УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph150404

ГОЛОМОРФНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.А. Замышляева[1], Дж. К. Аль-Исави[2]

Интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, более того, возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Эта необходимость диктуется не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить неклассические модели математической физики в квазибанаховых пространствах. Заметим еще, что уравнения соболевского типа называются эволюционными, если их решения существуют только на полуоси R_+. Теория голоморфных вырожденных полугрупп операторов, построенная ранее в банаховых пространствах и пространствах Фреше, переносится в квазисоболевы пространства последовательностей.

Статья содержит четыре параграфа. В первом, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются квазибанаховы пространства и определенные на них линейные ограниченные и замкнутые операторы. Также вводятся в рассмотрение квазисоболевы пространства, на которых строятся степени квазиоператора Лапласа. Во втором параграфе в качестве операторов L и M рассмотрены многочлены от квазиоператора Лапласа и получены условия, при которых возникают голоморфные вырожденные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей U и F. Другими словами, доказывается первая часть обобщения теоремы Соломяка – Иосиды на квазибанаховы пространства последовательностей. В третьем параграфе строится фазовое пространство однородного уравнения. В последнем параграфе содержится «квазибанахов» аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера.

Ключевые слова: голоморфные вырожденные полугруппы, квазибанаховы пространства, уравнение Дзекцера, квазисоболевы пространства.

Введение

Пусть U – банахово пространство, $L(U)$ – пространство линейных ограниченных операторов. Отображение $U \in C(U; L(U))$ называется полугруппой операторов, если при всех $s,t \in R_+$

$$U^s U^t = U^{s+t}. \qquad (1)$$

Обычно полугруппа операторов отождествляется с ее графиком $\{U^t : t \in R_+\}$. Полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ называется голоморфной, если она аналитически продолжима с сохранением свойства (1) в некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий полуось R_+. Голоморфная полугруппа называется вырожденной, если ее единица $P = s - \lim_{t \to 0+} U^t$ является проектором в U.

Впервые голоморфные вырожденные полугруппы операторов появились в [1, 2] как разрешающие полугруппы линейных эволюционных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \qquad (2)$$

где оператор $L \in L(U; F)$ (т.е. линеен и ограничен), а оператор $M \in Cl(U; F)$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), F – еще одно банахово пространство. В [3], гл. 3, изложена полная теория таких полугрупп, в [4] эта теория распространена на пространства Фреше.

---

[1] Замышляева Алена Александровна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: alzama@mail.ru
[2] Аль-Исави Джавад К.Т. – аспирант кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: jtahir71@gmail.ru

Уравнения вида (2) впервые появились в работах А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, однако систематическое их изучение началось во второй половине прошлого века с работ С.Л. Соболева (см. в [5] прекрасный исторический обзор). Поскольку интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос (см. например, монографии [6–9]), то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Причем необходимость диктуется не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить неклассические модели математической физики [10] в квазибанаховых пространствах [11]. Заметим еще, что уравнения соболевского типа (2) называются динамическими, если их решения продолжимы на всю ось R, и эволюционными, если их решения существуют только на полуоси R_+ [12].

Статья кроме введения и списка литературы содержит четыре параграфа. В первом, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются квазибанаховы пространства и определенные на них линейные ограниченные и замкнутые операторы. Также вводятся в рассмотрение квазисоболевы пространства, на которых строятся степени квазиоператора Лапласа. Во втором параграфе показано, при каких условиях на операторы L и M возникают голоморфные вырожденные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах U и F. Другими словами, доказывается первая часть обобщения теоремы Соломяка–Иосиды на квазибанаховы пространства. В последнем параграфе содержится «квазибанахов» аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера (см., например, [1, 9, 13])

$$(\lambda - \Delta)u_t = \beta\Delta u - \alpha\Delta^2 u + f$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова [14]. Список литературы не претендует на полноту, а отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

1. Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах

Пусть U – линеал над полем R. Упорядоченная пара $(U, {}_U\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если функция ${}_U\|\cdot\|: U \to R$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) ${}_U\|u\| \geq 0$ при всех $u \in U$, причем ${}_U\|u\| = 0$ точно тогда, когда $u = O$, где O – нуль линеала U;

(ii) ${}_U\|\alpha u\| = |\alpha|_U\|u\|$ при всех $u \in U$, $\alpha \in R$;

(iii) ${}_U\|u + v\| = C({}_U\|u\| + {}_U\|v\|)$ при всех $u, v \in U$, где константа $C \geq 1$.

