УДК 517.948

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ НЕВЯЗКИ

А.И. Сидикова[1], Е.Ю. Вишняков[2], А.А. Ершова[3]

Получена оценка погрешности приближенного решения интегрального уравнения методом невязки. Произведена дискретизация интегрального уравнения и учтена погрешность дискретизации.

Ключевые слова: регуляризация; модуль непрерывности; оценка погрешности; некорректная задача; принцип невязки.

Введение

Многие задачи математической физики, анализа и геофизики сводятся к интегральным уравнениям первого рода. Эти уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач, теория которых в настоящее время интенсивно развивается. Одним из эффективных методов решения таких задач является метод невязки [1]. Эффективность этого метода заключается в его эквивалентности методу регуляризации с параметром, определенным принципом невязки [2, 3].

Так как при решении интегральных уравнений важную роль играет их дискретизация [4–7], то в данной статье при разработке алгоритма учтена погрешность дискретизации интегральных уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds = f(t); \quad c \le t < d, \tag{1}$$

где $P(s,t)$, $P_t^{'}(s,t) \in C\big([a,b]\times[c,d)\big)$; $u(s) \in L_2[a,b]$, $f(t) \in L_2[c,d)$, d может быть равно ∞. Ядро оператора $P(s,t)$ предположим замкнутым. Пусть при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M_r,

$$M_r = \left\{u(s), u^{[l]}(s) \in L_2[a,b], u(a) = u^{'}(a) = \ldots u^{[l-1]}(a) = u(b) = u^{'}(b) = \ldots = u^{[l-1]}(b) = 0, \|u(s)\|^2_{W_2^{[l]}} \le r\right\}. \tag{2}$$

Из замкнутости ядра $P(s,t)$ будет следовать единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c,d)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2} \le \delta.$$

Требуется по $f_\delta(t), \delta$ и M_r определить приближенное решение $u_\delta(s)$ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространстве $L_2[a,b]$.

Введем оператор *B*, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ формулой

$$u(s) = Bv(s) = \underbrace{\int_a^s \ldots \int_a^s}_{l} v(\theta)d\theta, v(s), \quad Bv(s) \in L_2[a,b], \tag{3}$$

и оператор C

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a,b], \quad Cv(s) \in L_2[c,d). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

---

[1] Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: 7413604@mail.ru

[2] Вишняков Евгений Юрьевич – аспирант, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.
evgvish@yandex.ru

[3] Ершова Анна Александровна – аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: anya.erygina@ya.ru

$$Cv(s)=\int_a^b K(s,t)v(s)ds,\ \ \text{где}\ K(s,t)=\underbrace{\int_b^s\ldots\int_a^\xi}_{l} P(\theta,t)\,d\theta. \tag{5}$$

Для замены оператора C конечномерным оператором сначала предположим существование функции $g(t)\in L_2[c,d)$, такой, что для любых $s\in[a,b]$ и $t\in[c,d)$

$$|K(s,t)|\le g(t). \tag{6}$$

Затем ядро $K(s,t)$ заменим ядром $K_\varepsilon(s,t)$, таким, что

$$K_\varepsilon(s,t)=\begin{cases}K(s,t);\ \ a\le s\le b,\ \ c\le t\le d_\varepsilon;\\ 0;\ \ t>d_\varepsilon,\end{cases} \tag{7}$$

где

$$\int_{d_\varepsilon}^{d} g^2(t)dt\le\varepsilon^2, \tag{8}$$

а также введем функцию $N(t)$

$$N(t)=\max_{a\le s\le b}\left|K_s^{'}(s,t)\right|;\qquad c\le t\le d_\varepsilon \tag{9}$$

и число N_1

$$N_1=\max\left\{\left|K_t^{'}(s,t)\right|: a\le s\le b,\ \ c\le t\le d_\varepsilon\right\}. \tag{10}$$

Так как $P(s,t)$ и $P_t^{'}(s,t)\in C\left([a,b]\times[c,d_\varepsilon]\right)$, то из (9) и (10) следует существование числа N_1 и $N(t)\in C[c,d_\varepsilon]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $s_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}$, $i=0,1,\ldots,n-1$, а также отрезок $[c,d_\varepsilon]$ на m равных частей точками $t_j=c+\dfrac{j(d_\varepsilon-c)}{m}$; $j=0,1,\ldots,m-1$.

