УДК 511.42

МЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ В НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ[1]

М.М. Сымотюк[2], И.Я. Савка[3]

Установлены теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при исследовании нелокальных задач сопряжения для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Для доказательства оценок применен метрический подход.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; нелокальная задача сопряжения; лемма Бореля-Кантелли; мера Лебега.

1. Введение. В работах [1, 2] в прямоугольной области $D=\{(x,t):0<x<1,-\alpha<t<\beta\}$, $\alpha,\beta>0$, для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu=\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ t>0,\\ u_{tt}-u_{xx}=0,\ t<0\end{cases} \tag{1}$$

рассмотрены следующие краевые задачи сопряжения с нелокальным условием, связывающем значения искомого решения (или значения производных решения по времени) на противоположных сторонах области.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям*

$$u(x,t)\in C^1(\overline{D})\bigcap C^2(D_-)\bigcap C^{2,1}_{x,t}(D_+), \tag{2}$$

$$Lu(x,t)\equiv 0,\quad (x,t)\in D_-\bigcup D_+, \tag{3}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad -\alpha\le t\le\beta, \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha)-u(x,\beta)=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

где $D_-=D\bigcap\{t<0\}$, $D_+=D\bigcap\{t>0\}$, $\varphi(x)$ *– достаточно гладкая функция,* $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям (2)–(4) и условию*

$$u_t(x,-\alpha)-u_t(x,\beta)=\psi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{6}$$

где $\psi(x)$ *– достаточно гладкая функция, причем* $\psi(0)=\psi(1)=0$.

В работах [1, 2] доказано, что для единственности решения задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \delta_{\alpha,\beta}(k)\equiv\cos(\lambda_k\alpha)+\lambda_k\sin(\lambda_k\alpha)-\exp(-\beta\lambda_k^2)\ne 0,\ \lambda_k=\pi k. \tag{7}$$

Если условие (7) выполнено, то задача 1 имеет единственное формальное решение, представимое рядом

$$u(t,x)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin(\pi kx), \tag{9}$$

где

$$u_k(t)=\begin{cases}\varphi_k\delta^{-1}_{\alpha,\beta}(k)\exp(-\lambda_k^2 t), & t<0,\\ \varphi_k\delta^{-1}_{\alpha,\beta}(k)(\cos(\lambda_k t)-\lambda_k\sin(\lambda_k t)), & t>0,\end{cases}$$

[1] Исследования частично поддержаны Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 54.1/027).

[2] Сымотюк Михаил Михайлович – старший научный сотрудник, Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, Украина.
E-mail: quaternion@ukr.net

[3] Савка Иван Ярославович – младший научный сотрудник, Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов, Украина; ассистент, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника, Ивано-Франковск, Украина.
E-mail: s-i@ukr.net

а φ_k, $k\in\mathbb{N}$, – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе функций $\left\{\sqrt{2}\sin(\pi kx): k\in\mathbb{N}\right\}$. Если выполняется условие (7) и, кроме того, существуют такие постоянные $c_1>0$, $\gamma_1\in\mathbb{R}$, что для всех натуральных чисел k выполняется оценка

$$|\cos(\lambda_k\alpha)+\lambda_k\sin(\lambda_k\alpha)-\exp(-\beta\lambda_k^2)|\geq c_1 k^{-\gamma_1}, \tag{10}$$

можно установить классическую сходимость решения задачи 1 в случае, когда $\varphi(x)$ – достаточно гладкая функция, а также его непрерывную зависимость от правой части условия (5).

В случае, когда выполняется условие

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \Delta_{\alpha,\beta}(k)\equiv\sin(\lambda_k\alpha)-\lambda_k\cos(\lambda_k\alpha)+\lambda_k\exp(-\beta\lambda_k^2)\neq 0,$$

ряд (9), коэффициенты $u_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, которого находятся по формуле

$$u_k(t)=\begin{cases}\psi_k\lambda_k^{-1}\Delta_{\alpha,\beta}^{-1}(k)\exp(-\lambda_k^2 t), & t<0,\\ \psi_k\lambda_k^{-1}\Delta_{\alpha,\beta}^{-1}(k)(\cos(\lambda_k t)-\lambda_k\sin(\lambda_k t)), & t>0,\end{cases}$$

где ψ_k, $k\in\mathbb{N}$, – коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$ по системе $\left\{\sqrt{2}\sin(\pi kx): k\in\mathbb{N}\right\}$, определяет единственное формальное решение задачи 2. Вопрос о классической сходимости этого решения может быть сведен к вопросу о выполнении для всех $k\in\mathbb{N}$ оценки

$$|\sin(\lambda_k\alpha)-\lambda_k\cos(\lambda_k\alpha)+\lambda_k\exp(-\beta\lambda_k^2)|\geq c_2 k^{-\gamma_2} \tag{11}$$

с некоторыми постоянными $c_2>0$, $\gamma_2\in\mathbb{R}$, не зависящими от k.

