УДК 519.633.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЗАДАЧЕ НАГРЕВАНИЯ ЦИЛИНДРА ДВИЖУЩИМСЯ ТЕПЛОИСТОЧНИКОМ

М.З. Хайрисламов[1]

Рассматривается задача нагревания конечного цилиндра тепловым источником, вращающимся с постоянной угловой скоростью и движущимся вдоль оси цилиндра. Теплофизические параметры материала цилиндра предполагаются функциями температуры. Предлагается численный метод решения квазилинейного уравнения теплопроводности, основанный на использовании явной разностной схемы. Приводится сравнение численного решения задачи по предлагаемому методу с решением по чисто неявной разностной схеме.

Ключевые слова: теплопроводность; квазилинейное уравнение теплопроводности; разностные схемы; цилиндрическая система координат.

Введение

Учет зависимостей теплофизических параметров материала от температуры приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности [1]:

$$c(u)\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \operatorname{div}(q(u)\nabla u),\ t > t_0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

где объемная теплоемкость $c(u)$ и теплопроводность $q(u)$ являются функциями температуры u.

Уравнение (1) часто рассматривается совместно с начальным и краевым условиями:

$$u(t_0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

$$q(u)\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial n} = \Theta(t,\mathbf{x},u),\ t > t_0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Для численного решения начально-краевой задачи (1)–(3) обычно применяются варианты метода конечных разностей (чисто неявные схемы – линейный и нелинейный варианты метода Ньютона [2]) или метода Розенброка [3] (решается система ОДУ большой размерности). Однако явные разностные схемы во многих случаях оказываются удобнее: они проще в реализации, обладают простой логикой, легко переносимы на многопроцессорные вычислительные системы.

В рамках данной работы предлагается явная разностная схема решения третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности, возникающего в задаче нагревания цилиндра вращающимся тепловым источником.

1. Постановка задачи

Имеется цилиндр высоты H и радиуса R, выполненный из материала с переменными теплофизическими параметрами, зависящими от температуры. Рубашка цилиндра разогревается поверхностным тепловым источником мощности Q, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω и равномерно движущимся вдоль оси цилиндра.

Для определения температурного поля цилиндра требуется решить квазилинейное уравнение теплопроводности (1), которое удобнее рассматривать во вращающейся цилиндрической системе координат:

$$c(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \omega\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rq(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ t > t_0,\ 0 \le r < R,\ 0 \le z \le H, \tag{4}$$

где $u = u(t,r,\varphi,z)$ – искомая функция температуры, удовлетворяющая в $\Omega \times (t > t_0)$ уравнению (4), $\Omega = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r < R,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le H\}$, $c(u) \ge c_0 > 0$ – объемная теплоемкость; $q(u) \ge q_0 > 0$ – теплопроводность.

[1] Хайрисламов Михаил Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: zinatmk@gmail.com

В момент времени $t = t_0$ известно начальное распределение температуры – функция $u_0(r,\varphi,z)$, непрерывная в области Ω:

$$u(0,r,\varphi,z) = u_0(r,\varphi,z). \tag{5}$$

Следующие соотношения задают граничные условия на торцах и боковой поверхности цилиндра:

$$\left.\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = -\left.(\lambda(u)(U-u))\right|_{z=0}, \quad \left.\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{z=H} = -\left.(\lambda(u)(U-u))\right|_{z=H}, \tag{6}$$

$$\left.\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=R} = \begin{cases} Q, \ 0 \le \varphi - \omega t \le \alpha, \ h_0(t) \le z \le h_0(t) + h, \\ \left.(\lambda(u)(U-u))\right|_{r=R}, \text{ в противном случае}. \end{cases} \tag{7}$$

На торцах, а также на рубашке цилиндра вне пятна контакта с теплоисточником происходит теплоотдача. Коэффициент теплоотдачи задан функцией $\lambda(u)$, температура внешней среды постоянна и равна u. Теплоисточник в плоскости (φ, z) имеет форму прямоугольника со сторонами α и h. Точка $h_0(t)$ движется вдоль оси цилиндра с постоянной по модулю скоростью (при достижении теплоисточником торца цилиндра происходит смена знака скорости).

