

ЗАДАЧА О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА С НАПОЛНИТЕЛЕМ В ПОЛОСЕ

Н.Н. Антоненко¹

Предложен способ решения задачи о центральной продольной трещине нормального отрыва с наполнителем в полосе. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Фурье. Задача сведена к интегродифференциальному уравнению относительно функции, связанной со скачком вертикальных перемещений на берегах трещины. Приведены результаты численных расчетов, которые иллюстрируют влияние наполнителя трещины, толщины и упругих характеристик полосы на коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: полоса; трещина; наполнитель; коэффициенты интенсивности напряжений; интегральное преобразование Фурье; интегродифференциальное уравнение.

Введение

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии полосы, содержащей прямолинейную трещину, параллельную границам полосы. В литературе рассматриваются два типа задач о продольных трещинах в полосе. К первому типу можно отнести задачи о трещине в полосе, границы которой свободны от напряжений, а к берегам трещины приложены нагрузки [1–7]. Ко второму – задачи о трещинах со свободными берегами с различными видами условий на границах полосы [1]. В вышеуказанных работах рассматриваются трещины типа разрезов, однако на практике трещины могут возникать в результате непрочности слоистых элементов конструкций. Дефекты такого вида можно считать заполненными неким клейким веществом [8]. В данной статье рассматривается задача о центральной продольной трещине с наполнителем в полосе. В рамках этой модели предполагается, что скачки вертикальных перемещений на берегах трещины пропорциональны нормальным напряжениям на ее берегах [8].

Постановка задачи

Рассмотрим упругую полосу толщины $2h$. Материал полосы будем характеризовать двумя упругими характеристиками: модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν . Нижняя граница полосы жестко заделана, а к верхней границе приложена нормальная сосредоточенная нагрузка. Введем две локальные декартовы системы координат $O_i x z_i$ ($i=1,2$) так, как показано на рис. 1.

На срединной плоскости полосы при $z_1 = h$ ($z_2 = 0$), имеется продольная трещина с наполнителем, занимающая область $x \in (-a; a)$. Напряжения и перемещения, которые относятся к верхней половине полосы ($x \in (-\infty; +\infty)$, $0 \leq z_1 \leq h$), будем обозначать нижним индексом 1, а к нижней ($x \in (-\infty; +\infty)$, $0 \leq z_2 \leq h$) – 2.

Граничные условия:

$$\sigma_{z1}(x, 0) = Q \delta(x), \tau_{xz1}(x, 0) = 0, u_2(x, h) = 0, w_2(x, h) = 0. \quad (1)$$

Условия на срединной плоскости полосы:

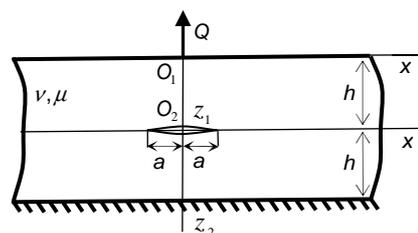


Рис. 1

¹ Антоненко Нина Николаевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра общей математики, Запорожский национальный технический университет.

E-mail: antonenkonina@i.ua

$$\sigma_{z2}(x,0) = \sigma_{z1}(x,h), \tau_{xz2}(x,0) = \tau_{xz1}(x,h),$$

$$u_2(x,0) = u_1(x,h), w_2(x,0) - w_1(x,h) = \begin{cases} A(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_{z1}(x,h) = cf(x), |x| \leq a, \quad (3)$$

где $A(x) = \sqrt{a^2 - x^2} f(x)$, $f(x) \in C_{[-a,a]}^2$, $f(\pm a) \neq 0$, c – коэффициент, который характеризует наполнитель.

Требуется определить скачок вертикальных перемещений на берегах трещины и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Введем безразмерные величины $\tilde{x}_k = \frac{x_k}{l}$, $\tilde{z}_k = \frac{z_k}{l}$, $\tilde{a} = \frac{a}{l}$, $\tilde{Q} = \frac{Q}{lE}$, $\tilde{h} = \frac{h}{l}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{E}$, $\tilde{c} = \frac{c}{E}$

$\tilde{u} = \frac{u}{l}$, $\tilde{w} = \frac{w}{l}$, $\tilde{\tau}_{xzk} = \frac{\tau_{xzk}}{E}$, $\tilde{\sigma}_{zk} = \frac{\sigma_{zk}}{E}$, где l , E – характерные величины ($[l] = \text{м}$, $[E] = \text{Па}$). В дальнейшем тильды над функциями и переменными будем опускать, считая, что все преобразования выполняются над безразмерными величинами.