Таким образом, разрешимость задач 1, 2 тесно связана с вопросом о возможности выполнения оценок (10), (11). Отметим, что в [1, 2] доказано, что в случае, когда α является рациональным числом, существует такая постоянная $c_1>0$, что оценка (10) выполняется для произвольного фиксированного $\beta>0$ для всех $k\in\mathbb{N}$ при $\gamma_1=0$. Оценка (11) выполняется с некоторой постоянной $c_2>0$ для произвольного фиксированного $\beta>0$ для всех $k\in\mathbb{N}$ при $\gamma_2=-1$, если $\alpha\in\mathbb{N}$ или $\alpha=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, q – нечетное, $p/q\notin\mathbb{N}$.

В случае, когда α – иррациональное число, вопрос о выполнении неравенств (10), (11) остается открытым (см. с. 111 в [1]). Это обусловлено, в частности, тем, что для фиксированного $\beta>0$ выражение $\delta_{\alpha,\beta}(k)$, $k\in\mathbb{N}$ имеет нетривиальное множество нулей

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_k}\left[(-1)^n\arcsin\frac{\exp(-\beta\lambda_k^2)}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}+\pi n-\gamma_k\right],\quad \gamma_k=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}},\quad n=1,2,\ldots,$$

а выражение $\Delta_{\alpha,\beta}(k)$, $k\in\mathbb{N}$, – множество нулей

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_k}\left[(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\lambda_k\exp(-\beta\lambda_k^2)}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}+\pi n+\omega_k\right],\quad \omega_k=\arcsin\frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Более того, можно доказать существование таких действительных чисел α, при которых выражения $\delta_{\alpha,\beta}(k)$, $\Delta_{\alpha,\beta}(k)$ являются отличными от нуля для всех $k\in\mathbb{N}$, но принимают сколь угодно малые значения для бесконечного количества натуральных чисел k, что свидетельствует о наличии проблемы малых знаменателей при исследовании сходимости ряда (9).

2. Формулировка основных результатов и вспомогательных утверждений. С помощью метрического подхода [3, 4] нами получены следующие результаты о выполнении оценок (10), (11) для иррациональных чисел $\alpha>0$.

Теорема А. Для произвольного фиксированного $\beta>0$ для всех иррациональных (за исключением множества лебеговой меры нуль) чисел $\alpha>0$ существует такая постоянная $c_1=c_1(\alpha)>0$, что оценка (10) выполняется для всех натуральных чисел k при $\gamma_1>0$.

Отметим, что в работе [5] был анонсирован аналогичный (более слабый) результат с показателем $\gamma_1>1$.

Теорема В. *Для произвольного фиксированного* $\beta > 0$ *для всех иррациональных (за исключением множества лебеговой меры нуль) чисел* $\alpha > 0$ *существует такая постоянная* $c_2 = c_2(\alpha) > 0$, *что оценка (11) выполняется для всех натуральных чисел* k *при* $\gamma_2 > 0$.

Для доказательства теорем А, В будем использовать вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность таких измеримых (относительно меры Лебега в* $\mathbb{R}$*) подмножеств действительной оси, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{meas} A_k < \infty .$$

Тогда мера Лебега в $\mathbb{R}$ *множества точек, попадающих в бесконечное число множеств данной последовательности, равна нулю.*

Лемма 1 известна в литературе как лемма Бореля-Кантелли; ее доказательство имеется, например, в [6].

