УДК 519.633

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

*К.З. Хайрисламов*[1]

**Рассматривается задача моделирования течения жидкости с нелинейной вязкостью. В уравнения Навье–Стокса вводится зависимость коэффициента динамической вязкости от скоростей деформаций. Полученные уравнения решаются численным методом.**

*Ключевые слова: вязкость; вязкая жидкость; уравнения Навье–Стокса.*

## Введение

При решении задач о течении вязких жидкостей предположение о постоянстве коэффициента динамической вязкости исключает из рассмотрения такие важные с практической точки зрения вещества, как масла, смазки, растворы и т. д.

Некоторые из них могут менять свои вязкостные свойства при движении и находят применение, например, в гидроамортизаторах, гидравлических муфтах сцепления и др.

В работе исследуется изменение свойств течения жидкости вследствие зависимости коэффициента вязкости от скоростей деформаций.

## 1. Постановка задачи

Для простоты будем рассматривать влияние коэффициента вязкости на течение жидкости в двумерном случае. Пусть в некоторой области на плоскости имеется несколько регионов, занимаемых вязкой несжимаемой жидкостью. Под действием внешней силы жидкости начинают двигаться и взаимодействовать друг с другом и границами области. В начальный момент времени все скорости нулевые. На границе расчетной области (жесткая граница) выполняется условие Неймана

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0\,, \tag{1}$$

на свободной границе при отсутствии поверхностного натяжения и нулевом давлении выполняется условие

$$\left(2\mu e\right)\cdot n = 0\,. \tag{2}$$

В (1) и (2) под $n$ понимается вектор внешней нормали к границе.

Цель – смоделировать течение с помощью численного метода и сравнить поведение жидкостей с постоянной и переменной вязкостью.

## 2. Система уравнений

Система уравнений, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости, в случае двух независимых переменных $(x, y)$ может быть записана в следующем виде [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{u}) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\nabla p + \bar{N}(\bar{u}), \end{cases} \tag{3}$$

где $t$ – время; $\bar{u}$ – вектор скорости ($u, \upsilon$ – соответственно $x$- и $y$-компонента); $\operatorname{div}(\bar{u}) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$ – дивергенция скорости; $\bar{N}(\bar{u})$ имеет компоненты

$$N_1(\bar{u}) = -\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial(u\upsilon)}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)\right) + g_x$$

[1] Хайрисламов Кирилл Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: haigh1510@gmail.com

и

$$N_2(\bar{u}) = -\frac{\partial(u\upsilon)}{\partial x} - \frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right) + g_y;$$

$p$ – давление; $\mu$ – коэффициент динамической вязкости; $(g_x, g_y)$ – вектор массовых сил; $\mathrm{Re}$ – число Рейнольдса.

Введем зависимость коэффициента вязкости $\mu$ от скорости деформаций [1]. Под скоростью деформаций понимается величина

$$q = \left(2Tr\left(e^2\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e = \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{u} + (\nabla\bar{u})^T\right)$ – тензор скоростей деформаций, $Tr$ – оператор следа. Легко показать, что в данном случае

$$q = \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2}.$$

Выберем следующий закон зависимости

$$\mu = \mu_0\left(1 + \lambda^2 q^2\right)^{\frac{n-1}{2}}, \tag{4}$$

описывающий довольно широкий класс жидкостей, где $\mu_0$, $\lambda$, $n$ – константы, характеризующие жидкость [2].

### 3. Общая схема численного решения

Система уравнений (3) решается численно. В численном методе используется сетка с разнесенной структурой расположения сеточных узлов, т.е. значения компонент скорости $u$, $\upsilon$ определены в полуцелых узлах вида $(i+1/2, j)$, $(i, j+1/2)$ соответственно, а значения давления и вязкости – в целочисленных узлах $(i, j)$ [3].

Будем использовать следующую вычислительную процедуру (далее под давлением понимается величина $h = p/\mathrm{Re}$):

1) пусть имеется скорость $\bar{u}(t_0)$ в момент времени $t_0$, а $h^*(t_0)$ – произвольное давление, согласованное с условиями на границе;

2) найдем промежуточную скорость $\bar{u}^*$ в момент времени $t_0 + \Delta t$ из уравнения

$$\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial t} = -\nabla h^* + \bar{N}(\bar{u})$$

при условии $\bar{u}^*(t_0) = \bar{u}(t_0)$;

3) решим уравнение Пуассона

$$\Delta\psi = \nabla\cdot\bar{u}^*$$

с граничными условиями: $\psi = 0$ на свободной границе и $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ на жесткой границе;

4) получим скорость и давление для момента времени $t_0 + \Delta t$:

$$\bar{u} = \bar{u}^* - \nabla\psi,\ h = h^* + \psi/\Delta t.$$

Из пунктов 3 и 4 видно, что в каждый момент времени поле скоростей остается недивергентным, т.е. $\mathrm{div}(\bar{u}) = 0$, что согласуется с первым уравнением в (3).