2. Численный метод

Для решения задачи (4)–(7) в работе предлагается использовать дифференциально-разностную схему, получающуюся редукцией уравнения (4) к набору ОДУ первого порядка для точек сетки разбиения области Ω [4, 5].

2.1. Разностная сетка. Расчетные формулы

Введем новую искомую функцию с помощью замены

$$G(u) = \int_0^u q(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \omega\frac{\partial G}{\partial \varphi} = a^2(u)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right), \tag{9}$$

где $a(u) = \sqrt{q(u)/c(u)}$ – коэффициент температуропроводности.

Заметим, что функция $G(u)$ является строго монотонной функцией температуры, поэтому обратная функция G^{-1} существует.

В предлагаемом численном методе используется регулярная сетка:

$$\omega_{\Delta r,\Delta\varphi,\Delta z,\tau} = \omega_{\Delta r} \times \omega_{\Delta\varphi} \times \omega_{\Delta z} \times \omega_\tau,$$

$$\omega_{\Delta r} = \left\{ r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta r, \ i = 1,2,\dots,N \right\}, \quad \omega_{\Delta\varphi} = \left\{ \varphi_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta\varphi, \ j = 1,2,\dots,M \right\},$$

$$\omega_{\Delta z} = \left\{ z_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta z, \ k = 1,2,\dots,L \right\}, \quad \omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,\dots\},$$

где $\Delta r = R/N$ – шаг по радиусу r, $\Delta\varphi = 2\pi/M$ – шаг по углу φ, $\Delta z = H/L$ – шаг по переменной z, τ – шаг по времени t.

Пусть $G_{i\cdot k} = G_{i\cdot k}(t,\varphi)$ – значение функции G, а $u_{i\cdot k} = u_{i\cdot k}(t,\varphi)$ – значение функции u в точке (t, r_i, φ, z_k). Тогда замена производных на конечные разности в правой части уравнения (9) в точке (t, r_i, φ, z_k) приводит к уравнению в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial G_{i\cdot k}(t,\varphi)}{\partial t} - \omega\frac{\partial G_{i\cdot k}(t,\varphi)}{\partial \varphi}\right) + \mu_{i\cdot k}G_{i\cdot k}(t,\varphi) = g_{i\cdot k}(\varphi), \tag{10}$$

где

$$\mu_{i\cdot k}=2a^2(u_{i\cdot k})\left(\frac{1}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_i^2\Delta\varphi^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right), \tag{11}$$

$$g_{i\cdot k}(\varphi)=a^2(u_{ij_\varphi k})\left(\left(\frac{1}{\Delta r^2}+\frac{1}{2r_i\Delta r}\right)G_{(i+1)j_\varphi k}+\left(\frac{1}{\Delta r^2}-\frac{1}{2r_i\Delta r}\right)G_{(i-1)j_\varphi k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r_i^2\Delta\varphi^2}\left(G_{i(j_\varphi+1)k}+G_{i(j_\varphi-1)k}\right)+\frac{1}{\Delta z^2}\left(G_{ij_\varphi(k+1)}+G_{ij_\varphi(k-1)}\right)\right), \tag{12}$$

а индекс j_φ обозначает номер узла сетки по углу, которому принадлежит угол φ.

На текущем временном слое рассматривается уравнение:

$$\left(\frac{\partial\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi)}{\partial t}-\omega\frac{\partial\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi)}{\partial\varphi}\right)+\mu_{ij_\varphi k}\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi)=g_{i\cdot k}(\varphi), \tag{13}$$

с начальным условием $\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi)\big|_{t=0}=G_{i\cdot k}$. Коэффициент $\mu_{i\cdot k}$ в левой части уравнения (10) считается замороженным (значения $u_{i\cdot k}$ в выражении (11) берутся с текущего временного слоя в момент $t=0$). А правая часть уравнения $g_{i\cdot k}(\varphi)$ считается известной функцией аргумента φ (значения сеточных функций в формуле (12) также берутся с текущего временного слоя).

