УДК 517.958: 539.374 DOI: 10.14529/mmph150402

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ПРОСЛОЙКОЙ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

***В.Л. Дильман*[1], *А.Н. Дияб*[2]**

Изучается напряженное состояние неоднородной полосы, содержащей прямоугольную вставку из менее прочного материала, под действием сжимающей нагрузки при плоской деформации в критический момент нагружения. Отношение прочностных характеристик основного материала и материала вставки предполагается произвольным. Получены явные аналитические выражения для вычисления критической нагрузки.

Ключевые слова: пластический слой; плоская деформация; сжатие; напряженное состояние; критическая нагрузка.

Введение

Теоретическое изучение сжатия пластического слоя впервые проводилось в работе [1] и затем многими авторами. Так как напряжения на контактной поверхности между слоем и основным материалом неизвестны, возникает обратная граничная задача, в которой требуется для определения сжимающего усилия найти нормальные напряжения на контактной поверхности. Дополнительные условия формулируются в виде ограничений на классы функций, в которых ищется решение. Например, в тонких слоях допускают линейную зависимость касательных напряжений по толщине слоя [2, 3]. Ограничения преследуют две цели: упрощение математической модели и постановку обратной граничной задачи. Список таких условий приведен в работах [4, 5]. Часто применяются гипотеза разделения переменных для касательных напряжений [4–6]

$$\tau_{xy} = X(x)Y(y), \tag{1}$$

и гипотеза поперечных плоских сечений [2, 4, 5, 7–10], когда прямые координатной сетки $y = \text{const}$ после деформирования остаются прямыми:

$$v_y = W(y).$$

Здесь v_y – скорость смещения точки слоя в поперечном направлении. В работах [4, 5, 8] деформированные координатные линии аппроксимировались фрагментами синусоид. Это позволило дать описание напряженного состояния слоя в явной аналитической форме. В работах [4, 7, 8] показана эффективность применения гипотезы (1) в форме

$$\tau_{xy} = xY(y) \tag{2}$$

для «не очень» тонких слоев. В работах [11–13] методы работ [2, 4, 5, 7–10] перенесены на неоднородный слой. Одно из обобщений гипотезы (1) использовалось в [14]. В работе [15] подходы работ [2, 4, 5, 7–10] применялись для изучения критического состояния кольцевого слоя в составе растягиваемой цилиндрической оболочки, не обязательно тонкостенной. Эффективность упомянутых методов подтверждается возможностью их применения при решении осесимметричных задач [16–21]. Упомянутые гипотезы распространяются на часть слоя кроме окрестностей свободных поверхностей. Около такой поверхности приходится решать задачу Коши для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с разрывными граничными условиями [4, 8, 22]. Основным шагом решения этой задачи является решение задачи сопряжения для напряжений на контактной поверхности [4, 8, 22]. В работе [22] показано, что следствием разрывности граничных условий на контактной поверхности является разрывность напряжений в более прочной части соединения. В работах [4, 23, 24] установлен силовой критерий вовлечения основного материала в процесс пластического деформирования – зависимость коэффициента $K = \sigma_B^+ / \sigma_B^-$ механической неоднородности соединения от угла наклона контактной поверхности. Здесь σ_B^+ и σ_B^- – пределы прочности основного материала и материала слоя соответственно. В

[1] Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Dilman49@mail.ru
[2] Дияб Аус Нидал – аспирант кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Aws.nth@gmail.com

частности, если слой ортогонален внешнему усилию, коэффициент K имеет критическое значение $K_{cr} = 1{,}98$. Знание K_{cr} необходимо для получения критериев прочности неоднородных (в частности, сварных) соединений в зависимости от их механических и геометрических параметров и разработки вычислительных схем для определения несущей способности неоднородных соединений.