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^1(a,b)$. *Если в каждой точке* $t \in (a,b)$ *выполняется неравенство*

$$\left| f'(t) \right| \geq \delta ,\ \delta > 0, \tag{12}$$

то для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{meas}\left\{t \in (a,b) : | f(t) | < \varepsilon\right\} \leq 2\varepsilon / \delta.$$

Доказательство. Из условия леммы 2 следует, что функция $f(t)$ является строго монотонной на (a,b). Поэтому множество $\left\{t \in (a,b) : | f(t) | < \varepsilon\right\}$ либо пусто, либо есть некоторый интервал (ξ,η), $a \leq \xi < \eta \leq b$. В первом случае $\operatorname{meas}\left\{t \in (a,b) : | f(t) | < \varepsilon\right\} = 0$. Во втором случае, по теореме Лагранжа, найдется такая точка $t_0 \in (\xi,\eta)$, что $f(\eta) - f(\xi) = f'(t_0)(\eta - \xi)$. Поскольку $| f(\xi) | \leq \varepsilon$, $| f(\eta) | \leq \varepsilon$, из последнего равенства и условия (12) получим

$$|\eta - \xi| = \frac{| f(\eta) - f(\xi) |}{| f'(t_0) |} \leq \frac{2\varepsilon}{| f'(t_0) |} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} .$$

Таким образом, $\operatorname{meas}\left\{t \in (a,b) : | f(t) | < \varepsilon\right\} \leq 2\varepsilon / \delta.$ Лемма доказана.

Отметим, что аналоги леммы 2 об оценках мер множеств $\left\{t \in (a,b) : | f(t) | < \varepsilon\right\}$ в случае гладких функций $f(t)$ с некоторой невырождающейся на (a,b) производной $f^{(n)}(t)$, а также их применения в теории диофантовых приближений содержатся в работах [3, 4, 7].

3. Доказательство теоремы А. Введем в рассмотрение функции

$$f_k(\alpha) = \cos(\lambda_k \alpha) + \lambda_k \sin(\lambda_k \alpha) - \exp(-\beta \lambda_k^2),\ k \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

и множества

$$A_k(\gamma) = \{\alpha \in [a;b] : | f_k(\alpha) | < k^{-\gamma}\},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq a < b < +\infty ,$$

считая значения β, a, b фиксированными числами. Обозначим через $A(\gamma)$ множество чисел, принадлежащих бесконечному числу множеств $A_k(\gamma)$, $k \in \mathbb{N}$.

Дифференцируя функцию $f_k(\alpha)$, получим, что

$$f_k'(\alpha) = \lambda_k^2 \cos(\lambda_k \alpha) - \lambda_k \sin(\lambda_k \alpha),\ k \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Умножив равенство (13) на $\lambda_k \sin(\lambda_k \alpha)$, а равенство (14) – на $\cos(\lambda_k \alpha)$, а затем сложив полученные равенства, найдем, что

$$\lambda_k^2 = \left(f_k(\alpha) + \exp(-\beta \lambda_k^2)\right) \lambda_k \sin(\lambda_k \alpha) + f_k'(\alpha) \cos(\lambda_k \alpha) .$$

Таким образом, в каждой точке $\alpha \in [a;b]$ выполняется неравенство

$$\lambda_k \leq 2 \max\left\{ \left| f_k(\alpha) + \exp(-\beta \lambda_k^2) \right|, \frac{\left| f_k'(\alpha) \right|}{\lambda_k} \right\}. \tag{15}$$

Легко проверить, что каждая из функций

$$g_{1k}(\alpha) \equiv f_k(\alpha) + \exp(-\beta \lambda_k^2) - \frac{f_k'(\alpha)}{\lambda_k} = \sqrt{2\lambda_k^2 + 2}\, \sin(\lambda_k \alpha - \varphi_k),\ \ \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1},\ \ k \in \mathbb{N},$$

$$g_{2k}(\alpha) \equiv f_k(\alpha) + \exp(-\beta\lambda_k^2) + \frac{f_k'(\alpha)}{\lambda_k} = \sqrt{2\lambda_k^2 + 2}\,\cos(\lambda_k\alpha - \varphi_k),\ k \in \mathbb{N},$$

может иметь на $[a;b]$ не более, чем $C_1(a,b)\lambda_k$ нулей, $C_1(a,b) = 2\max\{1; b-a\}$. В самом деле, количество нулей функции $g_{1k}(\alpha)$ (соответственно, функции $g_{2k}(\alpha)$) не превышает количества тех целых чисел m_1 (соответственно, тех целых чисел m_2), для которых выполняется неравенство $a \le \frac{\pi m_1 + \varphi_k}{\lambda_k} \le b$ (соответственно, неравенство $a \le \frac{\pi m_2 + \varphi_k + \pi/2}{\lambda_k} \le b$).