Метод решения

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье:

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

В пространстве трансформант компоненты напряженно-деформированного состояния полосы могут быть представлены в виде линейных комбинаций вспомогательных функций, которые связаны с напряжениями и перемещениями точек ее верхней границы такими формулами [9]:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \beta = \mu W(\xi, 0), \gamma = \mu S(\xi, 0), \delta = -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (4)$$

где $S = -i\xi \bar{u}(\xi, z)$, $W = p \bar{w}(\xi, z)$, $p = |\xi|$.

Трансформанты напряжений и перемещений полосы имеют вид [9]:

$$2\mu W(\xi, z) = ((2 - \omega) \text{sh } pz - \omega pz \text{ ch } pz) \alpha + 2(-\omega pz \text{ sh } pz + \text{ch } pz) \beta + 2((1 - \omega) \text{sh } pz - \omega pz \text{ ch } pz) \gamma - \omega pz \text{ sh } pz \delta, \quad (5)$$

$$2\mu S(\xi, z) = \omega pz \text{ sh } pz \alpha + 2((1 - \omega) \text{sh } pz + \omega pz \text{ ch } pz) \beta + 2(\omega pz \text{ sh } pz + \text{ch } pz) \gamma + ((2 - \omega) \text{sh } pz + \omega pz \text{ ch } pz) \delta, \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (\text{ch } pz - \omega pz \text{ sh } pz) \alpha + 2\omega(\text{sh } pz - pz \text{ ch } pz) \beta - 2\omega pz \text{ sh } pz \gamma - ((1 - \omega) \text{sh } pz + \omega pz \text{ ch } pz) \delta, \quad (7)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = (-(1 - \omega) \text{sh } pz + \omega pz \text{ ch } pz) \alpha + 2\omega pz \text{ sh } pz \beta + 2\omega(\text{sh } pz + pz \text{ ch } pz) \gamma + (\text{ch } pz + \omega pz \text{ sh } pz) \delta. \quad (8)$$

Запишем условия (1)–(2), с учетом формул (4), в пространстве трансформант Фурье:

$$\alpha_1 = Q, \delta_1 = 0, \alpha_2 = \bar{\sigma}_{z1}(\xi, h), \delta_2 = -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz1}(\xi, h),$$

$$\gamma_2 = \mu S_1(\xi, h), \beta_2 - \mu W_1(\xi, h) = \mu p M(\xi), S_2(\xi, h) = 0, W_2(\xi, h) = 0,$$

где $M(\xi) = \int_{-a}^a A(t) e^{i\xi t} dt$.

Используя формулы (5)–(8), из последних соотношений найдем $\beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$. Трансформанты нормальных напряжений в точках срединной плоскости полосы $\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h)$ примут такой вид:

$$\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = \frac{p A_1(p) M(\xi) - Q A_2(p)}{D(p)}, \tag{9}$$

где $A_1(p) = -\mu \omega (a_1 + a_2 e^{-2p_1} + a_3 e^{-4p_1} + a_4 e^{-6p_1} - a_1 e^{-8p_1})$,

$$A_2(p) = b_1 e^{-p_1} + b_2 e^{-3p_1} + b_3 e^{-5p_1} + b_4 e^{-7p_1}, \quad D(p) = a_1 + k e^{-4p_1} + a_1 e^{-8p_1}, \quad a_1 = \omega^2 - 2\omega,$$

$$a_2 = 2\tilde{\omega}(-\tilde{\omega} + 2\omega p_1 + 2\omega p_1^2), \quad a_3 = 8p_1(\tilde{\omega} + \omega^2 + 2\omega^2 p_1^2), \quad a_4 = 2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\omega p_1 - 2\omega p_1^2),$$

$$b_1 = -a_1(1 + p_1), \quad b_2 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 + 3\omega^2 p_1 + 4\omega^2 p_1^2, \quad b_3 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 - 3\omega^2 p_1 + 4\omega^2 p_1^2, \quad b_4 = -a_1(1 - p_1),$$

$$\omega_i = 0,5 / ((1 - \nu_i)), \quad p_1 = ph, \quad \tilde{\omega} = 1 - \omega, \quad k = -2(2 + a_1 + 8\omega^2 p_1^2).$$

Используя связь между оригиналами и трансформантами нормальных напряжений (9) в точках срединной плоскости полосы и последнее из условий (2), получим интегральное уравнение задачи:

$$\pi cf(x) = \int_{-a}^a A(t)K(t-x)dt - QL(x),$$

где $K(z) = \int_0^\infty \frac{p A_1(p)}{D(p)} \cos pz dp$, $L(z) = \int_0^\infty \frac{A_2(p)}{D(p)} \cos pz dp$.