Функция ${}_U\|u\|$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. Очевидно, что в случае $C = 1$ эта функция будет нормой.

Квазибанаховым пространством называется метризуемое полное квазинормированное пространство. Хорошо известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$ (при $q \in [1, +\infty)$ пространства ℓ_q – банаховы). Пусть здесь и далее $\{\lambda_k\} \subset R_+$ – монотонная последовательность, такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty$. *Квазисоболевым* называется квазибанахово пространство

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$$

с квазинормой ${}_q^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} \, | u_k | \right)^q \right)^{1/q}$, $m \in R$. Очевидно, что при $q \in [1, +\infty)$ пространства ℓ_q^m – банаховы; $\ell_q^0 = \ell_q$, а также имеют место плотные и непрерывные вложения ℓ_q^n в ℓ_q^m при $n \geq m$ и $q \in R_+$.

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L:U \to F$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\right)$ для любой последовательности $\{u_k\}\subset U$, сходящейся в U. Нетрудно показать, что линейный оператор $L:U \to F$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Линеал $L(U;F)$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{L(U;F)}\|L\| = sup_{{}_U\|u\|=1} {}_F\|Lu\|$, где ${}_U\|\cdot\|$ (${}_F\|\cdot\|$) – квазинорма в U (F). Последовательность $\{L_k\}\subset L(U;F)$ называется *сильно сходящейся* к оператору $L\in L(U;F)$, если для любого $u\in U$ выполнено ${}_F\|L_k u - Lu\| \to 0$, $k\to\infty$; и *равномерно сходящейся*, если ${}_{L(U;F)}\|L_k - L\| \to 0$, $k\to\infty$.

Теорема 1.1 (аналог теоремы Банаха–Штейнгауза). Последовательность $\{L_k\}\subset L(U;F)$ равномерно сходится к оператору $L\in L(U;F)$ на некотором линеале U^0 плотном в U точно тогда, когда

(i) *последовательность* $\{L_k\}$ *ограничена;*

(ii) *последовательность* $\{L_k\}$ *сильно сходится к* L *на* U^0.

Линейный оператор $L:U \to F$ называется *замкнутым*, если его график $graphL = \{(u,f)\in U\times F : f = Lu\}$ замкнут по квазинорме ${}_{graphL}\|u\| = {}_U\|u\| + {}_F\|Lu\|$.

Теорема 1.2. *Если оператор* $L\in L(U;F)$, *то* L *– замкнутый оператор.*

Теорема 1.3. *Пусть линейный оператор* $L:U\to F$ *замкнут и область определения* $domL = U$. *Тогда* $L\in L(U;F)$.

Теорема 1.4. *Пусть оператор* $L:U\to F$ *замкнут и существует оператор* $L^{-1}:F\to U$. *Тогда* L^{-1} *– замкнутый оператор.*

Линейный оператор $L:U\to F$ называется *плотно определенным*, если замыкание линеала $\overline{domL} = U$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $Cl(U;F)$.

Пример 1.1. Пусть $U = \ell_q^{m+2}$, $F = \ell_q^m$; $Q_n(\lambda)$ – многочлен степени n. Рассмотрим оператор $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, $n\in N$, где $\{u_k\}\subset U$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\}\subset R_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda)\in Cl(U;F)$, $domQ_n(\Lambda) = \ell_q^{m+2n}$, причем $Q_n(\Lambda):\ell_q^{m+2n} \to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм.

2. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L\in L(U;F)$ и $M\in Cl(U;F)$, следуя [1, 2], введем в рассмотрение L*-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu\in C : (\mu L - M)^{-1}\in L(F;U)\}$ и L*-спектр* $\sigma^L(M) = C\setminus \rho^L(M)$ оператора M. Как нетрудно видеть, множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр оператора M всегда замкнут.

Определение 2.1. Оператор M называется (L,p)*-секториальным*, $p\in\{0\}\cup N$, если

(i) существуют константы $a\in R$ и $\theta\in(\pi/2;\pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu\in C : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu > a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K\in R_+$ такая, что

$$\max\left\{ {}_{L(U)}\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|, {}_{L(F)}\left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\| \right\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|},$$

при любых $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$. Здесь $R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p} R^L_{\mu_k}(M)$ – правая и $L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p} L^L_{\mu_k}(M)$ – левая (L,p)-резольвенты оператора M, а в свою очередь, $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$ – правая и левая L-резольвенты оператора M.

Пусть $U=\ell_q^{m+2n}$, $F=\ell_q^m$, $m\in R$, $q\in R_+$, $Q_n(\lambda)=\sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$ *и* $R_s(\lambda)=\sum_{j=0}^{s} d_j\lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, степени *n* и *s*, соответственно, ($n<s$), не имеющие общих корней. Построим операторы $L=Q_n(\Lambda)$, $M=R_s(\Lambda)$ как в примере 1.1. Нетрудно показать, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек $\mu_k=R_s(\lambda_k)(Q_n(\lambda_k))^{-1}$, $k\in N$: λ_k – не корень многочлена $Q_n(\lambda)$, с учетом их кратности. Покажем, что оператор M (L,p)-секториален. Действительно, при всех $k\in N$, λ_k, не являющихся корнями многочлена $Q_n(\lambda)$, точки $\sigma^L(M)$ лежат во множестве R, причем $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=-\infty$ при отрицательном отношении старших коэффициентов многочленов $Q_n(\lambda)$, $R_s(\lambda)$, что гарантирует выполнение условия (i) из определения 2.1. Далее

$$R^L_\mu(M)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mu-\mu_k)^{-1}<.,e_k>e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k\in N;\\ \sum\limits_{k\in N:k\neq\ell}(\mu-\mu_k)^{-1}<.,e_k>e_k, & \text{если существуют } \ell\in N:\lambda_\ell-\text{корень } Q_n(\lambda).\end{cases}$$

Здесь $e_k=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, где единица стоит на k-том месте. Если взять $a>max\{\mu_k\}$, то выполнение (ii) определения 2.1 очевидно. Для левой L-резольвенты $L^L_\mu(M)$ оператора M это условие проверяется аналогично.

Пусть V – квазибанахово пространство, $L(V)$ – пространство линейных ограниченных операторов. Отображение $V\in C^\infty(R_+;L(V))$ называется *полугруппой операторов,* если

$$V^sV^t=V^{s+t} \text{ при всех } s,t\in R_+. \tag{3}$$

Как и выше, отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t:t\in R_+\}$ и назовем *голоморфной,* если она аналитически продолжима с сохранением свойства (3) в некоторый сектор, содержащий R_+.

Теорема 2.1. *Пусть операторы* M *и* L *определены, как выше. Тогда операторы* L *и* M *порождают на пространствах* U *и* F *голоморфные полугруппы* $\{U^t:t\in R_+\}$ *и* $\{F^t:t\in R_+\}$ *соответственно, которые к тому же имеют вид*

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu\in L(U) \text{ и } F^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu\in L(F) \tag{4}$$

при $t\in R_+$, *где контур* $\Gamma\subset\rho^L(M)$ *таков, что* $|arg\mu|\to\theta$ *при* $\mu\to\infty$, $\mu\in\Gamma$.