Теперь введем функции

$$\overline{K}_i(t)=K_\varepsilon(s_i,t), \tag{11}$$

$$\hat{K}_n(s,t)=\overline{K}_i(t);\ \ s_i\le s\le s_{i+1},\ \ t\in[c,d_\varepsilon],\ \ i=0,1,\ldots,n-1, \tag{12}$$

$$\hat{K}_{n,m}(s,t)=\overline{K}_i(t_j); s_i\le s<s_{i+1}, t_j\le t<t_{j+1}. \tag{13}$$

Используя формулы (11)–(13), определим операторы $\hat{C}_n$ и $\hat{C}_{n,m}$

$$\hat{C}_n v(s)=\int_a^b \hat{K}_n(s,t)v(s)ds;\ \ t\in[c,d_\varepsilon], \tag{14}$$

$$\hat{C}_{n,m} v(s)=\int_a^b \hat{K}_{n,m}(s,t)v(s)ds,\ \ t\in[c,d_\varepsilon] \tag{15}$$

и предположим, что эти операторы отображают пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d)$, дополнив значения этих операторов при $t>d_\varepsilon$ нулем.

Для удобства оператор с ядром $K_\varepsilon(s,t)$ обозначим через C_ε и перейдем к оценке величины $\left\|\hat{C}_{n,m}-C\right\|$. Для этого используем неравенство

$$\left\|\hat{C}_{n,m}-C\right\|\le\left\|C-C_\varepsilon\right\|+\left\|C_\varepsilon-\hat{C}_n\right\|+\left\|\hat{C}_n-\hat{C}_{n,m}\right\|. \tag{16}$$

Из (6)–(8) следует, что

$$\left\|C-C_\varepsilon\right\|\le\varepsilon. \tag{17}$$

Так как

$$\left|\hat{K}_{n,m}(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right|\le\left|\bar{K}_i(t)-\bar{K}_i(t_j)\right|, \tag{18}$$

при $s_i \le s < s_{i+1}$ и $t_j \le t < t_{j+1}$, $i=0,1,...,n-1$, $j=0,1,...,m-1$, а

$$\left|\bar{K}_i(t)-\bar{K}_i(t_j)\right|=N_1\frac{d_\varepsilon-c}{m},$$

то из (18) получим

$$\left|\hat{K}_{n,m}(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right|\le N_1\frac{d_\varepsilon-c}{m}. \tag{19}$$

Ввиду того, что

$$\left\|\hat{C}_n-\hat{C}_{n,m}\right\|=\sup_{\|v\|\le1}\left\|\hat{C}_n v-C_{n,m}v\right\|,$$

следует

$$\left\|\hat{C}_{n,m}-\hat{C}_n\right\|\le\sup_{\|v\|\le1}\int_c^{d_\varepsilon}\left[\int_a^b\left|\hat{K}_{n,m}(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right|\left|v(s)\right|ds\right]^2dt\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\left\|\hat{C}_{n,m}-\hat{C}_n\right\|^2\le N_1^2\left(\frac{d_\varepsilon-c}{m}\right)^2\int_c^{d_\varepsilon}\left[\int_a^b\left|v(s)\right|ds\right]^2dt. \tag{21}$$

Так как

$$\int_a^b\left|v(s)\right|ds\le\sqrt{b-a}\,\|v(s)\|_{L_2},$$

то из (20) следует, что

$$\left\|\hat{C}_{n,m}-\hat{C}_n\right\|\le\sqrt{(b-a)(d_\varepsilon-c)}N_1\frac{d_\varepsilon-c}{m}. \tag{22}$$

Теперь перейдем к оценке слагаемого $\left\|C_\varepsilon-\hat{C}_n\right\|$.