Выделим в ядре интегрального уравнения регулярную $K_1(z)$ и сингулярную $K_2(z)$ части:

$$\pi cf(x) = \int_{-a}^a A(t)K_1(t-x)dt - \mu \omega \int_{-a}^a A(t)K_2(t-x)dt - QL(x), \tag{10}$$

где $K_1(z) = \int_0^\infty p \left(\frac{A_1(p)}{D(p)} + \mu \omega \right) \cos pz dp$, $K_2(z) = \int_0^\infty p \cos pz dp$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_1(p)}{D(p)} = -\mu \omega$.

Интеграл $K_2(z)$ расходится, поэтому его будем понимать в следующем смысле:

$$K_2(z) = \int_0^{+\infty} p \cos pz dp = \lim_{q \rightarrow 0+0} \int_0^{+\infty} p \cos pz e^{-q p} dp = \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{q^2 - z^2}{(q^2 + z^2)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Поскольку $\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt$ при $x=t$ имеет неинтегрируемую особенность, то воспользуемся формальным равенством:

$$\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt = - \int_{-a}^a A(t) d\left(\frac{1}{t-x}\right) = -\frac{A(t)}{t-x} \Big|_{-a}^a + \int_{-a}^a \frac{d(A(t))}{t-x} = \int_{-a}^a \frac{A'(t) dt}{t-x}. \tag{11}$$

Математическое обоснование (11) приведено в [10]. В (11) использован тот факт, что берега трещины должны смыкаться, т.е. $A(\pm a) = 0$.

Окончательно интегральное уравнение задачи (10) принимает вид:

$$\pi cf(x) = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} f(t) R(t-x) dt + \mu \omega \int_{-a}^a \frac{\left(\sqrt{a^2 - t^2} f(t)\right)'}{t-x} dt - QL(x). \tag{12}$$

Неизвестную функцию $f(x)$ будем искать в виде:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i U_{2i}(x), \tag{13}$$

Механика

где $U_{2i}(x)$ – полиномы Чебышева второго рода.

Для определения неизвестных α_i раскладываем левую и правую части уравнения (12) в линейные комбинации полиномов Чебышева и приравниваем коэффициенты при полиномах одинакового порядка. Количество членов в линейных комбинациях выбираем из условия, чтобы решения, полученные на n -м и $n+1$ -м шагах, отличались на некоторую наперед заданную величину.

Используя асимптотические оценки, полученные в [8], для интеграла $\int_{-a}^a \frac{(\sqrt{a^2 - t^2} f(t))'}{t - x} dt$,

получаем

$$\sigma_{z1}(x, h) = \frac{\mu \omega f(a) \sqrt{2a}}{2\sqrt{r}} + O(1), \quad r = x - a, \quad \text{при } x \rightarrow a + 0.$$

Формула для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений принимает вид:

$$K_I = \mu \omega f(a) \sqrt{\pi a},$$

где функция $f(x)$ вычислена по формуле (13).

Численные результаты

Численные расчеты проведены для трещины длины $2a = 2$. Полоса находится под действием нормальной сосредоточенной силы $Q = 1$. Ниже в табл. 1–4 приведены результаты, которые иллюстрируют зависимость КИНов от упругих характеристик полосы, ее полуширины и наполнителя трещины.

Таблица 1
Зависимость коэффициентов интенсивности напряжения от толщины полосы ($\nu = 0,3, \mu = 1$)

h/a	2	3	4	5	10	100
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=1$	0,11205	0,08416	0,06611	0,05408	0,02788	0,00282
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=0$	0,30996	0,21577	0,16476	0,13299	0,06733	0,00676

Таблица 2
Зависимость коэффициентов интенсивности напряжения от модуля сдвига полосы ($\nu = 0,3, h/a = 10$)

μ	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=1$	0,02788	0,03945	0,04577	0,04976	0,05250	0,05890
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=0$	0,06733	0,06733	0,06733	0,06733	0,06733	0,06733

Таблица 3
Зависимость коэффициентов интенсивности напряжения от коэффициента Пуассона полосы ($\mu = 1, h/a = 10$)

ν	0,1	0,2	0,3
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=1$	0,02375	0,02563	0,02788
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c=0$	0,06697	0,06709	0,06733

Таблица 4

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжения от коэффициента,
который характеризует наполнитель c ($\nu = 0,3, \mu = 1, h/a = 10$)

c	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$	0,02788	0,01757	0,01282	0,01009	0,00832	0,00443

Из табл. 1–4 можно сделать выводы:

- 1) увеличение полуширины полосы и коэффициента c приводит к уменьшению КИНов;
- 2) к увеличению КИНов приводят увеличение модуля сдвига и коэффициента Пуассона полосы;
- 3) для случая трещины, берега которой свободны от напряжений ($c = 0$), упругие характеристики полосы практически не влияют на КИНЫ.