Приведем набросок доказательства. Прежде всего заметим, что оператор M $(L,0)$-*секториален* и интегралы U^t и F^t равномерно сходятся на любом компакте, содержащемся в секторе $\{\mu\in C:|\arg\mu|<\theta-\frac{\pi}{2}\}=S_\theta$. Свойство (3) проверяется аналогично «банахову» случаю (см. напр., [1–3, гл. 3]) при всех $s,t\in S_\theta$. Более того, полугруппа U^t представима в виде

$$U^t=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{\mu_k t}<.,e_k>e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k\in N;\\ \sum\limits_{k\in N:k\neq\ell}e^{\mu_k t}<.,e_k>e_k, & \text{если существует } \ell\in N:\lambda_\ell-\text{корень } Q_n(\lambda).\end{cases}$$

Голоморфная полугруппа $\{F^t:t\in R_+\}$ строится аналогично. Теорема доказана.

Далее, голоморфную полугруппу $\{V^t : t \in R_+\}$ назовем *вырожденной*, если ее единица $V^0 = s - \lim\limits_{t \to 0+} V^t$ является проектором в пространстве V. Кроме того, заметим, что в определении 2.1 можно положить $a = 0$ ввиду замены $u(t) = e^{at}v(t)$ в (2) и переобозначения $M := M - aL$. Считая, что замена и переобозначение проведены, положим $S^L_{a,\theta}(M) = S^L_\theta(M)$.

Определение 2.2. Оператор M называется *сильно* (L, p)*-секториальным справа* (*слева*), $p \in \{0\} \cup N$, если он (L, p)-секториален и

$$_U\left\| R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} Mu \right\| \le \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k|} \text{ при всех } u \in U,$$

где $\text{const} = \text{const}(u)$ (существует линеал F^0 плотный в F и такой, что

$$_F\left\| M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f \right\| \le \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k|} \text{ при всех } f \in F^0,$$

где $\text{const} = \text{const}(f)$); при любых $\lambda, \mu_k \in S^L_\theta(M)$, $k = 0, \ldots, p$.

Теорема 2.2. *Пусть операторы* M *и* L *определены, как выше. Тогда голоморфная полугруппа* $\{U^t : t \in R_+\}$ $(\{F^t : t \in R_+\})$ *вырождена.*

Доказательство аналогично банахову случаю и очень трудоемко (см. напр., [3, гл. 3]). Поэтому приведем только его схему. Сначала, основываясь на (L, p)-секториальности оператора M, показывается, что ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) = U^0$ и замыкание образа $\overline{im R^L_{(\mu,p)}(M)} = U^1$ не зависят от $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$, $\mu_k \in S^L_\theta(M)$. Затем доказывается, что $U^0 = \ker U^t$ при всех $t \in R_+$ и $u = \lim\limits_{t \to 0+} U^t u$ при всех $u \in U^1$. Таким образом, учитывая сильную (L, p)-секториальность оператора M справа, получим существование проектора

$$P = s - \lim_{t \to 0+} U^t = \begin{cases} I, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ I - \sum\limits_{k \in N : k = \ell} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } \ell \in N : \lambda_\ell - \text{корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

Проектор $Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t$ получается аналогично. Отметим еще, что здесь и на предыдущем этапе главную роль играет теорема 1.1. (Существование проектора $Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t$ доказывается аналогично). Теорема доказана.

Главным следствием сильной (L, p)-секториальности оператора M справа (слева) является расщепление пространства

$$U = U^0 \oplus U^1 \quad (F = F^0 \oplus F^1), \tag{5}$$

где $U^0(F^0)$ – ядро проектора $P = s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t$ ($Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t$), а $U^1(F^1)$ – его образ. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на U^k ($dom M \cap U^k$), $k = 0,1$.

Следствие 2.1. *Пусть операторы* M *и* L *определены, как выше. Тогда операторы* $L_k \in L(U^k; F^k)$, $M_k \in Cl(U^k; F^k)$, $k = 0,1$, *причем существует оператор* $M_0^{-1} \in L(F^0; U^0)$.