Из уравнения (13) получаем следующее ОДУ

$$\frac{d\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi-\omega t)}{dt}+\mu_{ij_\varphi k}\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi-\omega t)=g_{i\cdot k}(\varphi-\omega t). \tag{14}$$

Уравнение (14) решается на каждом слое по времени на отрезке $t\in[0;\tau]$. Его точным решением является функция

$$\bar{G}_{i\cdot k}(t,\varphi)=G_{i\cdot k}(0,\varphi+\omega t)e^{-\mu_{ij_\varphi k}t}+\int\limits_0^t g_{i\cdot k}(0,\varphi+\omega s)e^{-\mu_{ij_\varphi k}s}ds. \tag{15}$$

За время τ цилиндр провернется на угол, равный $\omega\tau$. Пусть этот угол составляет K полных шагов по углу, т.е. $\omega\tau=K\Delta\varphi+p\Delta\varphi,\ 0\le p<1$. Поворот на $\Delta\varphi$ осуществляется за время $\Delta t=\Delta\varphi/\omega$. С учетом этого после дискретизации формулы (15) получаем окончательные расчетные формулы

$$G_{ijk}^{n+1}=\frac{G_{i(j+K)k}^n+pG_{i(j+K+1)k}^n}{1+p}e^{-\mu_{ijk}^n\tau}+\frac{1-e^{-\mu_{ijk}^n\Delta t}}{\mu_{ijk}^n}\cdot\sum_{m=0}^{K-1}g_{i(j+m)k}^n e^{-\mu_{ijk}^n m\Delta t}+$$
$$+\frac{g_{i(j+K)k}^n+pg_{i(j+K+1)k}^n}{1+p}e^{-\mu_{ijk}^n K\Delta t}\cdot\frac{1-e^{-\mu_{ijk}^n(\tau-K\Delta t)}}{\mu_{ijk}^n}, \tag{16}$$
$$u_{ijk}^{n+1}=G^{-1}(G_{ijk}^{n+1}),\ i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,L},$$

где верхний индекс n обозначает номер временного слоя, к которому относятся значения сеточных функций.

Чтобы рассчитать температуру на оси цилиндра в точке z_k, проинтегрируем уравнение (9) по малому цилиндру с центром в точке z_k радиуса $\Delta r/2$ и высоты Δz. В результате получим ОДУ относительно функции $\bar{G}_{0k}(t)$

$$\frac{d\bar{G}_{0k}}{dt}+\mu_k\bar{G}_{0k}=g_k, \tag{17}$$

где

$$\mu_k=a^2(u_{0k})\left(\frac{4}{\Delta r^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right),\ g_k=a^2(u_{0k})\left(\frac{4}{\Delta r^2}\cdot\frac{1}{M}\sum_{j=1}^M G_{1jk}+\frac{G_{0(k+1)}+G_{0(k-1)}}{2\Delta z^2}\right).$$

Из решения уравнения (17) получаем расчетные формулы для узлов сетки на оси цилиндра:

$$G_{0k}^{n+1} = G_{0k}^{n} e^{-\mu_k^n \tau} + (1 - e^{-\mu_k^n \tau}) \frac{g_k^n}{\mu_k^n},\ u_{0k}^{n+1} = G^{-1}(G_{0k}^{n+1}),\ k = \overline{1, L}. \tag{18}$$

2.2. Аппроксимация краевых условий

Для аппроксимации краевых условий (6) и (7) введены фиктивные узлы сетки $\omega_{r_{N+1},\Delta\varphi,\Delta z} = r_{N+1} \times \omega_{\Delta\varphi} \times \omega_{\Delta z}$, $r_{N+1} = R + \Delta r/2$, а также два фиктивных слоя $\omega_{\Delta r,\Delta\varphi,z_0} = \omega_{\Delta r} \times \omega_{\Delta\varphi} \times \omega_{\Delta z} \times z_0$ и $\omega_{\Delta r,\Delta\varphi,z_{L+1}} = \omega_{\Delta r} \times \omega_{\Delta\varphi} \times \omega_{\Delta z} \times z_{L+1}$, $z_0 = -\Delta z/2$, $z_{L+1} = H + \Delta z/2$. Сначала для следующего временного слоя рассчитываются значения искомой функции во внутренних узлах, после чего, исходя из краевых условий, задаются ее значения в фиктивных узлах.