Методы и результаты упомянутых работ [3–24] относятся к случаю $1 < K < 1{,}5$, наиболее характерному для сварных соединений. В сварных, а тем более в паяных и клееных, соединениях K может быть больше, чем $1{,}5$. В работах [25–27] исследована прочность наклонных сварных швов тонкостенных цилиндрических оболочек и разработаны вычислительные схемы для ее определения. В этих схемах параметр K заменяется на другую величину K_{incl} вследствие реализации более сложного напряженного состояния в наклонном слое. K_{incl} зависит не только от K, но и от угла наклона слоя и условий нагружения оболочки, и может достигать любых значений в диапазоне $(1;\infty)$.

Целью данной работы является изучение напряженного состояния пластических слоев в неоднородных соединениях под сжимающей нагрузкой при любых значениях параметра K, и разработка вычислительной схемы нахождения прочности таких соединений. Эта схема базируется на полученных в работе аналитических зависимостях для ряда внутренних параметров задачи. В основе лежит исследование математической модели напряженно-деформированного состояния пластического слоя, содержащей гипотезу (2).

Задача сопряжения на контактной границе

Напряженное состояние пластического слоя при плоской деформации в безразмерных переменных задается системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0\,; \tag{4}$$

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\,. \tag{5}$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – напряжения. Функции из уравнений (3)–(5) определены на прямоугольном сечении B_1A_1AB слоя длиной 2 и толщиной 2κ, $\kappa \in (0;1]$ с осями симметрии в качестве осей декартовой системы координат. A_1A и B_1B – контактные (длины 2), AB и A_1B_1 – свободные поверхности, точка $H = Oy \cap A_1A$. На осях симметрии слоя касательные напряжения равны нулю:

$$\tau(x,0) = \tau(0,y) = 0\,. \tag{6}$$

На свободной поверхности AB $(x = 1)$

$$\sigma_x = 0;\ \tau_{xy} = 0\,. \tag{7}$$

Напряженное состояние в окрестности свободной поверхности определяется решением задачи Коши для уравнений (3)–(5) при условиях (6), (7). Уравнение (5) получено нормировкой размерных уравнений

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\left(\sigma_B^{\pm}\right)^2$$

величинами σ_B^- в слое и σ_B^+ в основном материале соединения. Поэтому на контактной границе безразмерные напряжения терпят разрыв:

$$\sigma_y^- = K\sigma_y^+;\ \ \tau_{xy}^- = K\tau_{xy}^+\,. \tag{8}$$

Задачей сопряжения для напряжений называется задача нахождения напряжений на контактной границе по уравнениям (8). Обозначим через ω^- угол поворота характеристики при переходе от точки B_1 к точке (обозначим ее F) контактной поверхности. Аналогично, ω^+ – положительный угол поворота характеристики при переходе от точки свободной поверхности к F в основном материале. Тогда система (8) для всех точек отрезка FA приобретает вид [4, 5, 8]:

$$\begin{cases} 1+2\omega^{-}+\cos 2\omega^{-}=K\left(1-2\omega^{+}+\cos 2\omega^{+}\right); \\ \sin 2\omega^{-}=K\sin 2\omega^{+}. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда следует, что на отрезке FA углы ω^{+} и ω^{-} постоянны, и поэтому там же постоянны напряжения $\sigma_x^{\pm}$, $\sigma_y^{\pm}$ и $\tau_{xy}^{\pm}$. В работах [4, 5, 8] получено приближенное решение системы (9):

$$\omega^{-}=\frac{K-1}{2}\left(1+\frac{(K+1)(K-1)^2}{16}\right); \tag{10}$$

$$\omega^{+}=\frac{K-1}{2K}\left(1+\frac{(K-1)^2}{16}\right). \tag{11}$$

Сравнение формулы (10) этого решения с полученным там же численным решением показало, что при $K<1,5$ с точностью до 0,005 эти решения совпадают, но при $K>1,5$ формула (10) непригодна. Формула (11) дает совпадение с численным решением с указанной точностью как минимум на промежутке [1; 2]. В тех же работах на основании численного решения показано, что при $K=1,9816$ угол $\omega^{-}=\pi/4$, что является условием прекращения роста внешней нагрузки. При $K>K_{cr}=1,9816$ основной материал деформируется упруго вплоть до состояния предразрушения материала слоя. Для получения более точного аналитического выражения для напряжения σ_y^{-} воспользуемся формулой