Так как

$$C_\varepsilon v(s)-\hat{C}_n v(s)=\int_a^b\left(K_\varepsilon(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right)v(s)ds,$$

а

$$\left\|\hat{C}_n-C_\varepsilon\right\|=\sup\left\{\int_c^{d_\varepsilon}\left[\int_a^b\left|K_\varepsilon(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right|\left|v(s)\right|ds\right]^2dt:\|v\|\le1\right\},$$

то учитывая (9), (11), (12) и

$$\int_a^b\left|K_\varepsilon(s,t)-\hat{K}_n(s,t)\right|\left|v(s)\right|ds\le\int_a^b\left|K_\varepsilon(s,t)-K_\varepsilon(s_i,t)\right|\left|v(s)\right|ds\le\frac{b-a}{n}N(t)\int_a^b\left|v(s)\right|ds,$$

получим, что

$$\left\|C_\varepsilon v(s)-\hat{C}_n v(s)\right\|^2\le\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\int_c^{d_\varepsilon}N^2(t)\left[\int_a^b v(s)ds\right]^2dt. \tag{23}$$

Из того, что $\|v(s)\|\le1$, а $\int_a^b\left|v(s)\right|ds\le\sqrt{b-a}\,\|v(s)\|$, учитывая (23), получим

$$\left\|\hat{C}_n-C_\varepsilon\right\|\le\sqrt{b-a}\,\|N(t)\|_{L_2}\frac{b-a}{n}. \tag{24}$$

Таким образом, из (17), (22) и (24) следует, что

$$\left\|C-\hat{C}_{n,m}\right\|\le\varepsilon+\sqrt{(b-a)(d_\varepsilon-c)}N_1\frac{d_\varepsilon-c}{m}+\sqrt{b-a}\,\|N(t)\|_{L_2}\frac{b-a}{n}.$$

В дальнейшем через $\eta_{n,m}$, обозначим величину, удовлетворяющую соотношению

$$\eta_{n,m} \geq \varepsilon + \sqrt{(b-a)(d_\varepsilon - c)} N_1 \frac{d_\varepsilon - c}{m} + \sqrt{b-a} \left\| N(t) \right\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \tag{25}$$

2. Метод невязки

Введем конечномерное подпространство X_n пространства $L_2[a,b]$, состоящее из функций постоянных на промежутках $\left[s_i, s_{i+1}\right)$, $i = 0,1,...,n-1$, а также подпространство Y_m пространства $L_2[c,d_\varepsilon]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $\left[t_j, t_{j+1}\right)$, $j = 0,1,...,m-1$. Через $pr(\cdot\ ;Y_m)$ обозначим оператор метрического проектирования пространства $L_2\left[c,d_\varepsilon\right]$ на Y_m.

Для решения уравнения (1) воспользуемся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова, приведенного в [8]

$$\inf\left\{ \left\| \hat{C}_{n,m} v(s) - f_\delta^m(t) \right\|^2 + \alpha \int_a^b v^2(s)ds : \ v(s) \in L_2[a,b] \right\}, \alpha > 0, \tag{26}$$

где $f_\delta^m(t) = pr(f_\delta; Y_m)$.

Известно, что задача (26) имеет единственное решение $v_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в решении $v_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)$ задачи (26) выберем из принципа невязки [1].

$$\left\| \hat{C}_{n,m} v_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s) - f_\delta^m(t) \right\| = r\eta_{n,m} + \delta. \tag{27}$$

Известно, что при условии

$$\left\| f_\delta^m(t) \right\| > r\eta_{n,m} + \delta$$

существует единственное решение $\hat{\alpha}\left(\hat{C}_{n,m},\ \ f_\delta(t),\ \ r\eta_{n,m} + \delta\right)$ уравнения (27).

Если решение $v_{\delta,\eta_{n,m}}^{\hat{\alpha}(\hat{C}_{n,m}, f_\delta(t), r\eta_{n,m}+\delta)}(s)$ задачи (26), (27) обозначим через $v_{\delta\eta_{n,m}}(s)$, то приближенное решение $u_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид

$$u_{\delta,\eta_{n,m}}(s) = Bv_{\delta,\eta_{n,m}}(s). \tag{28}$$

Из (11), (13) и (15) следует, что

$$\hat{C}_{n,m} v(s) = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) v_i, t \in [t_j, t_{j+1}), \ j = 0,1,...,m-1, \tag{29}$$

где

$$v_i = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)ds. \tag{30}$$

Из вида оператора $pr(\cdot;Y_m)$ следует, что

$$f_\delta^m(t) = \left\{ f_j : t_j \leq t < t_{j+1}, \ j = 0,1,...,m-1 \right\}, \tag{31}$$

