamma_{33}+2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_{12}+2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_{13}+2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_{23}=0,5gg'. \quad (25)$$

В (24) подставим вместо $\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2$ и $\Gamma_1^2\Gamma_{11}+\Gamma_2^2\Gamma_{22}+\Gamma_3^2\Gamma_{33}+$ $+2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_{12}+2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_{13}+2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_{23}$ их значения из (23) и (25) и найдем из полученного соотношения выражение $\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33}$. Имеем

$$\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33}=[0,5gg'-0,5(3\gamma-1)g+3(\gamma-1)\Gamma]/[(\gamma-1)(\Gamma-0,5g)]. \quad (26).$$

Таким образом, решение уравнения (1) сведено к решению системы уравнений (23), (26).

Покажем, что для решения этой системы можно использовать расширенную систему уравнений характеристик уравнения (23). Выпишем расширенную систему уравнений характеристик для уравнения (23), выбрав в качестве параметра, меняющегося вдоль характеристики, переменную Г, аналогично тому, как это делалось при рассмотрении уравнения (8). Потребуем, чтобы уравнение (26) выполнялось тождественно вдоль характеристик. Добавим полученное соотношение к расширенной системе уравнений характеристик и заменим в ней вторые производные $\Gamma_{12},\Gamma_{13},\Gamma_{23}$ их выражениями, полученными из дифференциальных следствий уравнения (23)). Придем к системе ОДУ для определения функций $\xi_i,\Gamma_i,\Gamma_{ii},g(\Gamma),(i=1,2,3)$

$$\frac{d\xi_i}{d\Gamma}=\frac{\Gamma_i}{g},\frac{d\Gamma_i}{d\Gamma}=\frac{g'}{2g}\Gamma_i,(i=1,2,3),\ \frac{dg}{d\Gamma}=\frac{(\gamma-1)(\Gamma-0,5g)(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33})+0,5(3\gamma-1)g-3(\gamma-1)\Gamma}{0,5g},$$

$$\frac{d\Gamma_{11}}{d\Gamma}=-\Gamma_{11}\left(\frac{\Gamma_1}{g}\right)_1-\Gamma_{12}\left(\frac{\Gamma_2}{g}\right)_1-\Gamma_{13}\left(\frac{\Gamma_3}{g}\right)_1+\left(\frac{g'}{2g}\right)'\Gamma_1^2+\frac{g'}{2g}\Gamma_{11},$$

$$\frac{d\Gamma_{22}}{d\Gamma}=-\Gamma_{12}\left(\frac{\Gamma_1}{g}\right)_2-\Gamma_{22}\left(\frac{\Gamma_2}{g}\right)_2-\Gamma_{23}\left(\frac{\Gamma_3}{g}\right)_2+\left(\frac{g'}{2g}\right)'\Gamma_2^2+\frac{g'}{2g}\Gamma_{22},$$

$$\frac{d\Gamma_{33}}{d\Gamma}=-\Gamma_{13}\left(\frac{\Gamma_1}{g}\right)_3-\Gamma_{23}\left(\frac{\Gamma_2}{g}\right)_3-\Gamma_{33}\left(\frac{\Gamma_3}{g}\right)_3+\left(\frac{g'}{2g}\right)'\Gamma_3^2+\frac{g'}{2g}\Gamma_{33}.$$

В общем случае, если на начальном многообразии будут выполняться соотношения (23), (26), то поверхность, полученная проведением характеристик через каждую точку такого многообразия, будет задавать решение системы (23),(26) [3,4] и, следовательно, будет являться точным решением уравнения (1).

Определим, в частности, вид ряда функций $g(\Gamma)$, при которых система уравнений (23), (26) совместна.

Теорема. Если функция $g(\Gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$g'=[(3\gamma-1)g-6(g-1)\Gamma]/[0,5(\gamma+1)g-(\gamma-1)\Gamma], \quad (27)$$

то решения уравнения (23), для которых на начальном многообразии выполняется соотношение (26), являются решениями уравнения (1).

Доказательство. Рассмотрим одно частное решение системы (23), (26). Пусть $\Gamma_{ii}=\Gamma_i^2+f_i(\Gamma)$, где $f_i(\Gamma)$ – произвольные функции, (i = 1, 2, 3). Тогда, полагая, $\Gamma_i=p(\Gamma)$, сделаем такую замену и решим полученное линейное уравнение для функции $p(\Gamma)$. Придем к зависимости

$$\sum_{i=1}^{3}\Gamma_i^2=e^{2\Gamma}\left[\sum_{i=1}^{3}\eta_i+2\int\left(\sum_{i=1}^{3}f_i\right)e^{-2\Gamma}d\Gamma\right],\eta_i=\text{const}. \quad (28)$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{3} \Gamma_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_1^2 + \sum_{i=1}^{3} f_i(\Gamma)$ и подставляя в это соотношение (28), получим, что уравнения (23), (26) обращаются в тождества, если

$$\sum_{i=1}^{3} f_i = \frac{0,5gg' - 0,5(3\gamma-1)g + 3(\gamma-1)\Gamma}{(\gamma-1)(\Gamma-0,5g)} - g, \quad g' = \frac{(3\gamma-1)g - 6(\gamma-1)\Gamma}{0,5(\gamma+1)g - (\gamma-1)\Gamma},$$

что и требовалось доказать.