$$\sigma_y^{-}=K\left(1-2\omega^{+}+\cos 2\omega^{+}\right) \tag{12}$$

и формулой (11). Подставляя правую часть (11) в (12), получим, что в точках отрезка FA, то есть в точках с координатами $(x;\kappa)$, $x\in[x_F;1]$, $\sigma_y^{-}(x,\kappa)=\sigma_y^{**}$, где

$$\sigma_y^{**}=2+(K-1)\left[1-\frac{(K-1)^2}{8}\left(1+\frac{4}{K}+\frac{(K-1)^2}{K}\right)\right]. \tag{13}$$

Эта формула дает весьма точные значения для всех $K\in[1;K_{cr}]$. В частности, при $K=K_{cr}=1,9816$ $\sigma_y^{-}=2,5707=1+\pi/2=1+2(\pi/4)+\cos(2(\pi/4))$. В общем случае, в точках отрезка FA $\sigma_y^{-}=\sigma_y^{*}$, где

$$\sigma_y^{*}=\left[\begin{array}{l} \sigma_y^{**},\ K\in[1;K_{cr}]; \\ 1+\pi/2,\ K\in[K_{cr};\infty). \end{array}\right. \tag{14}$$

Здесь σ_y^{**} задано формулой (13). Вычислим касательные напряжения τ_{xy}^{**} в точках отрезка FA. Для всех $K\in[1;K_{cr}]$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{**}&=K\sin\left(2\omega^{+}\right)\approx K\left(2\omega^{+}-\left(2\omega^{+}\right)^3/6\right)=K\left[\frac{K-1}{K}\left(1+\frac{(K-1)^2}{8K}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{K-1}{K}\right)^3\left(1+\frac{(K-1)^2}{8K}\right)^3\right]= \\ &=(K-1)\left[1+\frac{(K-1)^2}{8K}\left(1-\frac{4}{3K^2}-\frac{(K-1)^3}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Следовательно, в точках отрезка FA $\tau_{xy}^{-}(x,\kappa)=\tau_{xy}^{*}$, где

$$\tau_{xy}^{*}=\left[\begin{array}{l} \tau_{xy}^{**},\ K\in[1;K_{cr}]; \\ 1,\ K\in[K_{cr};\infty). \end{array}\right. \tag{16}$$

Здесь τ_{xy}^{**} задано формулой (15). Найдем абсциссу x_F точки F. Когда $K \in [1; K_{cr}]$, в [4, с. 83] показано, что

$$x_F = 1 - \frac{2\kappa}{\cos\omega^- + \sin\omega^-}, \ \cos\omega^- + \sin\omega^- = \sqrt{1+\sin\left(2\omega^-\right)} = \sqrt{1+K\sin\left(2\omega^-\right)} = \sqrt{1+\tau_{xy}^*} .$$

Отсюда

$$x_F = \begin{cases} 1 - \dfrac{2\kappa}{\sqrt{1+\tau_{xy}^*}}, \ K \in [1; K_{cr}]; \\ 1 - \sqrt{2}\kappa, \ K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \tag{17}$$

Вычисление касательных напряжений

Представим уравнение (5) приближенно в виде [3–6]:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1-\tau_{xy}^2} \approx 2 - \tau_{xy}^2 . \tag{18}$$

Используя (18), исключим из (3) и (4) нормальные напряжения. Получим [4, 5] нелинейное уравнение относительно неизвестной функции τ_{xy}:

$$-\frac{\partial^2\left(\tau_{xy}^2\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0 . \tag{19}$$