Доказательство аналогично банахову случаю (см. напр., [3, гл. 3]), при этом

$$M_0^{-1} = \begin{cases} O, \text{ если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \sum\limits_{k \in N : \lambda_k - \text{корень } Q_n(\lambda)} (R_s(\lambda_k))^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k. \end{cases}$$

Следствие доказано.

Положим $H = M_0^{-1} L_0$ ($G = L_0 M_0^{-1}$), очевидно, $H \in L(U^0)$ ($G \in L(F^0)$).

Следствие 2.2. В условиях следствия 2.1 оператор H (G) нильпотентен степени 0.

Определение 2.3. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-секториальным*, $p\in\{0\}\cup N$, если он сильно (L,p)-секториален слева и

$$\left\|(\lambda L-M)^{-1}L^{L}_{(\mu,p)}(M)\right\|_{L(F;U)}\le\frac{\text{const}}{|\lambda|\prod_{k=0}^{p}|\mu_k|}$$

при любых $\lambda,\mu_k\in S^L_\theta(M)$, $k=0,\dots,p$ и некоторой $\text{const}\in R_+$.

Заметим, что сильно (L,p)-секториальный оператор M, очевидно, сильно (L,p)-секториален справа.

Теорема 2.3. *Пусть операторы M и L определены, как выше. Тогда существует оператор* $L_1^{-1}\in L(F^1;U^1)$.

Доказательство аналогично «банахову» случаю (см. напр., [3, гл. 3]), при этом

$$L_1^{-1}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}<\cdot,e_k>e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k\in N;\\ \sum\limits_{k\in N:k\ne\ell}(\lambda-\lambda_k)^{-1}<\cdot,e_k>e_k, & \text{если существует } \ell\in N:\lambda_\ell - \text{корень } Q_n(\lambda).\end{cases}$$

Конец доказательства.

Построим операторы $S=L_1^{-1}M_1:domM\cap U^1\to U^1$ и $T=M_1L_1^{-1}:M[domM]\cap F^1\to F^1$. Нетрудно показать, что $S\in Cl(U^1)$, а $T\in Cl(F^1)$.

Следствие 2.3. *В условиях теоремы 2.3 операторы S и T – секториальны.*

Замечание 2.1. Подчеркнем, что из сильной (L,p)-секториальности оператора M следует

– существование голоморфных вырожденных полугрупп $\{U^t:t\in R_+\}$ и $\{F^t:t\in R_+\}$ из (4);

– существование их единиц – проекторов $P\in L(U)$ и $Q\in L(F)$, благодаря которым квазибанаховы пространства U и F расщепляются в прямые суммы (5);

– расщепление действий операторов $L_k\in L(U^k;F^k)$, $M_k\in Cl(U^k;F^k)$, $k=0,1$ и существование операторов $M_0^{-1}\in L(F^0;U^0)$, $L_1^{-1}\in L(F^1;U^1)$;

– нильпотентность операторов H, G и секториальность операторов S, T.

Именно эти утверждения мы называем *обобщением прямой теоремы Соломяка–Иосиды* на квазибанаховы пространства.

3. Эволюционные уравнения соболевского типа

Пусть U и F – квазибанаховы пространства; $\{U^t:t\in R_+\}$ и $\{F^t:t\in R_+\}$ – голоморфные вырожденные полугруппы операторов, определенные на пространствах U и F соответственно. Тогда существуют проекторы $P=s-\lim\limits_{t\to0+}U^t$ и $Q=s-\lim\limits_{t\to0+}F^t$, которые расщепляют пространства U и F в прямые суммы $U=U^0\oplus U^1$, и $(F=F^0\oplus F^1)$, где $U^0=\ker P$, $U^1=imP$, $F^0=\ker Q$, $F^1=imQ$.