Литература

1. Murakami, Y. Stress intensity factors handbook: in 2 Vol. / Y. Murakami. – Pergamon Press, 1987. – Vol. 1. – 1566 p.
2. Сметанин, Б.И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое / Б.И. Сметанин // Инж. ж. МТТ. – 1968. – № 2. – С. 115–122.
3. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Александров, В.М. Продольная трещина в преднапряженном тонком упругом слое со свободными границами / В.М. Александров, Б.И. Сметанин // ПММ. – 2005. – Т. 69, Вып. 1. – С. 150–159.
5. Fichter, W.B. Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip / W.B. Fichter. – Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1967. – 55 p.
6. Александров, В.М. Продольная трещина в ортотропной упругой полосе со свободными гранями / В.М. Александров // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 1. – С. 115–124.
7. Пожарский, Д.А. Асимптотические решения смешанных задач для упругой полосы и клина / Д.А. Пожарский, А.А. Молчанов. – Вестник Донского государственного технического университета. – 2010. – Т. 10. – С. 447–454.
8. Антоненко, Н.М. Моделювання тріщини нормального відриву з наповнювачем на межі багатошарового пакета та півплощини / Н.М. Антоненко, І.Г. Величко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 141–149.
9. Ткаченко І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.
10. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И.К. Лифанов. – М.: Янус, 1995. – 520 с.

Поступила в редакцию 22 января 2015 г.

THE PROBLEM OF THE CENTRAL LONGITUDINAL OPENING MODE CRACK WITH THE FILLER IN THE STRIP

N.N. Antonenko¹

The solution to the problem of the central longitudinal opening mode crack with the filler in the strip is given. Within this model we suppose that disturbances of vertical displacement at crack edges are proportional to the normal stress at its edges. Fourier integral transformation is used to solve the problem. The problem is reduced to integral differential equation as function which is connected with disturbances of vertical displacement at crack edges. On the basis of numerical results the conclusion is made that the increase of the half-width of the strip and coefficient which is characterized by the filler leads to the reduction stress intensity coefficients (SIC), the increase of modulus of rigidity and Poisson's strain ratio will lead to the increase of stress intensity coefficients, elastic behaviour of the strip doesn't affect stress intensity coefficients for the cracks with stress-free edges.

Keywords: strip; crack; filler; stress intensity coefficients; Fourier integral transformation; integral differential equation.

References

1. Murakami Y. Stress intensity factors handbook: in 2 Vol. Pergamon Press, 1987. Vol. 1. 1566 p.
2. Smetanin B.I. Nekotorye zadachi o shchelyakh v uprugom kline i sloe (Some of the problem of cracks in an elastic wedge and layer). *Inzh. zh. MTT*. 1968. no. 2. pp. 115–122. (in Russ.).
3. Savruk M.P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* (Two-dimensional elasticity problems for the bodies with cracks). Kiev, Nauk. dumka Publ., 1981. 324 p. (in Russ.).
4. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika* (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). 2005. Vol. 69. Issue 1. pp. 150–159. (in Russ.).
5. Fichter W.B. Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1967. 55 p.
6. Aleksandrov V.M. *Izv. RAN. MTT*. 2006. no. 1. pp. 115–124. (in Russ.).
7. Pozharskiy D.A., Molchanov A.A. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2010. Vol. 10. pp. 447–454. (in Russ.).
8. Antonenko N.M., Velichko I.G. *Prikladnye problemy matematiki i mekhaniki (Applied Problems of Mathematics and Mechanics)*. 2011. Issue 9. pp. 141–149. (in Ukrainian).
9. Ткаченко І.Г. *Prikladnye problemy matematiki i mekhaniki (Applied Problems of Mathematics and Mechanics)*. 2005. Issue 3. pp. 70–78. (in Ukrainian).
10. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislenny eksperiment (v matematicheskoy fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln)* (The method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, physics of aerodynamics, elasticity and wave diffraction)). Moscow, Yanus Publ., 1995. 520 p. (in Russ.).

Received 22 January 2015

¹ Antonenko Nina Nikolayevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Department of General Mathematics, Zaporizhzhya National Technical University.
E-mail: antonenkonina@i.ua