Подставляя в (6) и (19) правую часть (2), получим, что функция $Y(y)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию:

$$Y'' + 4YY' = 0, \quad Y(0) = 0. \tag{20}$$

Решение этой задачи в случае сжатия имеет вид:

$$Y(y) = -0,5a \ tg(ay).$$

Здесь a – произвольный положительный параметр. Из (2) следует, что всюду в слое, за исключением зон свободных поверхностей,

$$\tau_{xy} = -0,5a\,x tg(ay) . \tag{21}$$

Для нахождения параметра a следует приравнять значения τ_{xy}, вычисленные в точке F по формулам (16) и (21). Когда $K \in [1; K_{cr}]$, получим уравнение:

$$ax_F \ tg(a\kappa) = 2\tau_{xy}^* . \tag{22}$$

Введем обозначение [4] для функции, обратной функции $y = x tg\, x$:

$$x = y tg\, y \Leftrightarrow y = atgd(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (-\pi/2; \pi/2) .$$

Тогда уравнение (22) можно записать в виде:

$$a = \frac{1}{\kappa} atgd\left(\frac{2\tau_{xy}^*}{x_F}\right). \tag{23}$$

Если $K \in [K_{cr}; \infty)$, то

$$a = \frac{1}{\kappa} atgd\left(\frac{2}{1-\sqrt{2}\kappa}\right). \tag{24}$$

Для вычисления приближенных значений функции $atgd$ можно воспользоваться следующей леммой [4].

Лемма 1. *Функцию* atgd *можно представить в виде:*

$$atgd(x) = \sqrt{x\psi(-x)} , \tag{25}$$

где функция ψ *аналитическая, причем*

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{45}x^2 + \frac{16}{945}x^3 + \frac{256}{127575}x^4 + \frac{1984}{33 \cdot 127575}x^5 + \ldots \tag{26}$$

Формулы (25), (26) для вычисления функции $y = atgd\left(x\right)$ удобны для значений x, близких к нулю, и малопригодны для x, близких к ∞. В этом случае можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Функцию* atgd *можно представить в виде:*

$$atgd\left(x\right) = \varphi\left(1/x\right),$$

где функция φ *аналитическая, причем*

$$\varphi\left(t\right) = \left(\pi/2\right)\left(1 - t + t^2 - \left(1 - \pi^2/12\right)t^3 + \left(1 - \pi^2/3\right)t^4 - \ldots\right). \quad (27)$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $x = 1/t$ в уравнении $x = y\,tg\,y$. Продифференцируем по t уравнение $t\,y\,tg\,y = 1$. После преобразований, с повторным использованием последнего уравнения, получим:

$$\left(1 + t + t^2 y^2\right)y' + y = 0, \quad y(0) = \pi/2.$$

Представим решение этой задачи $y = \varphi\left(t\right)$ в виде степенного ряда

$$\varphi\left(t\right) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots.$$

После подстановки правой части этого выражения в предыдущее уравнение вместо неизвестной функции y получим бесконечную последовательность рекуррентных соотношений:

$$a_0 = \pi/2; \;\; a_1 = -a_0; \;\; a_1 + 2a_2 = -a_1; \;\; a_0^2 a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -a_2;$$

$$2a_0 a_1^2 + 2a_0^2 a_2 + 3a_3 + 4a_4 = -a_3; \quad a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 + 3a_0^2 a_3 + 4a_4 + 5a_5 = -a_4;$$

и так далее. Отсюда следует:

$$a_1 = -\pi/2; \;\; a_2 = \pi/2; \;\; a_3 = \left(-\pi/2\right)\left(1 - \pi^2/12\right); \;\; a_4 = \left(\pi/2\right)\left(1 - \pi^2/3\right); \;\; a_5 = \left(-\pi/2\right)\left(1 - \pi^2/6 + \pi^4/80\right);$$

и так далее. Вычисления показывают, что при значениях $x < 2{,}75$ следует использовать формулу (26). В противном случае нужно воспользоваться леммой 2 (формула (27)). Наибольшее отклонение значений функции $y = atgd\left(x\right)$, вычисленных по указанным формулам, от полученных численно, составляет около 0,01.

Вычисление нормальных напряжений и критической нагрузки

Существует, как было установлено в работах [4, 27], два различных типа критических состояний менее прочного слоя, связанных с распределением нормальных напряжений σ_y по контактной границе. В первом случае напряжения σ_y^- нигде на контактной границе не достигают наибольшего возможного для них значения $2K$. Во втором случае существует отрезок HM контактной границы, на котором $\sigma_y^- = 2K$. Нормальные напряжения и критическая нагрузка в этих случаях находятся по различным вычислительным схемам.