Обозначим через $\xi_1(k),\ldots,\xi_{m(k)}(k)$, $k \in \mathbb{N}$ все различные нули обеих функций $g_{1k}(\alpha)$, $g_{2k}(\alpha)$, принадлежащие промежутку $(a;b)$. Будем считать, что точки $\xi_1(k),\ldots,\xi_{m(k)}(k)$ записаны в порядке возрастания: $\xi_1(k) < \ldots < \xi_{m(k)}(k)$. Определим отрезки $I_j(k) = [\xi_j(k); \xi_{j+1}(k)]$, $j = 0,1,\ldots,m(k)$, $\xi_0(k) = a$, $\xi_{m(k)+1}(k) = b$, образующие разбиение отрезка $[a;b]$, так что $[a;b] = \bigcup_{j=0}^{m(k)} I_j(k)$. Согласно определению, на каждом из отрезков $I_j(k)$, $j = 0,1,\ldots,m(k)$ обе функции $g_{1k}(\alpha)$, $g_{2k}(\alpha)$ сохраняют знак, поэтому из неравенства (15) получим, что или

$$\forall \alpha \in I_j(k) \quad |f_k'(\alpha)| \ge \lambda_k^2/2, \tag{16}$$

или

$$\forall \alpha \in I_j(k) \quad \left|f_k(\alpha) + \exp(-\beta\lambda_k^2)\right| \ge \lambda_k/2. \tag{17}$$

Если на отрезке $I_j(k)$ выполняется условие (16), то, применяя лемму 2, найдем, что для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\operatorname{meas}(A_k(\gamma) \cap I_j(k)) \le 4\pi^{-2}k^{-\gamma-2},\quad k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Если же на отрезке $I_j(k)$ выполняется условие (17), то ни одна точка этого отрезка не может принадлежать множеству $A_k(\gamma)$ при $k \ge 2$ и $\gamma > 0$. Действительно, если $I_j(k) \cap A_k(\gamma) \ne \varnothing$, $k \ge 2$, $\gamma > 0$, то существует точка α_0, что одновременно выполняются неравенства

$$\left|f_k(\alpha_0) + \exp(-\beta\lambda_k^2)\right| \ge \lambda_k/2,\quad |f_k(\alpha_0)| \le k^{-\gamma},$$

из которых следует неравенство $\lambda_k/2 \le k^{-\gamma} + 1 \le 2$, противоречивое при $k \ge 2$ и $\gamma > 0$. Учитывая теперь очевидное равенство

$$\operatorname{meas} A_k(\gamma) = \sum_{j=0}^{m(k)} \operatorname{meas}(A_k(\gamma) \cap I_j(k)),$$

а также то, что $m(k) \le 2C_1(a,b)\lambda_k$, из оценки (18) получим

$$\operatorname{meas} A_k(\gamma) \le C_2(a,b)k^{-\gamma-1},\quad C_2(a,b) = 16\pi^{-1}C_1(a,b),\quad k \ge 2,\quad \gamma > 0.$$

Таким образом, при $\gamma > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{meas} A_k(\gamma)$ является сходящимся. Тогда в силу леммы 1 лебегова мера множества $A(\gamma)$ при $\gamma > 0$ равна нулю. Множество M действительных α-нулей всех функций $f_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, не более чем счетно, поэтому имеет нулевую меру. Следовательно, $\operatorname{meas} A(\gamma) \setminus M = 0$. Для каждого $\alpha \in A(\gamma)$ существует такое число $K(\alpha)$, что оценка $|f_k(\alpha)| \ge k^{-\gamma}$ выполняется для всех $k \ge K(\alpha)$, если, кроме того, $\alpha \notin M$, то для всех натуральных k выполняется неравенство $|f_k(\alpha)| \ge c(\alpha)k^{-\gamma}$, где $c(\alpha) = \min\{1, d(\alpha)\}$, $d(\alpha) = \min_{k<K(\alpha)} |f_k(\alpha)|k^{\gamma} > 0$. Для завершения доказательства теоремы А остается отметить, что множество $A(\gamma) \setminus (M \cup \mathbb{Q})$ имеет нулевую меру (так как множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно), а также то, что действительную ось можно покрыть счетным числом отрезков: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n-1; n]$.

Доказательство теоремы В аналогично приведенному выше доказательству теоремы А.

4. Дальнейшие обобщения. При исследовании многомерных (по пространственным переменным) аналогов задач 1, 2 возникают определители

$$\delta_{\alpha,\beta}(k) \equiv \cos(\lambda_k\alpha) + \lambda_k \sin(\lambda_k\alpha) - \exp(-\beta\lambda_k^2) \neq 0,\ \lambda_k = \pi\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2},\ k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p, \quad (19)$$

$$\Delta_{\alpha,\beta}(k) \equiv \sin(\lambda_k\alpha) - \lambda_k \cos(\lambda_k\alpha) + \lambda_k \exp(-\beta\lambda_k^2) \neq 0,\ \lambda_k = \pi\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2},\ k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p. \quad (20)$$

Представляется возможным доказать следующие гипотезы.