Краевое условие, описывающее воздействие теплового источника, с учетом замены (8) можно переписать в виде

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right|_{r=R} = Q,\ 0 \le \varphi - \omega t \le \alpha,\ h_0(t) \le z \le h_0(t) + h. \tag{19}$$

Условие (19) аппроксимируется с использованием разностной формулы второго порядка точности. В результате имеем расчетную формулу для точек $\omega_{r_{N+1},\Delta\varphi,\Delta z}$, удовлетворяющих ограничениям в условии (19):

$$G_{(N+1)jk} = G_{Njk} + \Delta r Q.$$

Теперь рассмотрим узлы $\omega_{r_{N+1},\Delta\varphi,\Delta z}$, для которых требуется выполнить условие теплоотдачи

$$\left.\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=R} = \left.(\lambda(u)(U - u))\right|_{r=R}. \tag{20}$$

Условие (20) можно аппроксимировать следующим выражением:

$$\frac{3q(u_{Njk}) - q(u_{(N-1)jk})}{2} \cdot \frac{u_{(N+1)jk} - u_{Njk}}{\Delta r} = \frac{3\lambda(u_{Njk}) - \lambda(u_{(N-1)jk})}{2} \cdot \left(U - \frac{u_{(N+1)jk} + u_{Njk}}{2}\right),$$

откуда получаем расчетные формулы:

$$u_{(N+1)jk} = \frac{u_{Njk}(3q(u_{Njk}) - q(u_{(N-1)jk})) + (3\lambda(u_{Njk}) - \lambda(u_{(N-1)jk}))\Delta r\left(U - \dfrac{u_{Njk}}{2}\right)}{3q(u_{Njk}) - q(u_{(N-1)jk}) + \left(3\lambda(u_{Njk}) - \lambda(u_{(N-1)jk})\right)\dfrac{\Delta r}{2}},\ G_{(N+1)jk} = G(u_{(N+1)jk}).$$

Для фиктивных слоев $\omega_{\Delta r,\Delta\varphi,z_0}$ и $\omega_{\Delta r,\Delta\varphi,z_{L+1}}$ расчетные формулы выводятся аналогичным способом.

2.3. Использование метода итераций

Для повышения точности может быть использован метод итераций (или метод последовательных приближений) [2].

Использование данного метода приводит к следующей схеме вычислений для внутренних узлов (см. формулу (16)):

$$G_{ijk}^{(s+1)} = \frac{G_{i(j+K)k}^{n} + pG_{i(j+K+1)k}^{n}}{1+p} e^{-\mu_{ijk}^{(s)}\tau} + \frac{1 - e^{-\mu_{ijk}^{(s)}\Delta t}}{\mu_{ijk}^{(s)}} \cdot \sum_{m=0}^{K-1} g_{i(j+m)k}^{(s)} e^{-\mu_{ijk}^{(s)} m\Delta t} +$$

$$+ \frac{g_{i(j+K)k}^{(s)} + g_{i(j+K+1)k}^{(s)}}{1+p} e^{-\mu_{ijk}^{(s)} K\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_{ijk}^{(s)}(\tau - K\Delta t)}}{\mu_{ijk}^{(s)}},\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, M},\ k = \overline{1, L},$$

где номер итерации s пробегает значения $0, 1, \ldots, S-1$. При этом $G_{ijk}^{(0)} = G_{ijk}^{n}$, $G_{ijk}^{n+1} = G_{ijk}^{(S)}$. Для узлов на оси цилиндра схема аналогична (см. формулу (18)):

$$G_{0k}^{(s+1)} = G_{0k}^{n} e^{-\mu_k^{(s)}\tau} + (1 - e^{-\mu_k^{(s)}\tau})\frac{g_k^{(s)}}{\mu_k^{(s)}},\ k = \overline{1, L},\ s = \overline{0, S-1},\ G_{0k}^{(0)} = G_{0k}^{n},\ G_{0k}^{n+1} = G_{0k}^{(S)}.$$

3. Численные расчеты. Сравнение с неявной разностной схемой

Для проведения численных расчетов были взяты значения параметров задачи (4)–(7), указанные в таблице.