### 4. Численный эксперимент и его результаты

Рассмотрим некоторую область $\Omega$ с круглой границей. Пусть внутри $\Omega$ в начальный момент времени имеются три подобласти, занимаемых жидкостью: две в форме тонких полос, ориентированных вертикально и горизонтально, и одна в форме круга (рис. 1, *а*). Под действием внешней силы, направленной вниз, жидкости приходят в движение и в дальнейшем вступают во взаимодействие друг с другом и с границей области $\Omega$.

Сравним между собой жидкости с переменной и постоянной вязкостью. Для этого проведем два эксперимента, отличающиеся только тем, что в первом случае вязкость жидкости является константой в ходе всего процесса расчета (порядка 1 мПа·с, как у воды), а во втором случае меняется по выбранному закону (4), где возьмем $n > 1$, тогда с ростом скорости деформаций вязкость будет увеличиваться.

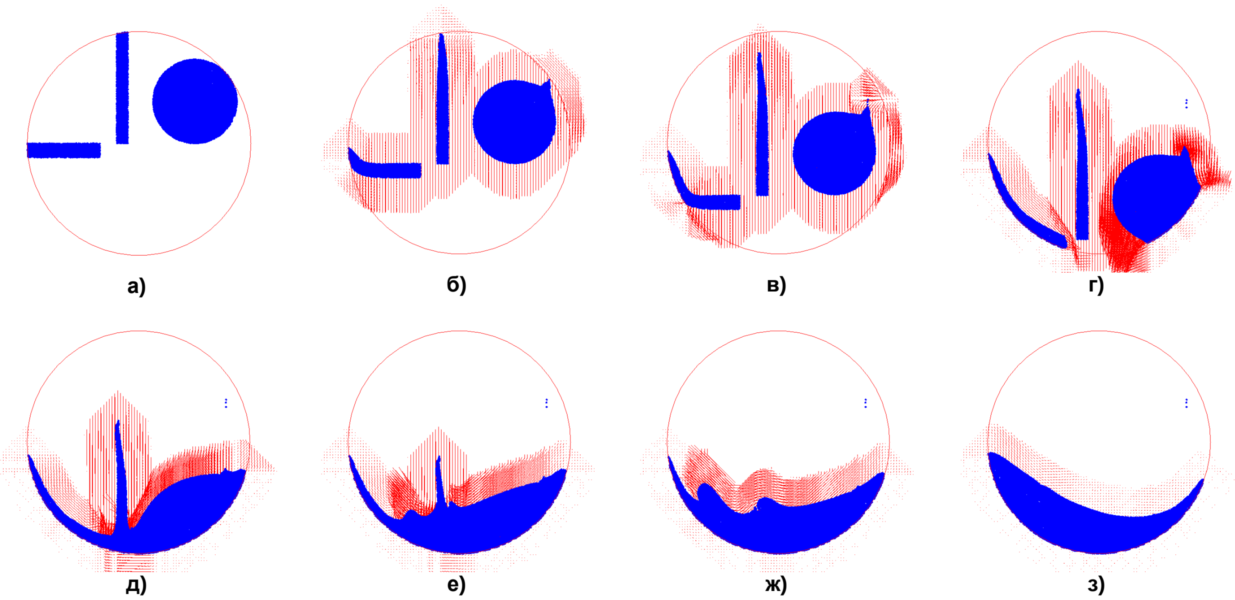


**Рис. 1. Конфигурации системы с постоянной вязкостью в моменты времени: а) 0,00 с; б) 0,56 с; в) 0,88 с; г) 1,16 с; д) 1,30 с; е) 1,42 с; ж) 1,60 с; з) 2,88 с (стрелки характеризуют направления и модули векторов скорости в соответствующей окрестности жидкости)**

