УДК 519.883 DOI: 10.14529/mmph150403

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИ ВЫБОРЕ КОНЦЕПЦИЙ РАВНОВЕСИЯ (НА ПРИМЕРЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ)[1]

В.И. Жуковский[2], Ю.А. Бельских[3], С.П. Самсонов[4]

Найдены коэффициентные критерии и явный вид равновесных по Бержу и по Нэшу ситуаций в бескоалиционной игре двух лиц, а также коэффициентные условия отсутствия этих равновесий.

Ключевые слова: бескоалиционная игра двух лиц; матрицы; вектора; равновесие по Нэшу; равновесие по Бержу.

Введение

Те, кто занимался теорией устойчивости по Ляпунову, помнят коэффициентные условия устойчивости. Суть в том, что по знакам коэффициентов дифференциального уравнения, соотношениям между ними иногда можно судить об устойчивости невозмущенного движения. В предлагаемой читателю статье такая же идея осуществлена для линейно-квадратичной бескоалиционной игры двух лиц. Именно по свойствам коэффициентов функций выигрыша решаются два вопроса: а) существует или отсутствует равновесие по Бержу или по Нэшу; б) если существует, то каков его явный вид.

Постановка задачи и вспомогательные сведения

Рассматриваем бескоалиционную линейно-квадратичную игру

$$\Gamma_2 = \left\langle \{1,2\}, \left\{ X_i = R^{n_i} \right\}_{i=1,2}, \{ f_i(x_1,x_2)\}_{i=1,2} \right\rangle.$$

Особенность Γ_2 в том, что отсутствуют ограничения на множества стратегий X_i , именно стратегиями i-го игрока могут быть любые n_i -векторы-столбцы x_i (из n_i -мерного евклидова пространства R^{n_i} с обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением); функция выигрыша игрока i пусть имеет вид

$$f_i(x_1,x_2) = x_1' A_i x_1 + 2x_1' B_i x_2 + x_2' C_i x_2 + 2a_i' x_1 + 2c_i' x_2, \quad (i=1,2), \tag{1}$$

где постоянные симметричные матрицы A_i , C_i , прямоугольная B_i и постоянные вектора a_i , c_i соответствующих размерностей; штрих сверху означает операцию транспонирования; $\det A$ означает определитель матрицы A; далее A<0 (>,≤) означает, что квадратичная форма $z_1' A z$ определенно отрицательна (соответственно положительна, неположительна); будем использовать следующие операции дифференцирования билинейных форм по векторному аргументу [1, с.13–16]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1' B_i x_2 \right] = B_i x_2 \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_1' B_i x_2 \right] = B_i' x_1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1' A_i x_1 \right] = 2A_i\, x_1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2a_1' x_1 \right] = 2a_1 \right),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} x_i' A_i x_i = 2A_i; \tag{2}$$

для скалярной функции $\Psi(x)$ и векторного k-мерного аргумента x *достаточными условиями* реализации $\max\limits_{x\in R^k} \Psi(x) = \Psi(x^*)$ будут

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-90408 Укр_а) и НАН Украины (грант № 03-01-14).

[2] Жуковский Владислав Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптимального управления, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru
[3] Бельских Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет технологий и управления.
E-mail: fozbelskih@rambler.ru
[4] Самсонов Сергей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптимального управления, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
E-mail: samsonov@cs.msu.ru

$$\begin{aligned} &1)\quad \left.\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = \operatorname{grad}\Psi(x)\big|_{x=x^*} = 0_k, \\ &2)\quad \left.\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x^*} < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

здесь 0_k – нулевой k-вектор.

Для бескоалиционных игр вида Γ_2 в последние годы получили распространение два вида равновесий по Нэшу и по Бержу.

Игра Γ_2 происходит следующим образом: каждый i-ый игрок, не объединяясь с другим в коалицию, выбирает свою *стратегию* $x_i \in R^{n_i}$ $(i = 1, 2)$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1, x_2) \in R^n$ $(n = n_1 + n_2)$. На множестве таких ситуаций определены *функции выигрыша* $f_i(x)$ для i-го игрока, значение которой определяет *выигрыш* i-го игрока.