Первый случай. Подставляя выражение (21) в уравнения равновесия (3) и (4) и используя условие текучести (5), после интегрирования уравнений получим:

$$\sigma_x^- = \frac{a^2 x^2}{4\cos^2\left(ay\right)} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(ay\right)\right| + C,$$

$$\sigma_y^- = \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(ay\right)\right| - 2 + C. \quad (28)$$

Постоянная C находится из уравнения

$$\sigma_y^-\left(x_F, \kappa\right) = \sigma_y^*,$$

где σ_y^* задано формулой (14), а $\sigma_y^-\left(x_F, \kappa\right)$ – значение σ_y^-, вычисленное в точке F по формуле (28), причем $x = x_F$ находится по формуле (17), а $y = \kappa$. В результате получаем:

$$\sigma_x^- = \frac{a^2}{4}\left(\frac{x^2}{\cos^2\left(ay\right)} - \left(x_F\right)^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(a\,\kappa\right)\right| - \sigma_y^* + 2, \quad x \in \left[0; x_F\right],$$

$$\sigma_y^- = \frac{a^2}{4}\left(x^2 - \left(x_F\right)^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos(a\kappa)}{\cos(a y)}\right| - \sigma_y^*, \quad x \in [0; x_F]. \tag{29}$$

Из (29) следует, что на контактной границе, то есть при $y = \kappa$,

$$\sigma_y^-(x,\kappa) = \left[\begin{array}{l} \frac{a^2}{4}\left(x^2 - x_F^2\right) - \sigma_y^*, \quad x \in [0; x_F], \\ \qquad\qquad -\sigma_y^*, \quad x \in [x_F; 1]. \end{array}\right. \tag{30}$$

Критическая нагрузка определяется средним напряжением $\sigma_{y\,av}$ по контактной поверхности:

$$\sigma_{y\,av} = \int_0^1 \sigma_y^-(x,\kappa)\,dx. \tag{31}$$

Подставив в формулу (31) правую часть (30), получим:

$$\sigma_{y\,av} = -\int_0^1 \sigma_y^*\,dx + 0,25a^2 \int_0^{x_F}\left(x^2 - x_F^2\right)dx = -\left(\sigma_y^* + a^2 x_F^3 / 6\right). \tag{32}$$

Напомним, что σ_y^* вычисляется по формуле (14), x_F – по формуле (17), коэффициент a – по формулам (23) и (24). Значения функции $y = atgd(x)$ при $0 < x < 2{,}75$ можно найти по формулам (25), (26), а при $x \ge 2{,}75$ по формуле (27), положив в ней $t = 1/x$.

Данный случай характеризуется условием:

$$\max_{x\in[0;1]}\left|\sigma_y^-(x,\kappa)\right| \le 2K.$$

В силу (30) это условие можно представить в виде:

$$\sigma_y^* + a^2 x_F^2 / 4 \le 2K. \tag{33}$$

Второй случай. Предположим, что условие (33) не выполняется, то есть

$$\sigma_y^* + a^2 x_F^2 / 4 > 2K. \tag{34}$$

В этом случае существует отрезок контактной границы HM $(M \in HF)$, на котором $\sigma_y^- = 2K$. На участке MF функция напряжений σ_y^- должна иметь такую же структуру, как в первом случае:

$$\sigma_y^- = a^2\left(x - x_M\right)^2 / 4 + C.$$

Для вычисления постоянных x_M и C есть два уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_y^-(x_F,\kappa) = -\sigma_y^*, \\ \sigma_y^-(x_M,\kappa) = -2K. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_M = x_F - (2/a)\sqrt{2K - \sigma_y^*}. \tag{35}$$

На отрезке MF

$$\sigma_y^-(x,\kappa) = \frac{a^2}{4}\left(x - x_M\right)^2 - 2K = \frac{a^2}{4}\left(x - x_F + \frac{2}{a}\sqrt{2K - \sigma_y^*}\right)^2 - 2K, \quad x \in [x_M; x_F]. \tag{36}$$

Абсцисса x_M точки M положительна по смыслу этого случая. Заметим, что величина x_M, вычисленная по формуле (35), положительна тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (34).