Пусть U и F – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L\in L(U;F)$ и $M\in Cl(U;F)$ построены в п. 2. Рассмотрим линейное эволюционное уравнение соболевского типа

$$L\dot u=Mu. \tag{6}$$

Вектор-функцию $u\in C^1(R_+;U)$, удовлетворяющую (6) поточечно, назовем (*классическим*) *решением* этого уравнения. Решение $u=u(t)$ уравнения (6) назовем *решением ослабленной задачи Коши* (по С.Г. Крейну), если вдобавок для некоторого $u_0\in U$ выполнено

$$\lim_{t\to0+}u(t)=u_0. \tag{7}$$

Определение 3.1. Множество $P \subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (6), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (6) лежит в P поточечно, т.е. $u(t) \in P$ при любом $t \in R_+$;

(ii) при любом $u_0 \in P$ существует единственное решение задачи (6), (7).

Теорема 3.2. *Пусть операторы M и L определены, как в п.2. Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит подпространство U^1.*

Доказательство. Во-первых, уравнение (6), ввиду замечания 2.1, редуцируется к эквивалентной системе

$$0 = u^0,\ \dot{u}^1 = Su^1, \quad u^1 = Pu,\ u^0 = u - u^1. \tag{8}$$

Во-вторых, для второго уравнения (8) при любом $u_0^1 \in U^1$ существует единственное решение $u^1(t) = e^{tS} u_0^1$ задачи $\lim\limits_{t \to 0+} u^1(t) = u_0^1$, где

$$e^{tS} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\mu I - S)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t \in R_+,$$

а контур Γ такой же, как в теореме 2.1.

Таким образом, при любых $m \in R$ и $q \in R_+$ фазовым пространством уравнения (6) будет подпространство

$$U^1 = \begin{cases} U, \text{ если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \{u \in U : u_k = 0, \text{если } \lambda_k \ - \text{корень } Q_n(\lambda)\}. \end{cases}$$

4. Модель Дзекцера в квазисоболевых пространствах

Пусть U и F – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L \in L(U;F)$ и $M \in Cl(U;F)$ таковы, как в п. 2. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-секториален. Рассмотрим *ослабленную* (в смысле С.Г. Крейна) *задачу Шоуолтера–Сидорова*

$$\lim_{t \to 0+} P(u(t) - u_0) = 0 \tag{9}$$

для линейного неоднородного эволюционного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{10}$$

где вектор-функция $f : [0,\tau] \to U$, $f = f^0 + f^1$, $f^1 = Qf$, $f^0 = f - f^1$ будет определена ниже, $\tau \in R_+$.

Теорема 4.1. *Для любой вектор-функции $f = f(t)$, такой, что $f^0 \in C^1((0,\tau);F^0)$ и $f^1 \in C((0,\tau);F^1)$, и любого вектора $u_0 \in U$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);U)$ задачи (9) для уравнения (10), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^\tau U^{t-s} L_1^{-1} f^1(s)\, ds. \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, факт, что $u = u(t)$ удовлетворяет уравнению (10) и условию (9), устанавливается непосредственной проверкой. Единственность вытекает из теоремы 3.2. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Lambda)u_t = (\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda)u + f, \quad \lambda, \beta \in R,\ \alpha \in R_+ \tag{12}$$

в квазисоболевых пространствах $U = \ell_q^{m+2}$ и $F = \ell_q^m$, $m \in R$, $q \in R_+$. Зададим область определения $dom(\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda) = \ell_q^{m+4}$. В силу теоремы 4.1 имеет место

Следствие 4.1. *При любых $m, \lambda, \beta \in R$, $\tau, q, \alpha \in R_+$, $u_0 \in U$, $f^0 \in C^1((0,\tau);F^0)$ и $f^1 \in C((0,\tau);F^1)$ существует едиственное решение $u \in C^1((0,\tau);U)$ задачи (9), (12), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^{\tau} U^{t-s} L_1^{-1} f^1(s)\, ds.$$