Значения параметров тестовой задачи

Параметр	Значение параметра, размерность	Параметр	Значение параметра, размерность
R	0,05, м	α	0,0314
H	0,2, м	u_0	25, °C
ω	6,28, рад/с	U	25, °C
t_0	0, с	Q	10^6, Дж/(м^2·с)
$q(u)$	$\sqrt{u}$, Дж/(м·с·°C)	$h(t_0)$	0,14, м
$c(u)$	34000, Дж/(м^3·°C)	$\lvert h_0'(t)\rvert$	0, м/с
$\lambda(u)$	$50\cdot\ln(1+u)$, Дж/(м^2·с·°C)	h	0,06, м

В ходе расчетов число элементарных участков по координате r было принято равным 30, по углу φ – 90, по координате z – 80, шаг по времени – 0,001 с. Число итераций S было равно 3.

На рис. 1 представлено распределение температуры на поверхности цилиндра в момент времени T = 2 с, вычисленное по описанному в работе методу (рис. 1, *а*) и с использованием неявной разностной схемы (рис. 1, *б*).

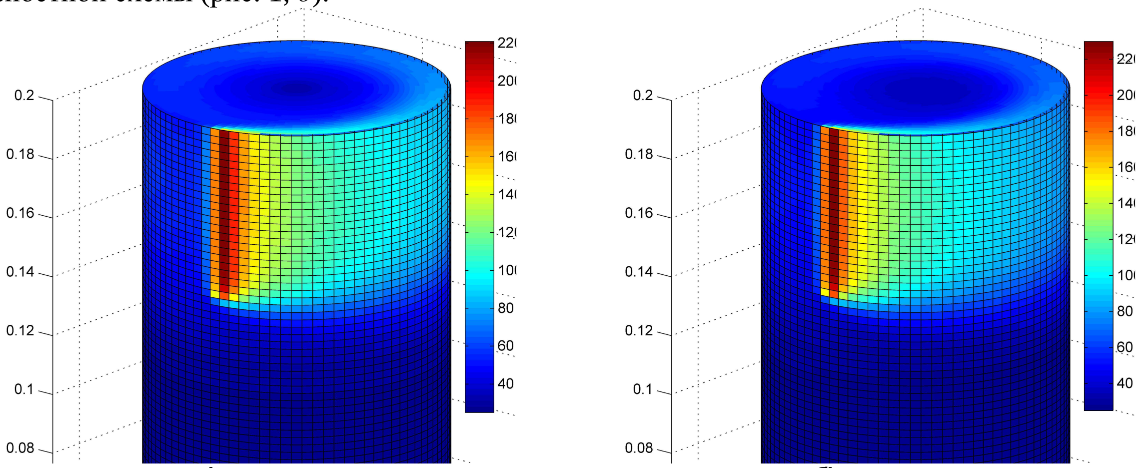

Рис. 1. Распределение температуры на поверхности цилиндра, °C:
а) дифференциально-разностная схема; б) чисто неявная разностная схема

Результаты численных расчетов показывают, что описанный метод обеспечивает приемлемую точность. В то же время использование неявной схемы приводит к необходимости решения СЛАУ большой размерности. Число неизвестных в такой системе может достигать сотен тысяч (в тестовой задаче размерность вектора неизвестных была равна 236160). Данная сложность частично преодолевается благодаря тому, что матрица системы является разреженной, и можно применять эффективные численные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами. В ходе расчетов использовался устойчивый метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) [6].

Выводы

Учет зависимостей теплофизических параметров от температуры является существенным во многих задачах теплопередачи. Так, например, в работе [7] было установлено, что в задаче нагревания стержня выход на установившийся температурный режим с переменными теплофизическими параметрами происходит раньше, нежели при допущении постоянства этих параметров. Предложенный метод учитывает зависимости теплофизических параметров цилиндра от температуры и может применяться при моделировании температурных полей цилиндрических деталей. Метод обладает логической простотой и без существенных изменений может быть перенесен на многопроцессорные вычислительные системы.