Вычислим критическую нагрузку. Подставив в интеграл (31) выражение (36), получим:

$$\sigma_{y\,av} = \int_0^1 \sigma_y^-(x,\kappa)\,dx = -2K\,x_M + \int_{x_M}^{x_F}\left(\tfrac{a^2}{4}(x - x_M)^2 - 2K\right)dx - \sigma_y^*(1 - x_F) =$$

$$= -2K\,x_M - \frac{1}{3}\left(4K + \sigma_y^*\right)\left(x_F - x_M\right) - \sigma_y^*\left(1 - x_F\right). \tag{37}$$

Здесь x_M вычисляется по формуле (35), σ_y^* вычисляется по формуле (14), x_F – по формуле (17), коэффициент a – по формулам (23) и (24). При условии (33) критическая нагрузка вычисляется по формуле (32), а при условии (34) – по формуле (37).

Литература

1. Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Г. Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Издательство иностр. литературы, 1948. – С. 102–113.

2. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63–67.

3. Остсемин, А.А. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Проблемы прочности. – 1990. – № 7. – С. 107–113.

4. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.

5. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.

6. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность сварных швов труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 1998. – №4. – С. 16–20.

7. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38–48.

8. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и програмирование». – 2009. – Вып. 3. – № 17(150). – С. 36–58.

9. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6(46). – С. 19–23.

10. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115–124.

11. Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 11–16.

12. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.

13. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний пластического слоя / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, вып. 5. – С. 2502–2504.

14. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний неоднородного слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2013. – Т. 46. – С. 176–178.

15. Дильман, В.Л. О напряженно–деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.

16. Дильман, В.Л. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Изв. Челябинского научного центра. – 2006. – Вып. 2(32). – С. 1–4.

17. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния пластического слоя с сечением в форме кольцевого сектора / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7(62). – С. 13–20.

18. Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных соединений стержней арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–17.

19. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4. – № 37(170). – С. 65–77.

20. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Известия ВУЗов. Математика. – 2011. – № 11. – С. 12–22.

21. Дильман, В.Л. Анализ прочности неоднородных сварных швов стержней арматуры / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Вестник машиностроения. – 2015. – № 2. – С. 29–33.

22. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 89–102.

23. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40(299). – С. 164–168.

24. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 79–84.

25. Дильман, В.Л. Влияние поверхностных дефектов на статическую прочность сварных швов спиральношовных труб / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2004. – № 2. – С. 16–19.

26. Остсемин, А.А. Статическая прочность механически неоднородных сварных соединений с односторонним поверхностным дефектом при вязком разрушении / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 10. – С. 9–12.

27. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку их менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.

Поступила в редакцию 28 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 4, pp. 11–19

DOI: 10.14529/mmph150402

THE STRESS STATE OF A STRIP WITH A LAYER UNDER CONSIDERABLE MECHANICAL HETEROGENEITY

V.L. Dil’man[1], A.N. Dheyab[2]

The stress state of the inhomogeneous strip, containing a rectangular insertion made from a less strong material was investigated under compressive loading with plane deformation during the critical moment of loading. The relationship between the strength characteristics of the basic material and the insert material is assumed to be arbitrary. Explicit analytical expressions to calculate critical loading were obtained.

Keywords: plastic layer; plane deformation; compression; stress state; critical loading.

References

1. Prandtl L. Beispiele deranwendug des Hencky’s theorem zum Gleichgewicht der plastichen koper. *Z. Angew. Math. Mech*, 1923, Bd. 3, no. 6, pp. 401–406.