Определение. Ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ называется равновесной по Бержу в игре Γ_2, если

$$\max_{(x\|x_i^B)\in R^{n-n_i}} f_i(x\|x_i^B) = f_i(x^B)\ (i = 1, 2),$$

а ситуация $x = (x_1^e, x_2^e)$ – равновесна по Нэшу, если

$$\max_{x_i\in R^{n_i}} f_i(x^e\|x_i) = f_i(x^e)\ (i = 1, 2);$$

здесь $f_1(x\|z_1) = f_1(z_1, x_2),\ f_2(x\|z_2) = f_2(x_1, z_2)$. Каждое из двух равновесий имеет свои позитивные и негативные свойства [2–4]. Зная коэффициенты в функциях выигрыша (1), выясним какое из равновесий существует, а какое отсутствует, и, если существует, найдем его явный вид.

Равновесная по Бержу ситуация

С учетом (1) и с помощью (3) приходим к следующему достаточному условию существованию равновесной по Бержу ситуации в игре Γ_2.

Утверждение 1. Пусть в игре Γ_2

$$A_2 < 0,\quad C_1 < 0 \tag{4}$$

и

$$\det\left[C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2\right] \neq 0. \tag{5}$$

Тогда равновесная по Бержу ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ примет вид

$$\begin{aligned} x_1^B &= -A_2^{-1}B_2\left[C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2\right]^{-1}(B_1'A_2^{-1}a_2 - c_1) - A_2^{-1}a_2, \\ x_2^B &= \left[C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2\right]^{-1}(B_1'A_2^{-1}a_2 - c_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Согласно определению, ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ равновесия по Бержу игры Γ_2, формализуется двумя равенствами

$$\begin{aligned} &\max_{x_2\in R^{n_2}} f_1(x_1^B, x_2) = f_1(x^B), \\ &\max_{x_1\in R^{n_1}} f_2(x_1, x_2^B) = f_2(x^B). \end{aligned} \tag{7}$$

В силу (3) и (1) достаточные условия реализации первого равенства из (7) сводятся к

$$\left.\frac{\partial f_1(x_1^B, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_2^B} = 2B_1'x_1^B + 2C_1x_2^B + 2c_1 = 0_{n_2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f_1(x_1^B, x_2)}{\partial {x_2}^2}\right|_{x_2=x_2^B} = 2C_1.$$

Аналогично для второго равенства из (7)

$$\left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2^B)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_1^B} = 2A_2 x_1^B + 2B_2 x_2^B + 2a_2 = 0_{n_1},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f_2(x_1, x_2^B)}{\partial x_1^{\,2}}\right|_{x_1=x_1^B} = 2A_2.$$

Так как согласно (4), матрицы $C_1 < 0$ и $A_2 < 0$, то ситуация равновесия по Бержу (x_1^B, x_2^B) игры Γ_2 найдется из матричной системы неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} A_2 x_1^B + B_2 x_2^B = -a_2, \\ B_1' x_1^B + C_1 x_2^B = -c_1. \end{cases} \tag{8}$$

Согласно импликации $[A_2 < 0] \Rightarrow [\det A_2 \neq 0] \Rightarrow \left[\exists A_2^{-1}\right]$. Умножим первое из (8) слева на A_2^{-1}, откуда сразу получим

$$x_1^B = -A_2^{-1} B_2 x_2^B - A_2^{-1} a_2. \tag{9}$$

Подставляя его во второе уравнение из (8), приходим к

$$\left[C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2\right] x_2^B = -c_1 + B_1' A_2^{-1} a_2 \tag{10}$$

или

$$x_2^B = \left[C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2\right]^{-1} (B_1' A_2^{-1} a_2 - c_1). \tag{11}$$

Здесь учтено, что, согласно (5), будет $\left(\det\left[C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2\right] \neq 0\right) \Rightarrow \left(\exists (C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2)^{-1}\right)$, и поэтому, умножая обе части (10) слева на $\left[C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2\right]^{-1}$, приходим к справедливости (11). Подставляя найденные x_2^B в (9), получим первые равенства из (6). ■

Аналогично, решая систему (8) умножением второго уравнения слева на C_1^{-1}, получаем

Утверждение 2. Пусть в игре Γ_2 выполнены требования (4) и

$$\det\left[A_2 - B_2 C_1^{-1} B_1'\right] \neq 0. \tag{12}$$

Тогда равновесная по Бержу ситуация $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ имеет вид

$$x_1^B = \left[A_2 - B_2 C_1^{-1} B_1'\right]^{-1} (B_2 C_1^{-1} c_1 - a_2),$$

$$x_2^B = -C_1^{-1} B_1' \left[A_2 - B_2 C_1^{-1} B_1'\right]^{-1} (B_2 C_1^{-1} c_1 - a_2) - C_1^{-1} c_1.$$

Замечание 1. Система (8) имеет единственное решение при $A_2 < 0$ и $C_1 < 0$. Авторам удалось привести вид одного из них к другому.