Гипотеза А. *Для произвольного фиксированного* $\beta > 0$ *для всех иррациональных (за исключением множества лебеговой меры нуль) чисел* $\alpha > 0$ *существует такая постоянная* $c_3 = c_3(\alpha) > 0$, *что для определителя (19) оценка*

$$|\delta_{\alpha,\beta}(k)| \geq c_3(|k_1| + \ldots + |k_p|)^{-\gamma_3},$$

выполняется для всех векторов $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p$ *при* $\gamma_1 > p-1$.

Гипотеза В. *Для произвольного фиксированного* $\beta > 0$ *для всех иррациональных (за исключением множества лебеговой меры нуль) чисел* $\alpha > 0$ *существует такая постоянная* $c_4 = c_4(\alpha) > 0$, *что для определителя (20) оценка*

$$|\Delta_{\alpha,\beta}(k)| \geq c_4(|k_1| + \ldots + |k_p|)^{-\gamma_4},$$

выполняется для всех векторов $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p$ *при* $\gamma_1 > p-1$.

Литература

1. Юнусова, Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Г.Р. Юнусова / Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2011. – № 8(89). – С. 108–117.

2. Сабитов, К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // К.Б. Сабитов / Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 4. – С. 596–602.

3. Пташник, Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

4. Берник, В.И. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа // В.И. Берник, Ю.В. Мельничук. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.

5. Симотюк, М.М. Оцінка малого знаменника задачі з нелокальною крайовою умовою для параболо-гіперболічного рівняння / М.М. Симотюк, І.Я. Савка // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». Тези доповідей (Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013 р.). – С. 83–84. (на укр. языке)

6. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.

7. Ількiв, В.С. Про константу в лемі Пяртлі / В.С. Ількiв, Т.В. Магеровська // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки». – 2007. – № 607. – С. 12–17. (на укр. языке)

Поступила в редакцию 14 июня 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 3, pp. 48–53

METRIC ESTIMATES OF SMALL DENOMINATORS IN NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

M.M. Symotyuk[1], *I.Y. Savka*[2]

The metric estimates of small denominators at the analysis of nonlocal boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation are established. We use the metric approach to prove these estimates.

Keywords: equation of mixed type; nonlocal boundary value problem; Borel–Cantelli lemma; Lebesgue measure.

References

1. Yunusova, G.R. Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2011. no. 8(89). pp. 108–117. (in Russ.).

2. Sabitov K.B. Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Mathematical Notes*. 2011. Vol. 89. Issue 4. pp. 562–567. DOI: 10.4213/mzm8462

3. Ptashnik B.I. *Nekorrektnye granichnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* (Invalid boundary value problems for differential equations with partial derivatives). Kiev, Nauk. dumka Publ., 1984. 264 p. (in Russ.).

4. Bernik V.I., Mel'nichuk Yu.V. *Diophantine approximation and Hausdorff dimension* (Diofantovy priblizheniya i razmernost' Khausdorfa). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1988. 144 p. (in Russ.).

5. Symotyuk M.M., Savka I.Ya. Assessment small denominator problem with nonlocal boundary condition for a parabolic-hyperbolic equations. *Proceedings of the Ukrainian scientific conference "Modern problems of on-probability theory and mathematical analysis." Vorokhta, February 25 – March 3, 2013).* pp. 83–84. (in Ukrainian).

6. Gikhman I.I., Skorokhod A.V., Yadrenko M.I. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* (Probability theory and mathematical statistics). Kiev, Vishcha shkola Publ., 1979. 408 p. (in Russ.).

7. Ilkiv V.S., Maherovska T.V. *Proceedings of the National University "Lviv Polytechnic". Series "Physics and mathematics".* 2007. no. 607. pp. 12–17. (in Ukrainian).

Received 14 June 2013

[1] Symotyuk Mikhail Mikhailovich is Senior Staff Scientist, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS Ukraine, L'vov, Ukraine.
E-mail: quaternion@ukr.net

[2] Savka Ivan Yaroslavovich is Junior Research Fellow, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS Ukraine, L'vov, Ukraine; Assistant, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine.
E-mail: s-i@ukr.net