[1] Dil’man Valeriy Lazerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: Dilman49@mail.ru

[2] Dheyab Aus Nidal is Post-graduate Student, Applied mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: Aws.nth@gmail.com

2. Kachanov L.M. *Izv. AN SSSR. Otd. tekhn. nauk. Mekhanika i mashinostroenie*, 1962, no. 5, pp. 63–67. (in Russ.).

3. Ostsemin A.A., Dil'man V.L. Compression of a plastic layer by two rough plates. *Strength of Materials*, 1990, Vol. 22, Issue 7, pp. 1076–1085. DOI: 10.1007/BF00767561

4. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy miagkikh prosloek v neodnorodnikh soedineniakh* [Mathematical modeling of critical states of soft layers in inhomogeneous joints]. Chelyabinsk, Izdatelskiy tcentr YUrGU Publ., 2011. 276 p. (in Russ.).

5. Dilman V.L. *Matematicheskie modeli napriazhennogo sostoyania neodnorodnikh tonkostennikh tcilindricheskikh obolochek* [Mathematical models of stress states of inhomogeneous thin walled cylindrical shells]. Chelyabinsk, Izdatel'stvo YUrGU Publ. 2007. 202 c. (in Russ.).

6. Dilman V.L. Ostsemin A.A. *Khimicheskoe i neftyanoe mashinostroenie,* 1998, no. 4, pp. 16–19.

7. Dilman V.L, Ostsemin A.A. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashi*, 2005, no. 4, pp. 38–48. (in Russ.).

8. Dil'man V.L. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2009, Issue 3, no. 17(150). pp. 36–58. (in Russ.).

9. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*, 2005. Issue 6. no. 6(46). pp. 19–23. (in Russ.).

10. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela,* 2001, no. 6. pp. 115–124. (in Russ.).

11. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. The analysis of the stress strain state of a heterogeneous plastic stripe. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2012, Issue 7, no. 34(293), pp. 11–16. (in Russ.).

12. Dil'Man V.L., Karpeta T.V. *Russian Mathematics*, 2013, Vol. 57, no. 8. pp. 29–36. DOI: 10.3103/S1066369X13080045

13. Dilman V.L., Nosacheva A.I. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, Vol. 18, Issue 5. pp. 2502–2504. (in Russ.).

14. Delmann V.L., Nosacheva A.I. *Trudy matematicheskogo tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, 2013, Vol. 46, pp. 176–178. (in Russ.).

15. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela,* 2002, no. 2. pp. 109–120. (in Russ.).

16. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2006, Issue 2(32). pp. 1–4. (in Russ.).

17. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*, 2006, Issue 7, no. 7(62), pp. 13–20. (in Russ.).

18. Dilman V.L., Ostsemin A.A, Eroshkina T.V. *Russian Engineering Recearch.* 2008, Vol. 28, no. 9, pp. 849–853. DOI: 10.3103/S1068798X08090037

19. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2009, Issue 4, no. 37(170), pp. 65–77. (in Russ.).

20. Eroshkina T.V., Dil'man V.L. *Russian Mathematics*, 2011, Vol. 55, no. 11, pp. 9–17. DOI: 10.3103/S1066369X11110028

21. Dilman V.L., Karpeta T.V. *Vestnik mashinostroenia*, 2015, no. 2, pp. 29–33. (in Russ.).

22. Dilman V.L. *Mechanics of Solids*, 2010, Vol. 45, Issue 2, pp. 226–237. DOI: 10.3103/S0025654410020081

23. Dilman V.L., Nosacheva A.I. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, Issue 14, no. 40(299), pp. 164–168. (in Russ.).

24. Nosacheva A.I. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013. Vol. 6, no. 3. pp. 79–84. (in Russ.).

25. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, Vol. 40(1–2), pp. 87–93. DOI: 10.1023/B:CAPE.0000024143.53688.ca

26. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2005, Vol. 41(9–10), pp. 522–529. DOI: 10.1007/s10556-006-0012-6

27. Dilman V.L., Karpeta T.V. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol. 49(9–10), pp. 668–674. DOI: 10.1007/s10556-014-9816-y

Received September 28, 2015