Равновесная по Нэшу ситуация

Приведем аналогичные результаты для равновесия по Нэшу. Здесь уже для игры Γ_2 вместо (7) следует использовать равновесную по Нэшу ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$, которая определяется двумя условиями

$$\max_{x_1 \in R^{n_1}} f_1(x_1, x_2^e) = f_1(x^e), \quad \max_{x_2 \in R^{n_2}} f_2(x_1^e, x_2) = f_2(x^e). \tag{13}$$

Достаточными условиями реализации (13) будут

$$\operatorname{grad}_{x_1} f_1(x_1, x_2^e)\Big|_{x_1=x_1^e} = \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2^e)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_1^e} = 2A_1 x_1^e + 2B_1 x_2^e + 2a_1 = 0_{n_1},$$

$$\operatorname{grad}_{x_2} f_2(x_1^e, x_2)\Big|_{x_2=x_2^e} = \left.\frac{\partial f_2(x_1^e, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_2^e} = 2B_2' x_1^e + 2C_2 x_2^e + 2c_2 = 0_{n_2},$$

$$\frac{\partial^2 f_1(x_1, x_2^e)}{\partial x_1{}^2} = 2A_1 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x_1^e, x_2)}{\partial x_2{}^2} = 2C_2 < 0.$$

Из первых двух условий получаем матричную систему линейных алгебраических неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} A_1 x_1^e + B_1 x_2^e = -a_1, \\ B_2^{'} x_1^e + C_2 x_2^e = -c_2. \end{cases}.$$

С учетом $A_1 < 0$ и $C_2 < 0$, как и в случае утверждений 1 и 2, приходим к справедливости следующих двух утверждений.

Утверждение 3. Пусть в игре Γ_2

$$A_1 < 0,\ C_2 < 0 \tag{14}$$

и

$$\det\left[C_2 - B_2^{'} A_1^{-1} B_1\right] \neq 0. \tag{15}$$

Тогда ситуация равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ имеет вид

$$x_1^e = -A_1^{-1} B_1 \left[C_2 - B_2^{'} A_1^{-1} B_1\right]^{-1} (B_2^{'} A_1^{-1} a_1 - c_2) - A_1^{-1} a_1,$$

$$x_2^e = \left[C_2 - B_2^{'} A_1^{-1} B_1\right]^{-1} (B_2^{'} A_1^{-1} a_1 - c_2).$$

Утверждение 4. Пусть в игре Γ_2 выполняются ограничения (14) и

$$\det\left[A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2^{'}\right] \neq 0. \tag{16}$$

Тогда равновесная по Нэшу ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ имеет вид

$$x_1^e = \left[A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2^{'}\right]^{-1} (B_1 C_2^{-1} c_2 - a_1),$$

$$x_2^e = -C_2^{-1} B_2^{'} \left[A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2^{'}\right]^{-1} (B_1 C_2^{-1} c_2 - a_1) - C_2^{-1} c_2.$$

Критерии отсутствия равновесия

Приведем довольно любопытное утверждение, которое позволяет отсекать игры, в которых не существует равновесия по Бержу или (и) по Нэшу.

Лемма 1. Если в игре Γ_2 матрица $A_1 > 0$, то не существует $\hat{x}_1$, такого, что при каждом фиксированном x_2 имело место бы равенство

$$\max_{x_1 \in R^{n_1}} f_1(x_1, x_2) = f_1(\hat{x}_1, x_2), \tag{17}$$

т.е. в этом случае максимума по $x_1 \in R^{n_1}$ функции $f_1(x_1, x_2)$ не существует.

Доказательство. «Заморозим» какую-либо стратегию $x_2 \in R^{n_2}$ второго игрока. Тогда функцию выигрыша первого игрока можно представить в виде

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^{'} A_1 x_1 + 2x_1^{'} \varphi(x_2) + \psi(x_2),$$

где n_1-вектор-столбец $\varphi(x_2)$ и скалярная величина $\psi(x_2)$ зависят только от «замороженного» x_2.