где $f_j = \sqrt{\dfrac{m}{d_\varepsilon - c}} \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)dt.$

Через $\{\varphi_i(s)\}$ обозначим ортонормированный базис пространства X_n,

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{b-a}}; & s_i \leq s < s_{i+1} \\ 0; s \notin \left[s_i, s_{i+1}\right), & i = 0,1,...,n-1, \end{cases} \tag{32}$$

а через $\left\{\phi_j(t)\right\}$ базис пространства Y_m,

$$\phi_j(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{d_\varepsilon-c}};t_j\le t<t_{j+1}\\ 0;t\notin\left[t_j;t_{j+1}\right),\quad j=0,1,...,m-1.\end{cases}\tag{33}$$

Лемма 1. Пусть величины v_i, $i=0,1,...,n-1$, определены формулой (30). Тогда для любой функции $v(s)\in L_2[a,b]$ справедливо соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1}v_i^2\le\int_a^b v^2(s)ds.$$

Доказательство. Из формул (30) и (32) следует, что

$$\left|v_i\right|\le\int_{s_i}^{s_{i+1}}\varphi_i(s)\left|v(s)\right|ds\le\left\|\varphi_i(s)\right\|\left\{\int_{s_i}^{s_{i+1}}v^2(s)ds\right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{34}$$

Из (34) следует, что

$$v_i^2\le\int_{s_i}^{s_{i+1}}v^2(s)ds$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1}v_i^2\le\int_a^b v^2(s)ds\,.$$

Тем самым лемма доказана.

Наряду с задачей (26) рассмотрим задачу

$$\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\left\|\hat{v}(s)\right\|^2:\hat{v}(s)\in X_n\right\},\tag{35}$$

где $f_\delta^m(t)=pr\left(f_\delta,Y_m\right)$.

В одной из теорем [8] доказано существование и единственность решения $\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)$ задачи (35).

Лемма 2. Вариационные задачи (26) и (35) эквивалентны.

Доказательство. Так как $X_n\subset L_2[a,b]$, то

$$\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\left\|v(s)\right\|^2:v(s)\in L_2[a,b]\right\}\le\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\left\|v(s)\right\|^2:v(s)\in X_n\right\}.\tag{36}$$

Из (29) следует, что для любого $v(s)\in L_2[a,b]$

$$\hat{C}_{n,m}v(s)=\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)v_i;t\in[t_j,t_{j+1}),\quad j=0,1,...,m-1\,.$$

Положив $\hat{v}(s)=\sum_{i=0}^{n-1}v_i\varphi_i(s)$ получим, что

$$\hat{v}(s)\in X_n$$

и

$$\hat{C}_{n,m}v(s)=\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)v_i;t\in[t_j,t_{j+1}),\quad j=0,1,...,m-1\,.\tag{37}$$

Из (36), (37) и леммы 1 следует, что для любого $v(s)\in L_2[a,b]$ найдется $\hat{v}(s)\in X_n$ такой, что

$$\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2=\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2\tag{38}$$

и

$$\alpha\|v(s)\|^2 \geq \alpha\|\hat{v}(s)\|^2. \qquad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что для любого $v(s)\in L_2[a,b]$ существует $\hat{v}(s)\in X_n$ такой, что

$$\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|v(s)\|^2 \geq \left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|\hat{v}(s)\|^2. \qquad (40)$$

Из (40) следует, что

$$\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|v(s)\|^2 : v(s)\in L_2[a,b]\right\} \geq \left\{\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|\hat{v}(s)\|^2 : \hat{v}(s)\in X_n\right\}. \quad (41)$$

Из (36) и (41) получим

$$\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}v(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|v(s)\|^2 : v(s)\in L_2[a,b]\right\} = \left\{\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|\hat{v}(s)\|^2 : \hat{v}(s)\in X_n\right\}. \quad (42)$$

Так как решения задач (26) и (35) единственны, то из (42) следует эквивалентность этих задач. Тем самым лемма доказана.

Рассмотрим задачу

$$\inf\left\{\frac{d_\varepsilon-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)v_i-f_j\right]^2+\alpha\sum_{i=0}^{n-1}v_i^2 : (v_i)\in R^n\right\}, \qquad (43)$$

где $f_j=\sqrt{\dfrac{m}{d_\varepsilon-c}}\displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)dt$.