Здесь

$$F^0 = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \{ f \in F : f_k = 0,\ k \in N \setminus \{\ell : \lambda_\ell = \lambda\}\}; \end{cases}$$

$$F^1 = \begin{cases} F, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \{ f \in F : f_k = 0, \lambda_k = \lambda\}; \end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} O, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum\limits_{k \in N : \lambda_k = \lambda} (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)^{-1} e_k. \end{cases}$$

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} < .,e_k > e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum\limits_{k \in N : k \neq \ell} e^{\mu_k t} < .,e_k > e_k, & \text{существует } \ell \in N : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases},$$

где $\mu_k = (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^{-1}$.

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} < .,e_k > e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum\limits_{k \in N : k \neq \ell} (\lambda - \lambda_k)^{-1} < .,e_k > e_k, & \text{существует } \ell \in N : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

2. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

4. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160. DOI: 10.4213/sm841.

5. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.

6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

7. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

8. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

9. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

10. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40(299). – С. 7–18.

11. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

12. Свиридюк, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301–304.

13. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 323–330.

14. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

Поступила в редакцию 12 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 27–36

DOI: 10.14529/mmph150404

HOLOMORPHIC DEGENERATE OPERATOR SEMIGROUPS AND EVOLUTIONARY SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN QUASI-SOBOLEV SPACES OF SEQUENCES

***A.A. Zamyshlyaeva*[1], *J.K.T. Al-Isawi*[2]**

The interest to Sobolev type equations has significantly increased recently, moreover, the need occured to consider them in quasi-Banach spaces. This need is explained not by the desire to enrich the theory but rather by the aspiration to comprehend non-classical models of mathematical physics in quasi-Banach spaces.

It should be noted that Sobolev type equations are called evolutionary, provided their solutions exist only on R_+. The theory of holomorphic degenerate semigroups of operators constructed earlier in Banach and Frechet spaces is transferred to quasi-Sobolev spaces of sequences.

Besides the introduction and references the paper contains four paragraphs. In the first, quasi-Banach spaces and linear bounded and closed operators defined on them are considered. Quasi-Sobolev spaces and powers of the Laplace quasi-operator are also taken into consideration. In the second paragraph polynomials of the Laplace quasi-operator are considered for operators L and M and conditions for the existence of degenerate holomorphic operator semigroups in quasi-Banach spaces of sequences are obtained. In other words, the first part of the generalization of the Solomyak–Iosida theorem to quasi-Banach spaces of sequences is stated. In the third paragraph the phase space of the homogeneous equation is constructed. The last paragraph investigates the "quasi-Banach" analogue of the homogeneous Dirichlet problem in a bounded domain with a smooth boundary for the linear Dzektser equation.

Keywords: holomorphic degenerate semigroups; quasi-Banach spaces; Dzektser equation; quasi-Sobolev spaces.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Sviridyuk G.A. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 5, pp. 1109–1126.

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003. 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

4. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev-type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2004, Vol. 195, no. 8, pp. 1205–1234. DOI: 10.1070/SM2004v195n08ABEH000841

[1] Zamyshlyaeva Alyona Aleksandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: alzama@mail.ru
[2] Jawad K.T. Al-Isawi is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: jtahir71@gmail.ru

5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

6. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations*. Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).

7. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of the High Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 107 p. (in Russ.).

8. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control For the Semi-linear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).

9. Sagadeeva M.A. *Dihotomies of Solutions of Linear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).

10. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, Issue 14, no. 40(299), pp. 7–18. (in Russ.).

11. Al-Delfi J.K. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2013, Vol. 5, no. 1, pp. 107–109. (in Russ.).

12. Sviridyuk G.A.*Doklady Academii Nauk*, 1989, Vol. 304, no. 2, pp. 301–304. (in Russ.).

13. Sviridyuk G.A., Sukhanova M.V. *Differenial Equations*, 1992, Vol. 28, no. 3, pp. 323–330. (in Russ.).

14. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seria: Matematika*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

Received September 12, 2015