По условию леммы матрица $A_1 > 0$ (определенно положительна). Тогда характеристическое уравнение $\det\left[A_1 - E_{n_1}\lambda\right] = 0$ (E_{n_1} – единичная $n_1 \times n_1$-матрица) имеет n_1 вещественных положительных корней (A_1 симметрична) и, кроме того,

$$x_1^{'} A_1 x_1 \geq \lambda^* \|x_1\|^2 \quad \forall x_1 \in R^{n_1}, \tag{18}$$

где $\lambda^* > 0$ наименьший из указанных корней. Максимума в (17) не существует, если, каким бы большим ни было число $m > 0$, существует стратегия $x_1(m, x_2) \in R^{n_1}$, такая, что $f_1(x_1(m, x_2), x_2) > m$. В силу (18) последнее неравенство имеет место, если

$$\lambda^* \| x_1(m, x_2) \|^2 + 2x_1'(m, x_2)\varphi(x_2) + \psi(x_2) > m. \tag{19}$$

Будем искать решение $x_1(m, x_2)$ неравенства (19) в виде

$$x_1(m, x_2) = \beta e_{n_1}, \tag{20}$$

где число $\beta > 0$ построим ниже, а e_{n_1} – вектор размерности n_1, все компоненты которого равны единице.

Подставляя (20) в (19), получаем для нахождения β неравенство

$$\lambda^* \beta^2 n_1 + 2\beta(e'_{n_1}\varphi(x_2)) + \psi(x_2) - m > 0.$$

Поэтому при любых постоянных

$$\beta > \beta_+ = \frac{\left|e'_{n_1}\varphi(x_2)\right| + \sqrt{(e'_{n_1}\varphi(x_2))^2 + \lambda^* n_1 \left|\psi(x_2) - m\right|}}{\lambda^* n_1}$$

и стратегиях первого игрока $x_1(m, x_2) = \beta e_{n_1}$ выполнено $f_1(x_1(m, x_2), x_2) > m$ и поэтому максимума в (17) не существует.

<u>**Замечание 2.**</u> Тогда, с учетом (17) в игре Γ_2 при $A_1 > 0$ не существует равновесной по Нэшу ситуации. Отсюда и из утверждения 1 получаем

1. Если в игре Γ_2 матрицы $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$, а также $A_2 < 0$, $C_1 < 0$ и выполнено (5), то в игре Γ_2 не существует равновесие по Нэшу, но существует равновесие по Бержу, причем ситуация равновесия по Бержу имеет вид (6).

Аналогично,

2. Если $A_2 < 0$, $C_1 < 0$, имеет место требование (5) или (12) и $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$, то существует равновесие по Бержу, но отсутствует равновесие по Нэшу.
3. Если $A_1 < 0$, $C_2 < 0$, имеет место требование (15) или (16) и $A_2 > 0$ или (и) $C_1 > 0$, то существует равновесие по Нэшу, но отсутствует равновесие по Бержу.
4. Если $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$ и $A_2 > 0$ или (и) $C_1 > 0$, то в Γ_2 не существует как равновесия по Нэшу, так и по Бержу.
5. Если $A_2 < 0$, $C_1 < 0$, $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ и требования (5) или (12), а также (15) или (16), то в Γ_2 существует как равновесие по Нэшу, так и по Бержу.

Заключение

Итак, рассмотрели линейно-квадратичную бескоалиционную игру двух лиц без ограничений ($X_i \in R^{n_i}$ $(i = 1, 2)$) и функциями выигрыша

$$f_1(x_1, x_2) = x_1'A_1x_1 + 2x_1'B_1x_2 + x_2'C_1x_2 + 2a_1'x_1 + 2c_1'x_2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1'A_2x_1 + 2x_1'B_2x_2 + x_2'C_2x_2 + 2a_2'x_1 + 2c_2'x_2;$$

штрих сверху означает операцию транспонирования, A_i – симметричная постоянная порядка $n_1 \times n_1$ матрица, C_i – симметричная постоянная порядка $n_2 \times n_2$-матрица, B_i – постоянная прямоугольная $n_1 \times n_2$ матрица, a_i (c_i) – постоянные n_1 (соответственно, n_2)-вектора $(i = 1, 2)$; $A > 0\,(<)$ означает, что квадратичная форма $x_1'Ax$ определенно положительна (соответственно, отрицательна); кванторы: $\exists$ – существование, $\forall$ – общности, $\neg$ – отрицание.

С помощью утверждений 1–4 можно также сформулировать *коэффициентные условия* существования равновесий в игре Γ_2 (см. таблицу).

Как пользоваться таблицей?

<u>Шаг 1.</u> Прежде всего, проверить знакоопределенность матриц A_1, A_2, C_1 и C_2; пусть, например, матрицы $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ (определенно отрицательны), а $A_2 > 0$ (определенно положительна).