Из [4] следует, что для любого $\alpha>0$ существует единственное решение $\left(\bar{v}_i^\alpha\right)\in R^n$ задачи (43).

Кроме того, задача (43) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}b_{ik}v_i+\alpha v_k=g_k;\quad k=0,1,\dots,n-1, \qquad (44)$$

где $b_{ik}=\dfrac{d_\varepsilon-c}{m}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}\bar{K}_i(t_j)\bar{K}_k(t_j)$, а $g_k=\dfrac{d_\varepsilon-c}{m}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}\bar{K}_k\left(t_j\right)f_j$.

Теперь введем операторы J_1 и J_2, отображающие пространства R^n на X_n и R^m на Y_m, соответственно, формулами

$$J_1\left[(x_i)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}x_i\varphi_i(s);\ (x_i)\in R^n,\ J_1\left[(x_i)\right]\in X_n, \qquad (45)$$

$$J_2\left[(y_j)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}y_j\phi_j(t);\ (y_j)\in R^m,\ J_2\left[(y_j)\right]\in Y_m, \qquad (46)$$

где $\varphi_i(s)$ определены формулой (32), а $\phi_j(t)$ формулой (33).

Так как системы $\{\varphi_i(s)\}$ и $\{\phi_j(t)\}$ ортонормированы в X_n и Y_m соответственно, то операторы J_1 и J_2, определяемые формулами (45) и (46), изометричны.

Теорема 1. Пусть операторы J_1 и J_2 определены формулами (45) и (46), а $\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)$ и $\left(\bar{v}_i^\alpha\right)$ – решения задач (35) и (43) соответственно. Тогда

$$\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)=J_1\left[\left(\bar{v}_i^\alpha\right)\right].$$

Доказательство. Пусть $\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)$ решение задачи (35). Тогда

$$\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\left\|\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha\right\|^2=\inf\left\{\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}(s)-f_\delta^m(t)\right\|^2+\alpha\|\hat{v}(s)\|^2 : \hat{v}(s)\in X_n\right\}. \qquad (47)$$

Если $\left(\hat{v}_i^\alpha\right)=J_1^{-1}\left[\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}^\alpha(s)\right]$, то

$$\frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i\left(t_j\right)\hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 = \left\|J_2^{-1}\hat{C}_{n,m}J_1J_1^{-1}\hat{v}^\alpha_{\delta,\eta_{n.m}}(s) - J_2^{-1}f_\delta^m(t)\right\|^2. \quad (48)$$

Из (48) и изометричности операторов J_1 и J_2 следует, что

$$\left\|\hat{C}_{n,m}\hat{v}^\alpha_{\delta,\eta_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\right\|^2 + \alpha\left\|\hat{v}^\alpha_{\delta,\eta_{n,m}}(s)\right\|^2 = \frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)\hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\left(\hat{v}_i^\alpha\right)^2. \quad (49)$$

Теперь покажем, что $\left(\hat{v}_i^\alpha\right)$ является решением задачи (43).

Предположим противное, то есть найдется вектор $\left(v_i^{'}\right) \in R^n$ такой, что

$$\frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)v_i^{'} - f_j\right]^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\left(v_i^{'}\right)^2 < \frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)\hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\left(\hat{v}_i^\alpha\right)^2. \quad (50)$$

Тогда, положив

$$\bar{v}(s) = J_1\left[\left(v_i^{'}\right)\right],$$

и используя (49), получим

$$\left\|\hat{C}_{n,m}\bar{v}(s) - f_\delta^m(t)\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{v}(s)\right\|^2 = \frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i(t_j)v_i^{'} - f_j\right]^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\left(v_i^{'}\right)^2,$$

что, наряду с (50), противоречит (47).

Таким образом, $\left(\hat{v}_i^\alpha\right) = J_1^{-1}\left[\left(\hat{v}^\alpha_{\delta,\eta_{n,m}}(s)\right)\right]$ является решением задачи (43).

Тем самым теорема доказана.

Так как из леммы 2 и теоремы 1 будет следовать, что вариационная задача (26) с помощью отображений J_1 и J_2 может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений (44), то решив последнюю, получим $\left(\bar{v}_i^\alpha\right) \in R^n$.