Для таких функций $g(\Gamma)$ некоторое подмножество решений уравнения (23) будет удовлетворять уравнению (2) [4].

Выпишем решение уравнения (24) через параметр $u = g/\Gamma$, полагая, что $(1<\gamma<2)$

$$\Gamma = \left\{ \frac{u-2}{[u-6(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{(\gamma-1)}} \right\}^{1/(\gamma-2)}, \quad g = u\Gamma. \tag{29}$$

Для квадрата скорости звука в случае, когда выполняются условия (29), получаем [1]

$$c^2 = (\gamma-1)\left(\Gamma - 0,5\sum_{i=1}^{3} \Gamma_i^2 \right) = -\frac{\gamma-1}{2}\left[\frac{u-6(\gamma-1)/(\gamma+1)}{u-2} \right]^{(\gamma-1)/(2-\gamma)}. \tag{30}$$

Из формулы (30) замечаем, что она имеет смысл ($c^2>0$) только тогда, когда $6(\gamma-1)/(\gamma+1)<u<2$. Это условие выполняется, например, для гелия $(\gamma=1,667)$ или метана $(\gamma=1,304)$ [6]. Для таких газов имеем $c\to\infty$, если $u\to 2$. Выпишем уравнение (23) в виде $\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2 = g(\Gamma(u)) = G(u)$. Решая это уравнение, получим выражения для определения $\xi_i, (i=1,2,3)$ (см. (16)). В этих выражениях

$$w = \int \frac{du}{G^{1/2}} = \int \frac{[u-6(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{(\gamma-1)/2(2-\gamma)}}{u^{1/2}(u-2)^{(\gamma-1)/2(2-\gamma)}}du.$$

Задавая вид функций $a_i(\alpha_1,\alpha_2), c_i(\alpha_1,\alpha_2)$ (см. пункт о поверхностях уровня) и исключив из (16) переменные $\alpha_1,\alpha_{2.}$, получим $u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и, следовательно, $c(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

Заключение

Применение геометрического метода и его частного случая, когда поверхность уровня совпадает с решением уравнения, позволило получить ряд точных решений уравнения потенциала в автомодельных переменных, которые можно использовать для решения некоторых начальных и краевых задач, в частности, для решения задачи о безударном сжатии газа.

Литература

1. Сидоров, А.Ф. Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа / А.Ф. Сидоров // Доклады РАН. – 1999. – Т. 364, № 2. – С. 199–202.

2. Рубина, Л.И. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. – Т. 16, № 2. – С. 209–225.

3. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

4. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М: Наука, 1965. – 703 с.

5. Рубина, Л.И. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 5. – С. 1091–1101.

6. Fluid dynamics: The handbook / ed. by Richard W. Johnson. CRC Press, Boca Raton, FL, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

Поступила в редакцию 26 января 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 3, pp. 30–38

TWO APPROACHES TO SOLVING THE POTENTIAL EQUATION IN SELF-SIMILAR VARIABLES

L.I. Rubina[1]*, O.N. Ul'yanov*[2]

The authors, using the method previously proposed by them, investigate the general velocity potential equation for the case of three self-similar variables. Two approaches of this method are used. The first approach assumes that the solution depends only on one variable, which, in turn, is an unknown function of all independent variables, and thus potential equation is reduced to the ODE. Finding unknown function is based on a study of the corresponding overdetermined system of partial differential equations. A number of compatibility conditions for the system are found. Some exact solutions are constructed. It is shown how the solutions obtained can be used in considering the problem of shock-free compression of the gas. The second approach assumes that the function is known and coincides with the function that gives a solution of the potential equation. It is also received a number of exact solutions that can be used to solve some initial and boundary value problems.

Keywords: nonlinear partial differential equations; geometric method of research; reducing a partial differential equation to ODE; exact solutions.

References

1. Sidorov A.F. *Doklady RAN.* 1999. Vol. 364, no. 2. pp. 199–202. (in Russ.).

2. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 209–225. (in Russ.).

3. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* (Partial Differential Equations). Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.

4. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* (Handbook of Ordinary Differential Equations). Moscow, Nauka Publ., 1965. 703 p.

5. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Siberian Mathematical Journal.* 2012. Vol. 53, no. 5. C. 872–881. DOI: 10.1134/S0037446612050126

6. Johnson, R.W. (Ed.): *The Handbook of Fluid Dynamics*. CRC Press, Boca Raton, FL, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

Received 26 January 2015

[1] Rubina Liudmila Ilinichna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch).
E-mail: rli@imm.uran.ru

[2] Ul'yanov Oleg Nikolaevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, University's academic secretary, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch), Associate Professor, Ural Federal University.
E-mail: secretary@imm.uran.ru