Шаг 2. Найти соответствующую строку в таблице (условия $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ и $A_2 > 0$ занимают третью строку) и проверить невырожденность соответствующей в 5-ом столбце матрицы (15), т.е. $\det\left[C_2 - B_2^{'} A_1^{-1} B_1\right] \neq 0$.

Шаг 3. Сразу из столбцов 6 и 7 таблицы следует, что в такой игре Γ_2 не существует равновесия по Бержу, но имеется равновесие по Нэшу при любых матрицах C_1, B_i соответствующих размерностей и векторах a_i, c_i.

Явный вид такого равновесия по Нэшу приведен в утверждении 3 (см. дополнительный столбец впереди таблицы).

Коэффициентные условия существования равновесий

Утверждение	Существует одно из равновесий					РБ	РН	
1	$A_1 > 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$		(5)	$\exists$	$\neg\exists$	$\forall C_2, B_i, a_i, c_i$
2		$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 > 0$	(12)	$\exists$	$\neg\exists$	$\forall A_1, B_i, a_i, c_i$
3	$A_1 < 0$	$A_2 > 0$		$C_2 < 0$	(15)	$\neg\exists$	$\exists$	$\forall C_1, B_i, a_i, c_i$
4	$A_1 < 0$		$C_1 > 0$	$C_2 < 0$	(16)	$\neg\exists$	$\exists$	$\forall A_2, B_i, a_i, c_i$
	Не существуют равновесия							
	$A_1 > 0$	$A_2 > 0$				$\neg\exists$	$\neg\exists$	$\forall C_i, B_i, a_i, c_i$
	$A_1 > 0$		$C_1 > 0$			$\neg\exists$	$\neg\exists$	$\forall A_2, C_2, B_i, a_i, c_i$
		$A_2 > 0$		$C_2 > 0$		$\neg\exists$	$\neg\exists$	$\forall A_1, C_1, B_i, a_i, c_i$
			$C_1 > 0$	$C_2 > 0$		$\neg\exists$	$\neg\exists$	$\forall A_1, A_2, B_i, a_i, c_i$
	Существуют оба равновесия							
	$A_1 < 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	(5) и (15)	$\exists$	$\exists$	$\forall B_i, a_i, c_i$
	$A_1 < 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	(12) и (16)	$\exists$	$\exists$	$\forall B_i, a_i, c_i$

Литература

1. Жуковский, В.И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – Киев: Наукова Думка, 1994. – 320 с.

2. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Нэшу / В.И. Жуковский. – М.: URSS, 2010. – 168 с.

3. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие Бержа–Вайсмана / В.И. Жуковский. – М.: URSS, 2010. – 174 с.

4. Zhukovskiy, V.I. Lyapunov Functions in Differential Games / V.I. Zhukovskiy. – London: Taylor and Francis, 2003. – 281 p.

Поступила в редакцию 28 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 20–26

DOI: 10.14529/mmph150403

COEFFICIENT CRITERIA IN CHOOSING EQUILIBRIUM CONCEPTIONS (ON THE EXAMPLE OF LINEAR-QUADRATIC GAME OF TWO PERSONS)

V.I. Zhukovskiy[1], Y.A. Bel'skikh[2], S.P. Samsonov[3]

Coefficient criteria and an explicit form of Berge and Nash equilibrium situations in a non-cooperative game of two persons as well as coefficient conditions of the equilibrium absence have been found.

Keywords: non-cooperative game of two persons; matrixes; vectors; Nash equilibrium; Berge equilibrium.

References

1. Zhukovskiy V.I., Chikriy A.A. *Lineyno-kvadratichnye differentsial'nye igry* [Linear Quadratic Differential Games]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1994. 320 p. (in Russ.).

2. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie po Neshu* [Introduction to differential games with uncertainty. Nash Equilibrium]. URSS Publ., 2010. 168 p. (in Russ.).

3. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie Berzha–Vaysmana* [Introduction to differential games under uncertainty. Berge–Vaisman Equilibrium]. URSS Publ., 2010. 174 p. (in Russ.).

4. Zhukovskiy V.I. *Lyapunov Functions in Differential Games.* London: Taylor and Francis, 2003. 281 p.

Received September 28, 2015

[1] Zhukovskiy Vladislav Iosifovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Optimal Control Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

[2] Bel'skikh Julia Anatolievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Moscow State University of Technologies and Management, Moscow, Russia.
E-mail: fozbelskih@rambler.ru

[3] Samsonov Sergey Petrovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optimal Control Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
E-mail: samsonov@cs.msu.ru