Для определения параметра регуляризации $\bar{\alpha}\left(\hat{C}_{n,m}, f_\delta(t), r\eta_{n,m} + \delta\right)$ в этом решении, воспользуемся уравнением (27), которое, используя операторы J_1 и J_2, сведем к следующему

$$\frac{d_\varepsilon - c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{K}_i\left(t_j\right)\hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 = \left(r\eta_{n,m} + \delta\right)^2. \quad (51)$$

При условии $\left\|f_\delta^m(t)\right\| > r\eta_{n,m} + \delta$ существует единственное решение $\bar{\alpha}\left(\hat{C}_{n,m}, f_\delta(t), r\eta_{n,m} + \delta\right)$ уравнения (51).

Окончательно, приближенное решение $\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ уравнения (1) определим формулой

$$\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s) = B\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}(s),$$

где $\hat{v}_{\delta,\eta_{n,m}}(s) = J_1\left[\left(\bar{v}_i^{\bar{\alpha}}\right)\right]$, $\left(\bar{v}_i^{\bar{\alpha}}\right)$ – решение системы линейных алгебраических уравнений (44), а $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\left(\hat{C}_{n,m}, f_\delta(t), r\eta_{n,m} + \delta\right)$ решение уравнения (51).

3. Оценка погрешности приближенного решения $\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ уравнения (1)

Для вывода оценки погрешности приближенного решения $\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ уравнения (1), введем функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup\left\{\|u\| : u = Bv, \|v\| \le r, \|Au\| \le \tau\right\}, \quad \tau, r > 0.$$

Из теоремы, сформулированной в [9], следует, что

$$\left\|\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s) - u_0(s)\right\| \le 2\omega(r\eta_{n,m} + \delta, r),$$

где $\hat{u}_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ – приближенное решение уравнения (1), а $u_0(s)$ – его точное решение.

Литература

1. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170–175.
2. Морозов, В.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации / В.А. Морозов // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 295–309.
3. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.
4. Гончарский, А.В. Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач / А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Ягола // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 4. – С. 1022–1027.
5. Васин, В.В. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач / В.В.Васин, В.П. Танана //ДАН СССР. – 1974. – Т. 215, № 5. – С. 1032–1034.
6. Васин, В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов / В.В. Васин // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 11–21.
7. Танана, В.П. Проекционные методы и конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач / В.П. Танана // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16, № 6. – С. 1301–1307.
8. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
9. Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач/ В.П. Танана // ДАН СССР. – 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1035–1038.

Поступила в редакцию 24 марта 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 3, pp. 39–47

ERROR ESTIMATION OF APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION BY RESIDUAL METHOD

A.I. Sidikova[1], E.Yu. Vishnyakov[2], A.A. Ershova[3]

Error estimation of approximate solution is obtained for integral equation by residual method. Discretization of integral equation is performed and discretization error is estimated.

Keywords: regularity, module of continuity, error estimation, ill-posed problem, residual principle.

References

1. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1966. Vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russ.).
2. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1968. Vol. 8, no. 2. pp. 295–309. (in Russ.).
3. Ivanov V.K. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1966. Vol. 6, no. 6. pp. 1089–1094. (in Russ.).

---

[1] Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: 7413604@mail.ru
[2] Vishnyakov Evgeniy Yur'evich is Post-graduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: evgvish@yandex.ru
[3] Ershova Anna Aleksandrovna is Post-graduate Student, Department of Theory of Management and Optimization, Chelyabinsk State University.
E-mail: anya.erygina@ya.ru

4. Goncharskiy A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1974. Vol. 14, no. 4. pp. 1022–1027. (in Russ.).

5. Vasin V.V., Tanana V.P. *DAN SSSR*. 1974. Vol. 215, no. 5. pp. 1032–1034. (in Russ.).

6. Vasin V.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1979. Vol. 19, no. 1. pp. 11–21. (in Russ.).

7. Tanana V.P. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*. 1975. Vol. 16, no. 6. pp. 1301–1307. (in Russ.).

8. Tikhonov A.N. *DAN SSSR*. 1963. Vol. 153, no. 1. pp. 49–52. (in Russ.).

9. Tanana V.P. *DAN SSSR*. 1975. Vol. 220, no. 5. pp. 1035–1038. (in Russ.).

Received 24 March 2015