Литература

1. Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
2. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин; под. ред. А.А. Самарского – М.: Наука, 1978. – 512 с
3. Коконков, Н.И. Схема Розенброка для двумерного нестационарного нелинейного уравнения теплопроводности / Н.И. Коконков, Е.Н. Аристова // Сборник тезисов докладов 18-й Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». – Пущино, 2011.
4. Геренштейн, А.В. Явная разностная схема решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, М.З. Хайрисламов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 12–17.
5. Хайрисламов, М.З. Дифференциально-разностная схема решения задачи квазилинейной теплопроводности для цилиндра / М.З. Хайрисламов // Современные проблемы математики и её прикладные аспекты – 2013: сб. тез. науч.-практ. конф. / под. ред. В.И. Яковлева. – Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2013. – С. 177.
6. Saad, Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd ed.) / Y. Saad. – SIAM, 2003. – P. 231–234.
7. Геренштейн, А.В. Моделирование тепловых полей при переменных теплофизических свойствах детали / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн // Материалы LIII международной научно-технической конференции «Достижения науки – агропромышленному производству» / под ред. П.Г. Свечникова. – Челябинск: ЧГАА, 2014. – Ч. III. – С. 31–38.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 3, pp. 58–64

NUMERICAL SOLUTION OF QUASI-LINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION IN THE PROBLEM OF CYLINDER HEATING BY MOVING HEAT SOURCE

M.Z. Khayrislamov[1]

The problem of finite cylinder heating by heat source rotating with constant angular rate and moving along cylinder axis is considered in the paper. Thermophysical properties of cylinder material are defined by the temperature functions. Numerical method of quasi-linear heat conduction equation solution is given on the basis of the use of explicit difference scheme. The numerical problem solution by the given method is compared with the solution by implicit difference scheme.

Keywords: heat conduction; quasi-linear heat conduction equation; difference schemes; cylinder coordinate system.

References

1. Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki: Ucheb. dlya vuzov* (Differential equations of mathematical physics: the Textbook for high schools). Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2002. 368 p. (in Russ.).
2. Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 512 p. (in Russ.).
3. Kokonkov N.I., Aristova E.N. Skhema Rozenbroka dlya dvumernogo nestatsionarnogo nelineynogo uravneniya teploprovodnosti (Rosenbrock scheme for two-dimensional non-stationary nonlinear heat equation.). *Sbornik tezisov dokladov 18 Mezhdunarodnoy konferentsii «Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie»* (Proc. 18th International Conference "Mathematics. Computer. Education"). Pushchino, 2011. (in Russ.).

[1] Khayrislamov Mikhail Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: zinatmk@gmail.com

4. Herreinstein A.V., Khayrislamov M.Z. Explicit difference scheme for the solution of one-dimensional quasi-linear heat conductivity equation. Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”. 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 12–17. (in Russ.).

5. Khayrislamov M.Z. Differentsial'no-raznostnaya skhema resheniya zadachi kvazilineynoy teplo-provodnosti dlya tsilindra (Differential-difference scheme for solving the problem for a quasi-linear heat conduction cylinder). *Sbornik tezisov nauchno-prakticheskoy konferentsii «Sovre-mennye problemy matematiki i eye prikladnye aspekty»* (Proc. of scientific-practical conference "Modern problems of mathematics and its practical aspects."). Perm', Permskiy gosudarstvennyy natsional'nyy issle-dovatel'skiy universitet Publ, 2013. p. 177. (in Russ.).

6. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd ed.)*. SIAM, 2003. pp. 231–234.

7. Gerenshteyn A.V., Mashrabov N., Gerenshteyn E.A. Modelirovanie teplovykh poley pri pere-mennykh teplofizicheskikh svoystvakh detali (Modeling of thermal fields at variable thermal properties of detail). *Materialy LIII mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii “Dostizheniya nauki – agropromyshlennomu proizvodstvu”* (Proc. LIII international scientific-technical conference “Advances in science – agricultural production”). Chelyabinsk: ChGAA Publ., 2014. Part III. pp. 31–38. (in Russ.).

Received 5 May 2015