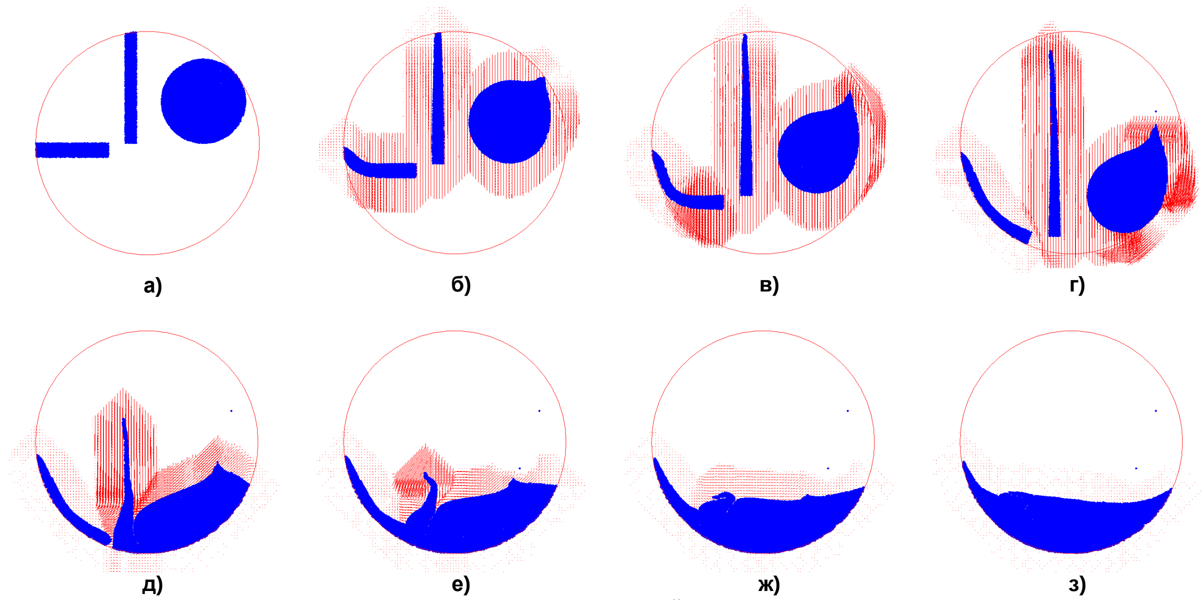


**Рис. 2. Конфигурации системы с переменной вязкостью в моменты времени: а) 0,00 с; б) 0,56 с; в) 0,88 с; г) 1,16 с; д) 1,56 с; е) 1,84 с; ж) 2,46 с; з) 3,56 с (стрелки характеризуют направления и модули векторов скорости в соответствующей окрестности жидкости)**

Из рис. 1, 2, где представлены результаты численного эксперимента, хорошо видно, сколь сильный эффект оказывает переменность коэффициента вязкости. В областях с большими скоростями деформаций жидкость с переменной вязкостью начинает терять свойства текучести (к примеру, кончик вертикальной полосы начинает «складываться» – рис. 2 *е*, *ж*) в отличие от жидкости с постоянным коэффициентом вязкости (рис. 1).

**Заключение**

В работе рассмотрена и численно решена задача моделирования течения жидкости в $R^2$ с коэффициентом вязкости, зависящим от скорости деформаций. Согласно выбранной зависимости с ростом скорости деформаций вязкость увеличивалась, что приводило к ослаблению текучих свойств жидкости в таких областях течения.

Моделировать такие изменения свойств жидкостей важно, т.к. многие смазочные материалы, используемые в промышленности, не обладают постоянной вязкостью и меняют свои вязкостные свойства в зависимости от испытываемых деформаций.

**Литература**

1. Tome, M.F. A numerical technique for solving unsteady non-Newtonian free surface flows / M.F. Tome, B. Duffy, S. McKee // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1996. – Vol. 62. – P. 9–34.

2. Уилкинсон, У. Неньютоновские жидкости / У. Уилкинсон; под ред. А.В. Лыкова. – М.: Мир, 1964. – 216 с.

3. Метод численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость-давление / Е.В. Бруяцкий, А.Г. Костин, Е.И. Никифорович, Н.В. Розумнюк // Прикладная гидромеханика. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 13–23.

***Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.***

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2015, vol. 7, no. 3, pp. 54–57***

## SIMULATION OF NONLINEAR VISCOUS FLUID FLOW

***K.Z. Khayrislamov***[1]

The problem of simulation of nonlinear viscous fluid flow is considered in the article. Dependence of dynamic viscosity coefficient on strain rate is introduced in Navier-Stokes equation. The equations given are solved by numerical method.

*Keywords: viscosity, viscous fluid, Navier-Stokes equations*

**References**

1. Tome M.F., Duffy B., McKee S. A numerical technique for solving unsteady non-Newtonian free surface flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1996. Vol. 62. pp. 9–34.

2. Uilkinson U. *Nen'yutonovskie zhidkosti* (Non-Newtonian Fluids). Moscow, Mir Publ., 1964. 216 p. (in Russ.). [Wilkinson W.L. Non-Newtonian fluids; fluid mechanics, mixing and heat transfer. Pergamon Press, New York, 1960. 138 p.].

3. Bruyatskiy E.V., Kostin A.G., Nikiforovich E.I., Rozumnyuk N.V. *Prikladnaya gidromekhanika.* 2008. Vol. 10, no. 2. pp. 13–23. (in Russ.).

***Received 5 May 2015***

[1] Khayrislamov Kirill Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: haigh1510@gmail.com